FESTIGKEITSLEHRE

VON

M. M. FILONENKO-BORODITSCH

S. M. ISJUMOW, B. A. OLISSOW

I. N. KUDRJAWZEW

L. I. MALGINOW

BAND I



4. AUFLAGE



VERLAG TECHNIK BERLIN

1960

Übersetzung: Dr.-Ing. Bodo Faure
Wissenschaftliche Redaktion: Dipl.-Ing. Gernot Westphal-Fällinghof
Dozent an der Fachschule für Bauwesen, Berlin
Lektor: Doris Netz

КУРС СОПРОТИВЛЕНИЯ МАТЕРИАЛОВ

ЧАСТЬ ПЕРВАЯ

Als Lehrbuch an den Universitäten und Hochschulen der Deutschen Demokratischen Republik eingeführt.

Staatssekretariat für Hochschulwesen

4. Auflage • 7. bis 9. Tausend

Lizenz Nr. 201 • Dg. Nr. 370/8/54 Deutsche Demokratische Republik
Offsetnachdruck: Druckerei „Thomas Müntzer" Bad Langensalza

Vorwort zur deutschen Ausgabe

Im ersten Band dieses sowjetischen Lehrbuches werden die Grundlagen der Festigkeitslehre behandelt. Der Stoff beginnt mit den Grundbegriffen der Materialfestigkeiten und endet bei den dynamischen Problemen des elastischen Stoßes. Den statischen Problemen der Formänderungen infolge Druck, Zug, Biegung und Verdrehung wird ein breiter Raum eingeräumt.

In über 60 Berechnungsbeispielen wird bei fast allen Kapiteln dem Leser die Nutzanwendung des behandelten Stoffes aufgezeigt, wobei durch die reichliche Illustrierung des Textes die allgemeine Verständlichkeit weitgehend erhöht wird.

Bereits mit der im Jahre 1952 herausgegebenen ersten deutschen Auflage fand das vorliegende Werk wegen seines außerordentlich hohen wissenschaftlichen Niveaus bei den Fachleuten dieses Gebietes große Beachtung und vollste Anerkennung. Die erste Auflage war deshalb auch schnell vergriffen, so daß eine zweite Auflage als unveränderter Neudruck nachfolgen mußte.

Um der sich steigernden Nachfrage und den Wünschen vieler Leser gerecht zu werden, erscheint nunmehr eine neubearbeitete dritte deutsche Auflage.

Zum besseren Verständnis für den deutschen Leser wurde die Darstellungsweise einer Reihe von Abbildungen unter Beibehaltung des Inhalts deutschen Normen entsprechend abgeändert und der Text unter Wahrung der Übersetzungsgenauigkeit mehr dem deutschen Ingenieursprachgebrauch angepaßt. Das Sachverzeichnis wurde auf über 2000 Stichworte erweitert und dem Inhaltsverzeichnis ein Verzeichnis der Berechnungsbeispiele nachgesetzt.

Mit dem Erscheinen der dritten deutschen Auflage ist der Verlag bemüht, den Ingenieuren und Technikern des Maschinenbaues und der Bauindustrie zum Zwecke ihrer besonderen Forschungs-, Entwicklungs- und Projektierungsarbeiten aus dem Aufgabenbereich des Aufbaues unserer deutschen Heimat einen unentbehrlichen Ratgeber in die Hand zu geben. Den Studenten dieses Fachgebietes soll dieses Werk ein wertvoller Leitfaden bei ihrem Studium sein.

Berlin, im November 1954 *VEB Verlag Technik*

Vorwort zur vierten deutschen Ausgabe

Die vierte deutsche Ausgabe ist ein im wesentlichen unveränderter Nachdruck der dritten Auflage.

Berlin 1960 *VEB VERLAG TECHNIK*

Vorwort der Originalausgabe

ie erste Auflage dieses Lehrbuches ist in zwei Teilen in den Jahren 1935 und ' erschienen; die zweite wesentlich umgearbeitete und mit vielen Zusätzen ausıttete Auflage wurde Ende 1940 herausgegeben.

e Notwendigkeit, ein dem Programm des Ministeriums für Hochschulıng entsprechendes Lehrbuch zu schaffen, erforderte vom Verfasser eine ntliche Umarbeitung des Lehrstoffes und seine Herausgabe wiederum in Teilen, jedoch nach einem von der ersten Auflage abweichenden Prinzip. erste Teil umfaßt den Stoff, der etwa dem Hauptprogramm des Ministeriums Hochschulbildung entspricht und für alle technischen Hochschulen oblirisch ist. Der zweite Teil enthält die Behandlung schwierigerer Abschnitte, um Teil zur zweiten Auflage gehörten und zum Teil neu hinzugefügt werden. Inhalt des zweiten Teils ist einerseits auf die Beleuchtung der Fragen stellt, die in den Programmen der verschiedenen Technischen Hochschulen ıch ihren Spezialgebieten enthalten sind (wie dies durch die Ergänzungsınitte im Programm des Ministeriums für Hochschulbildung vorgesehen ist). ırerseits werden in diesem Teil Fragen angeschnitten, die sonst nicht in die ramme der Festigkeitslehre aufgenommen worden sind, jedoch in der Praxis Entwerfen und Berechnen von Ingenieur-Aufgaben von Interesse sind. zu gehören die Theorie der dünnwandigen Balken, elementare Angaben aus Plastizitätstheorie, schwierigere Aufgaben über das stabile Gleichgewicht im schen sowie im plastischen Bereich, die Berechnung der Platten, die entration der Spannungen und andere Fragen.

ıgen, die jetzt in dem ersten Teil des Lehrbuches aufgenommen sind, ıen mehr als zwei Drittel des Umfanges der vorherigen Auflage ein, und die ısser mußten viel Arbeit für die Kürzung des Umfanges des Buches leisten. Kürzung wurde durch das Fortlassen einiger Beispiele, durch Übernahme ›r Fragen in den zweiten Teil des Lehrbuches und endlich durch Umtung der Darlegungen in eine gedrängtere und kürzere Form erreicht.

Endergebnis der obenerwähnten Neuverteilung des Stoffes hat das Lehreinen konzentrierteren Aufbau erhalten.

ersten Teil des Lehrbuches sind die Abschnitte 1, 11 und 12 sowie die ,el 3.01 bis 3.09 und das Kapitel 8.5 von M. M. Filonenko-Boroditsch, die ımitte 4, 5, 6, 9 und 10 sowie die Kapitel 2.12 bis 2.15 und 3.10 bis 3.12 . M. Isjumow, die Kapitel 2.01 bis 2.11, 2.15 und 2.16 und das Kapitel 11.3 3. A. Olissow und die Abschnitte 7 und 8 von I. N. Kudrjawzew verfaßt ın. L. I. Malginow hat bei der Abfassung des ersten Teiles nicht mitgewirkt.

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

Beim Entwerfen eines Bauwerks oder einer Maschine hat der Ingenieur eine Vielzahl von verschiedenen Fragen zu lösen, die mit der späteren Verwirklichung des Projekts zusammenhängen. Diese Fragen sind eng verbunden mit einer Reihe von Wissenschaften physikalischen Charakters: Mit der Physik, Chemie und Mechanik, mit denen sich der Ingenieur oft zu beschäftigen hat; sie behandeln und lösen viele Aufgaben, die in der Technik eine wichtige Rolle spielen. Die Zahl solcher Aufgaben ist mit der Entwicklung der Technik außerordentlich gewachsen, wobei in vielen Fällen besondere, für die Ingenieur-Praxis geeignetere Methoden zu ihrer Lösung entwickelt wurden.

Derartige Aufgaben bildeten den Inhalt neuer, sogenannter technischer oder Ingenieur-Fächer, die sich hauptsächlich im XIX. Jahrhundert von der Mechanik, Physik und Chemie schieden. Zu den wichtigsten dieser Fächer gehören: Die Festigkeitslehre, die Theorie der Mechanismen, die Theorie der Bauwerke (die Baustatik), die Wärmetechnik, die Elektrotechnik, die Chemotechnik und andere; diese Fächer sind mit der Physik, Chemie und Mechanik verwurzelt; die Ziele dieser Fächer und die Methoden, derer sie sich bedienen, sind auf die von der Technik gestellten Forderungen abgestellt.

Durch den Fortschritt der Technik ist unmittelbar auch der Fortschritt der technischen Fächer bedingt. Über die technischen Fächer dringen die Physik, Chemie und Mechanik in die Technik ein und fördern ihre Entwicklung; die technischen Fächer durchdringen aber auch umgekehrt die allgemeinen theoretischen Fächer, indem sie ihnen neue Aufgaben stellen und hierdurch oft den Antrieb zur Entwicklung neuer Methoden in diesen Fächern geben.

In den technischen Fächern, die sich auf die Mechanik stützen, kommt natürlich ein mehr oder weniger weit entwickelter mathematischer Stoff zur Anwendung. Auf diese Weise wird auch die Mathematik, eine der abstraktesten Wissenschaften, herangezogen und die enge Verbindung und gegenseitige Abhängigkeit geschaffen, die zwischen den theoretischen und angewandten Wissenschaften besteht. Die vollständigste Charakteristik über die Festigkeitslehre kann eben erst auf Grund dieser gegenseitigen Abhängigkeit gegeben werden.

Die *Festigkeitslehre* befaßt sich mit Festigkeitsberechnungen von Bauwerks- und Maschinenteilen. Soweit es sich hierbei um reale physikalische Körper handelt, ist es notwendig, ihre physikalischen Eigenschaften zu berücksichtigen und daher eine Reihe von Angaben aus der Physik zu entnehmen. Jeder Bauwerks- oder Maschinenteil steht unter der Wirkung anderer Teile, und es ist notwendig, diese Wirkung durch Kräfte auszudrücken, d. h. man muß die theoretische Mechanik heranziehen.

Die realen Körper ändern unter der Wirkung der Kräfte mehr oder weniger stark ihre Form, d. h. sie verformen sich. Die Formänderung des Körpers steht

in enger gegenseitiger Abhängigkeit von den auf ihn wirkenden Kräften; diese Abhängigkeit spiegelt sehr wichtige physikalische Erscheinungen wider, die sich bei der Wirkung der Kräfte auf den Körper ergeben; sie kann auch nicht in der Festigkeitslehre übergangen werden. Hierbei muß man daher auf die Methoden der Elastizitätstheorie zurückgreifen, einer Wissenschaft, die — am Anfang des XIX. Jahrhunderts entstanden — diese Abhängigkeit bei elastischen und plastischen Körpern genau untersucht.

Die Theorie der Formänderung plastischer Stoffe unter der Einwirkung von Kräften nahm ihren Anfang im XIX. Jahrhundert, sie entwickelte sich jedoch erst stärker im jetzigen Jahrhundert und besonders in den letzten Jahren. Jetzt hat sie sich als besondere Lehre mit der Bezeichnung „Plastizitätstheorie" abgesondert. Die sowjetischen Gelehrten haben auch viel zur Entwicklung der Plastizitätstheorie beigetragen, so daß sie heute in einer Form vorliegt, die dem Ingenieur das Lösen wichtiger Aufgaben ermöglicht[1]).

Einige Annahmen und Vereinfachungen, die in der Festigkeitslehre zur Erleichterung beim Lösen von Aufgaben üblich sind, stützen sich auf genauere Lösungen der Elastizitätstheorie; diese Lösungen können wegen ihrer Kompliziertheit nicht in einem Lehrbuch für Festigkeitslehre gebracht werden, und es ist nötig, wenigstens auf sie Bezug zu nehmen; in ähnlichen Fällen werden aber auch Ergebnisse, die an sich für die unmittelbare praktische Anwendung wichtig sind, ohne Beweis angeführt. Die wachsenden Anforderungen in bezug auf Vollständigkeit und Gründlichkeit der Ingenieurberechnungen führen dazu, daß die Methoden der Elastizitätstheorie sich weitere Rechte auf ihre Benutzung in Fragen der Festigkeitslehre erobern. Fragen dieser Art werden im zweiten Teil des vorliegenden Lehrbuches behandelt.

Das eben Gesagte charakterisiert hauptsächlich den *theoretischen Teil* der Festigkeitslehre; ihr experimenteller Teil ist von nicht geringerer, wenn nicht sogar von größerer Bedeutung als der theoretische Teil. Der *experimentelle Teil* der Festigkeitslehre verfolgt folgende Ziele:

a) Das Studium der Zerstörungserscheinungen des Materials unter der Einwirkung der an ihm angebrachten Kräfte und hierbei die Festlegung des Einflusses der Temperatur und der chemischen Faktoren;

b) die Erlangung von Kennzeichnungen des Materials, die für den Aufbau der Theorie der Festigkeitsberechnungen auf Grund von Versuchen erforderlich sind;

c) die Überprüfung der auf Grund der Theorie durchgeführten Festigkeitsberechnungen hinsichtlich ihrer Übereinstimmung mit den tatsächlichen Erscheinungen, die in Maschinen- und Bauwerksteilen vor sich gehen.

Wie in der Physik, Chemie und einer Reihe anderer Wissenschaften ist das Experiment für den Übergang zur Lösung der gestellten theoretischen Aufgabe notwendig, es ist aber auch notwendig nach Beendigung dieser Lösung. Das Experiment ist erforderlich für die Feststellung physikalischer Gesetze, die der Lösung zugrunde gelegt werden, und auch für die Überprüfung der erhaltenen Lösung, die immer nur angenähert ist, da die Theorie nicht gleichzeitig und mit

---

[1]) Hinweise auf diese Arbeiten werden später an den entsprechenden Stellen des Lehrgangs gegeben.

ausreichender Genauigkeit (ausreichend tief) alle komplizierten Erscheinungen berücksichtigen kann, die in realen physikalischen Körpern durch Einwirkung von Kräften vor sich gehen. Die Theorie kann nur dann auf einen Erfolg und die praktische Anwendbarkeit rechnen, wenn sie alle jene Hauptmomente gut berücksichtigt, welche die der Untersuchung obliegende Erscheinung bestimmen, und wenn sie all das fortläßt, was die Lösung der Aufgabe erschwert und keinen wesentlichen Einfluß auf das Endergebnis hat. Das Experiment muß feststellen, ob die Theorie zutrifft oder nicht.

Das Gesagte zeigt, inwieweit der experimentelle und der theoretische Teil der Festigkeitslehre eng miteinander verbunden sind: Eine Theorie kann nicht ohne Experiment aufgebaut werden; umgekehrt gilt, daß das Experiment seine Zielstrebigkeit und Klarheit verliert, wenn die Theorie keine klare Frage stellt und nicht angibt, in welcher Richtung eine Antwort zu erwarten ist; auch muß angegeben werden, was unbedingt zum Versuch gehören soll und was ausgeschlossen oder nach Möglichkeit vermieden werden soll.

Die ersten Versuche, die der Festigkeitslehre zugrunde gelegt wurden, gehören dem XVII. und XVIII. Jahrhundert an; sie wurden von hervorragenden Physikern durchgeführt: Von *Galilei*, *Hooke*, *Mariotte*, *Duhamel*, *Coulomb* u. a. Versuche zur Prüfung der Materialeigenschaften sind jedoch in großem Umfange erstmalig im XIX. Jahrhundert von *Tredgold* und *Telford* durchgeführt worden.

Die Entwicklung des Maschinen- und Eisenbahnbaues im XIX. Jahrhundert stellte große Anforderungen an die Berechnungstheorie der Einzelteile der Maschinen und Bauwerke und auch an die hiermit verbundenen Prüfungen der Eigenschaften der Metalle und anderer Baustoffe. All dies führte zur Errichtung besonderer Material-Prüfungslaboratorien oder „mechanischer Laboratorien"[1]). Ganze Netze solcher Laboratorien sind zur Zeit in der UdSSR und auch im Ausland sehr stark entwickelt. Die Laboratorien verfügen über sehr verschiedenartige und komplizierte Ausrüstungen, die es ermöglichen, die Prüfproben einer Belastung von einigen Kilogramm bis manchmal zu zweitausend Tonnen (das bedeutet ein Gewicht von etwa 20 schweren Lokomotiven) zu unterwerfen. Dort gibt es auch sehr genaue Geräte, die es gestatten, geringfügigste Abmessungsänderungen der Proben (weniger als 1 Mikron = 0,001 mm) festzustellen. Als Ergebnis der Arbeiten der mechanischen Laboratorien ist eine umfangreiche Literatur über die Prüfung der Eigenschaften der Materialien und über deren Verhalten unter der Einwirkung der angebrachten Kräfte entstanden. In diesem hauptsächlich Berechnungsfragen gewidmeten Buch ist der experimentellen Seite nur wenig Platz eingeräumt worden, und es sind nur die wichtigsten Angaben gemacht, die zum Verstehen der Festigkeitslehre beim ersten Studium notwendig sind.

Es muß jedoch daran gedacht werden, daß der Ingenieur bei der weiteren Entwicklung und Benutzung der hier gesammelten Kenntnisse und bei praktischen Anwendungen sein Wissen über die Eigenschaften der zur Verwendung kommenden Materialien und der zu entwerfenden Konstruktionen vervollkommnen muß, um nicht Fehler zu begehen, die Störungen oder sogar einfach eine schlechte Ausführung der Bauwerke und Maschinen zur Folge haben.

---

[1]) Die Bezeichnung „mechanische" erhielten diese Laboratorien zum Unterschied von den chemischen Laboratorien, die sich ebenfalls mit der Materialprüfung befaßten, jedoch hinsichtlich der chemischen Zusammensetzung.

Aus dem Studium der physikalischen Eigenschaften der Materialien, die von ihrer Struktur und chemischen Zusammensetzung abhängen, hat sich ein großes Spezialgebiet der Wissenschaft entwickelt. Die hier zur Ausführung kommenden Prüfungen haben sich die Erhöhung der Festigkeit und der Widerstandsfähigkeit der in der Industrie zur Anwendung kommenden Materialien sowie die Erlangung höherer Wirtschaftlichkeit zum Hauptziel gesetzt. Die mechanischen Eigenschaften der Materialien werden ausführlicher im zweiten Teil des Lehrbuches beleuchtet.

Hiermit wird die Charakteristik der Festigkeitslehre beendet. Im folgenden (ersten) Abschnitt wird die Methode behandelt, die zur Lösung von Aufgaben dient, die sich bei der Beurteilung der Festigkeit und Standsicherheit von Bauwerks- und Maschinenteilen ergeben.

1 Aufgaben der Festigkeitslehre. Grundbegriffe

1.1 Wirkung der Kräfte auf physikalische Körper Formänderungen und ihr Zusammenhang mit den Kräften

A. Jeder feste Körper ändert unter der Einwirkung von Kräften seine Form oder deformiert sich. So wird sich z. B. ein senkrechter Stab unter der Einwirkung eines an ihm angehängten Gewichtes dehnen; ein auf Auflagern liegender Balken wird sich infolge seines Eigengewichtes und der auf ihm ruhenden Belastung durchbiegen.

Die Formänderung ist ein geometrischer Begriff. Betrachtet man sie von dieser Seite aus, so können wir eine geometrische Theorie der Formänderungen aufbauen. Man kann sich also mit Fragen befassen, die sich auf Formänderungen von Linien, geometrischen Figuren und Oberflächen beziehen. Ähnliche Aufgaben spielen in der Geometrie der Gegenwart eine bedeutende Rolle.

Beim Studium der Kräftewirkung auf feste physikalische Körper genügt allerdings die Betrachtung der Erscheinung allein von der geometrischen Seite her nicht: Der Charakter und die Größe der Formänderung hängen sowohl von den auf den Körper wirkenden Kräften als auch von den physikalischen Eigenschaften des Körpers selbst ab.

Wenn wir zwei Stäbe von vollständig gleichen Abmessungen (Bild 1, a und b) nehmen und an diese gleichgroße Gewichte P hängen, so brauchen sich diese, allgemein gesagt, nicht unbedingt gleichmäßig zu verlängern, da die Verlängerung vom Material abhängt, aus dem der Stab gefertigt ist. Angenommen, wir haben z. B. zwei Stäbe, einen aus Stahl und einen aus Gummi, von je 1 m Länge und je 1 cm² Querschnittsfläche. Hängen wir an diese je ein Gewicht von 1 kg, dann wird sich der Gummistab etwa um 20 mm verlängern, der Stahlstab jedoch nur um etwa $^1/_{2000}$ mm. Hieraus folgt, daß die Formänderung der festen Körper eine physikalische Erscheinung ist, die mit den *physikalischen* Eigenschaften des gegebenen Körpers eng verbunden ist.

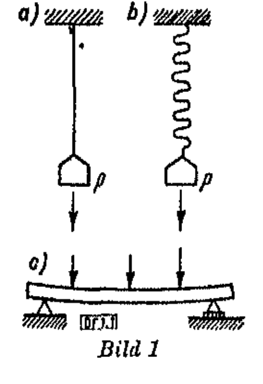


Bild 1

Mit den physikalischen Eigenschaften der Materialien, die im Bauwesen zur Anwendung kommen, werden wir uns im folgenden ausführlicher beschäftigen. Hier vermerken wir lediglich, daß viele Materialien mehr oder weniger die Eigenschaft der Elastizität besitzen, d. h. sie verformen sich etwas unter der Einwirkung der angebrachten Kräfte, doch nach der Entfernung letzterer nehmen sie wieder ihre ursprüngliche Form an und ihr ursprüngliches Volumen ein. Die

Elastizität ist eine sehr wichtige Eigenschaft der Materialien, die weitgehend im Bauwesen und im Maschinenbau ausgenutzt wird.

Viele feste Körper verformen sich selbst unter der Einwirkung großer Kräfte nur äußerst geringfügig. Bei vielen Aufgaben, die sich auf derartige Körper beziehen, ist daher die Möglichkeit gegeben, die Formänderungen zu vernachlässigen und sie als *absolut starr* anzusehen. Aufgaben dieser Art werden in der theoretischen Mechanik gelöst, die das Gleichgewicht und die Bewegung absolut starrer Korper behandelt.

Hieraus geht klar hervor, daß der Begriff eines absolut starren Körpers ein abstrakter Begriff ist, der zur Vereinfachung der Lösung von Aufgaben in dem Falle eingeführt wird, wenn die Formänderungen nicht groß sind. In vielen Fällen können sie dann vernachlässigt werden.

In der Statik wird so z. B. die Aufgabe zur Ermittlung der Auflagerdrucke eines Balkens (Bild 1, c) gelöst. Nach Aufbringung der Lasten auf den Balken wird sich dieser ein wenig durchbiegen. Hierdurch wird die Lage der Punkte des Balkens, an denen die Lasten angesetzt sind, sich gegenüber den Auflagerpunkten ein wenig ändern. Ist jedoch die Durchbiegung des Balkens geringfügig, wie dies gewöhnlich in der Wirklichkeit zutrifft, so kann die erwähnte Änderung der Lage der Kräfte wegen ihrer Geringfügigkeit vernachlässigt werden; d. h., bei der Ermittlung der Auflagerreaktionen eines solchen Balkens kann demnach dieser als absolut starr angesehen werden.

B. Es gibt allerdings eine ganze Anzahl von sehr wichtigen praktischen Aufgaben, in denen nicht alle auf feste Körper wirkenden Kräfte bestimmt werden können, wenn nicht vorher die Formänderungen dieser Körper ermittelt werden. Derartige Aufgaben nennt man *statisch unbestimmte*. Wenn z. B. der Balken, der oben besprochen wurde (Bild 1, c), nicht auf zwei, sondern auf drei Auflagern ruht, so kann man mit Methoden der Statik allein die Auflagerdrücke nicht ermitteln, da die Statik hierfür nicht die genügende Anzahl von Gleichungen liefert. Wendet man diese Gleichungen an, so erhalten wir keine bestimmten Werte für die Auflagerreaktionen.

Zur Lösung dieser Aufgabe wäre es erforderlich, die Resultierende der Belastung und des Balkeneigengewichtes in drei in einer Ebene liegende Kräfte parallel zu dieser zu zerlegen. Aus der Statik ist bekannt, daß dies auf unzählige Arten durchgeführt werden kann, und es bleibt ungeklärt, welche von den erhaltenen Zerlegungen in Wirklichkeit zutrifft.

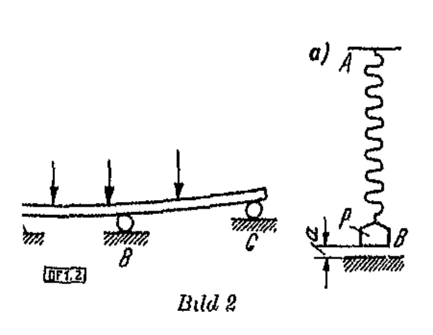


Bild 2

Es ist nicht schwer zu verstehen, daß in diesem Falle die Druckverteilung auf die einzelnen Auflager von den Formänderungen des Balkens selbst abhängt. Nehmen wir an, daß das mittlere Auflager des Balkens (Bild 2, a) ein wenig niedriger liegt als die äußeren, so wird der Balken, wenn er elastisch, jedoch hinreichend „starr“ ist, nachdem er sich infolge des Eigengewichtes und der Belastung ein wenig durchgebogen hat, trotzdem nicht das mittlere Auflager

berühren, und der ganze Druck auf den Balken wird sich auf die äußeren Auflager A und C verteilen; wenn der Balken aber weniger starr ist, so wird er sich bei der Durchbiegung auch auf das mittlere Auflager absetzen. In diesem Falle wird sich der Druck auf den Balken auf alle drei Auflager verteilen. Es ist klar, daß diese Verteilung von der Starrheit (Steifigkeit) des Balkens abhängig ist, d. h. von seinem Vermögen, bei gegebener Belastung eine größere oder kleinere Durchbiegung zu liefern.

Aus dem Gesagten geht klar hervor, daß wir uns bei der Ermittlung der Größe der Kräfte in Aufgaben, die im folgenden gelöst werden sollen, oft gezwungen sehen werden, vorher die Formänderungen der Körper zu bestimmen, an denen diese Kräfte angebracht werden, obgleich uns bei der zu lösenden Aufgabe diese Formänderungen nicht unmittelbar interessieren.

Dies trifft auf eine Vielzahl von Aufgaben zu, und es ist daher beim Aufbau der Theorie der Festigkeit und Standsicherheit (Stabilität) von Anlagen, wie auch in den oben besprochenen Beispielen, notwendig, folgende drei Seiten aller Aufgaben zu untersuchen, die sich auf die Wirkung von Kräften auf einen festen Korper beziehen und im folgenden von uns behandelt werden:

1. Die Beziehungen der auf einen Körper wirkenden Kräfte, die durch die Statik gegeben sind (statische Seite der Aufgabe);
2. die geometrischen Eigenschaften der Formänderung (geometrische Seite der Aufgabe);
3. das physikalische Gesetz, das die Kräfte mit den Formänderungen in Verbindung bringt, d. h. das die Beziehung zwischen diesen und jenen angibt (physikalische Seite der Aufgabe).

Diese drei Seiten bestimmen die Methode, die bei allen Aufgaben ähnlicher Art als allgemeingültig anzusprechen ist.

1.2 Äußere und innere Kräfte

A. Befassen wir uns ein wenig ausführlicher mit der statischen Seite der Aufgaben der Festigkeitslehre. Bei den vorhergehenden Überlegungen sprachen wir von auf einen festen Körper wirkenden Kräften. Im folgenden ist es notwendig, diese Kräfte in zwei Gruppen zu unterteilen: in äußere Kräfte und innere Kräfte.

Als *äußere Kräfte* bezeichnet man die an einem Körper angebrachten Kräfte, die durch die Wirkung anderer Körper hervorgerufen werden. Diese äußeren Kräfte können ihrerseits unterteilt werden:

a) in Oberflächenkräfte. Schon die Bezeichnung weist darauf hin, daß diese Kräfte an der Oberfläche des Körpers angebracht sind; z. B. die auf dem Balken liegende Belastung, die Reaktionen seiner Auflager (sie greifen ebenfalls am Balken an), ein Gewicht, das an eine Feder gehängt ist;
b) in Volumen- oder Massenkräfte, d. h. Kräfte, die, allgemein gesagt, an allen inneren Punkten eines Körpers wirken. Das sind z. B. die Gravitationskräfte; für Körper, die sich in der Nähe der Erdoberfläche befinden, ihr Gewicht; hierzu gehören auch die Trägheitskräfte, die Zentrifugalkräfte, die in rotierenden Körpern entstehen, z. B. in Schwungrädern, in den Scheiben von Dampfturbinen.

Als *innere Kräfte* bezeichnet man Kräfte, die durch die Wirkung von Teilen des Körpers auf andere Teile hervorgerufen werden. Wenn auch auf den gegebenen festen Körper keine äußeren Kräfte wirken, so weist er dennoch innere Kräfte auf. Sie gewährleisten auch die Existenz des Körpers als solchen. Das Anbringen äußerer Kräfte an diesem Körper ruft eine gewisse Änderung der inneren Kräfte hervor. Anders ausgedrückt, infolge des Anbringens von äußeren Kräften an den Körper ergeben sich in diesem zusätzliche innere Kräfte. Im folgenden werden hauptsächlich diese zusätzlichen inneren Kräfte für uns von Interesse sein, da gerade sie mit dem Widerstand des Körpers gegen die Wirkung äußerer Kräfte und demnach mit Fragen der Festigkeit eng verbunden sind.

Die Natur der inneren Kräfte und die Formänderungserscheinungen fester Körper wurden noch im XIX. Jahrhundert mit Hilfe der Molekulartheorie des Aufbaues der Stoffe erklärt. Die neuzeitliche Physik hat, wie bekannt, hinsichtlich der Erforschung des Atomaufbaues überraschende Ergebnisse erzielt. Auf Grund von Versuchen sind gewaltige innere Atomkräfte festgestellt worden. Die Formänderungstheorie für Körper, die unter der Einwirkung äußerer Kräfte stehen, ist genügend vervollkommnet worden, aber der Gebrauch dieser Theorie hat sich für praktische Anwendungen und Ableitungen als äußerst kompliziert erwiesen. Daher geht man in der Elastizitätstheorie, in der Plastizitätstheorie und in der Festigkeitslehre bis zur heutigen Zeit von der Annahme (oder von der Hypothese) eines kompakten Körperaufbaus aus, wobei man voraussetzt, daß der ganze geometrische Rauminhalt des Körpers vollkommen mit Stoff (Substanz) angefüllt ist. Da diese Voraussetzung die Möglichkeit bietet, eine Theorie aufzubauen, die mit dem Versuch gut übereinstimmt, so übernehmen wir sie als Arbeitshypothese, die für die Erklärung des Wesens der im festen Körper vor sich gehenden Erscheinungen nicht geeignet ist, wohl aber zur Vereinfachung der erforderlichen Ableitungen praktischen Charakters.

Wenn man diese Arbeitshypothese übernimmt, muß man jedoch dafür Sorge tragen, daß die Festigkeitslehre bei ihrer Darlegung sich nicht von der allgemeinen Mechanik als losgelöst erweist, deren Methoden und Ableitungen sie benutzt. Daher müssen wir erstens das Vorhandensein von inneren Kräften im festen Körper kompakter Struktur begründen, und zweitens müssen wir ein geeignetes praktisches Verfahren zur Entdeckung und Ermittlung dieser Kräfte finden, d. h. zu ihrer Überführung in die Gruppe der äußeren Kräfte, deren Vorstellung uns verständlicher und deren Behandlung uns gewohnter ist.

B. Bei der Lösung dieser beiden Aufgaben werden wir von dem dritten Axiom Newtons ausgehen[1]), dessen ganzer Sinn kurz auf folgende Sätze gebracht werden kann:

1. Der Ursprung (oder die Ursache) von Kräften, die auf einen beliebigen physikalischen Körper wirken, kann auch nur ein physikalischer Körper sein.
2. Die Wirkung von Kräften kann nur begründet werden, wenn nicht weniger als zwei physikalische Körper vorhanden sind.

---

[1]) Wir erinnern an die Formulierung der drei Axiome Newtons, die der ganzen Mechanik zugrunde legen.

1. Jeder Körper befindet sich im Zustand der Ruhe oder der gleichförmigen Bewegung, wenn nicht wirkende Kräfte ihn veranlassen, seinen Zustand zu ändern.
2. Die Bewegungsänderung ist proportional der wirkenden Kraft und längs der Kraft gerichtet.
3. Der Wirkung entspricht immer eine gleiche entgegengesetzte Gegenwirkung, oder die Wirkungen zweier Körper aufeinander sind immer gleich und genau entgegengesetzt gerichtet.

3. Die Wirkungen von zwei Körpern aufeinander sind gleich und entgegengesetzt.

Der zweite dieser Sätze stellt uns die Frage: Wie begründet man die Anwesenheit von Kräften innerhalb nur eines gegebenen physikalischen Körpers? Die Lösung dieser Aufgabe wird mit Hilfe des folgenden allgemeinen Verfahrens gegeben, das allen Folgerungen in bezug auf die inneren Kräfte zugrunde liegt: Den gegebenen Körper teilen wir durch einen gedachten Schnitt mittels einer Ebene (oder allgemein mittels einer Fläche) in zwei Teile, A und B. Das dritte Axiom Newtons gibt uns die Möglichkeit, die Wirkung des Teiles B auf den Teil A durch Kräfte zu ersetzen. Die Wirkung des Teiles A auf den Teil B muß man dann durch Kräfte derselben Größe, jedoch von entgegengesetzter Richtung, ersetzen (Bild 3).

Wir bemerken, daß dieses Verfahren es erstens ermöglicht, das Vorhandensein von Kräften innerhalb des gegebenen Körpers zu begründen, d. h. auf die Ursache des Vorhandenseins dieser Kräfte hinzuweisen, und zweitens diese Kräfte in die Gruppe der gewöhnlichen äußeren Kräfte zu überführen. Bei der Betrachtung des Teiles A des Körpers finden wir z. B., daß an der Oberfläche desselben einerseits die gegebenen Kräfte und andererseits (in der Schnittebene) solche Kräfte angreifen, die die Wirkung des entfernten Teiles B ersetzen und an der Fläche des verbliebenen Teiles A wirken.

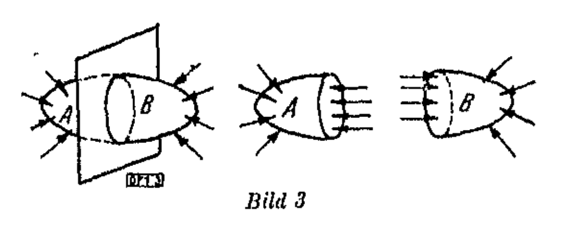


Bild 3

Das hier betrachtete Verfahren spielt eine äußerst wichtige Rolle in der Festigkeitslehre, da es, sachlich gesprochen, uns zu der grundlegenden Methode dieses Lehrfaches geführt hat, nämlich zu der *Methode des Schnittes*. Die Methode des Schnittes offenbart nicht nur die inneren Kräfte im festen Körper, sondern weist bei weiterer Entwicklung den Weg zu ihrer Ermittlung. Nehmen wir einmal an, daß der gegebene Körper AB (Bild 3) unter der Einwirkung angreifender äußerer Kräfte sich im Gleichgewicht befindet. Da das von uns angewandte Verfahren zur Aufdeckung der inneren Kräfte den Zustand des Körpers AB nicht ändern soll, so muß jeder seiner Teile nach der Schnittführung, nach der Entfernung des anderen Teiles und nach dem Ersetzen seiner Wirkung durch Kräfte unter der Einwirkung aller ihn angreifenden Kräfte im Gleichgewicht bleiben. Das besagt, daß die von uns in der Schnittfläche entdeckten inneren Kräfte, die z. B. auf den Teil A wirken, sich mit den ihn angreifenden äußeren Kräften ausgleichen müssen. Dies gestattet uns, am vorliegenden Teil des Körpers (A oder B) die Gleichgewichtsbedingungen der Statik anzuwenden, die uns sechs Gleichungen liefern, die die bekannten äußeren als auch die unbekannten inneren Kräfte enthalten:

$$\Sigma X = 0; \qquad \Sigma M_x = 0;$$
$$\Sigma Y = 0; \qquad \Sigma M_y = 0;$$
$$\Sigma Z = 0; \qquad \Sigma M_z = 0.$$

Wenn es gelingt, *eine (praktisch wichtige) Aufgabe* so weit zu vereinfachen oder zu schematisieren, daß die anfänglich unbekannten inneren Kräfte allein aus den Gleichungen der Statik ermittelt werden können, dann haben wir es mit einer *statisch bestimmten* Aufgabe zu tun.

1.3 Lösungsgang von Aufgaben der Festigkeitslehre

Wie schon oben erwähnt, genügen in den meisten Fällen die Gleichungen der Statik allein nicht zur Ermittlung der inneren Kräfte, und es wird notwendig sein, zusätzlich zu diesen neue Gleichungen einzuführen, indem man die Formänderungsbedingungen des Körpers (oder des Bauwerks) untersucht und diese Formänderungen mit Hilfe des physikalischen Gesetzes mit den Kräften in Verbindung bringt.

Zu der Lösung einer Aufgabe, in welcher die inneren Kräfte im allgemeinen Falle entdeckt und ermittelt werden sollen, gehören daher folgende Operationen:

1. Zerschneiden des zu untersuchenden Körpers in zwei Teile, manchmal auch in eine noch größere Anzahl.
2. Entfernung aller Teile bis auf einen.
3. Ersatz der Wirkung der entfernten Teile auf den verbleibenden durch Kräfte.
4. Aufstellung der Gleichgewichtsbedingungen für den verbliebenen Teil.
5. Geometrische Untersuchung der Formänderungen, die im Ergebnis einige die Formänderungen bindende Gleichungen liefern muß; der Kürze wegen nennen wir diese Gleichungen die *geometrischen Formänderungsgleichungen*.
6. Anwendung des physikalischen Gesetzes, das die Formänderungen mit den Kräften in Verbindung bringt. Dies ermöglicht es, die erhaltenen geometrischen Formänderungsgleichungen durch unbekannte innere Kräfte auszudrücken. Diese Gleichungen nennen wir die *physikalischen Formänderungsgleichungen!* Wenn die physikalischen Formänderungseigenschaften des Körpers genügend untersucht und die entsprechenden Gleichungen zu den Gleichungen der Statik hinzugefügt worden sind, so müssen sich gerade genau so viele Gleichungen ergeben, wie unbekannte innere Kräfte vorhanden sind, die sodann bestimmt werden können.

Den eben aufgezeichneten Lösungsgang der Aufgabe wollen wir in dem folgenden einfachen Beispiel verfolgen.

Das Gewicht P ist an eine Feder angehängt und wird zugleich durch eine Unterlage gestützt (Bild 2b). Es ist bekannt, daß der Zug einer Feder folgendem Gesetz unterworfen ist:

$$X = Kx, \tag{1.1}$$

worin X die die Feder ausziehende Kraft bedeutet; x ist der Wert der Verlängerung, K eine konstante Zahl (der Koeffizient der Feder).

Wenn die Feder nicht angespannt ist, so ist außerdem bekannt, daß dann die Entfernung zwischen dem Gewicht und der Unterlage gleich a ist. Zu bestimmen sind der Druck des Gewichtes auf die Unterlage B und die Reaktionskraft im Aufhängepunkt A. Es ist zu untersuchen, wie diese Kräfte von der Elastizität der Feder abhängen, d. h. vom Koeffizienten K.

1. Den Schnitt führen wir durch den Befestigungspunkt des Gewichtes an der Feder.
2. Wir entfernen die Feder und die Unterlage B und behalten das Gewicht mit seiner an ihm wirkenden Schwerkraft bei.
3. Die Wirkung der Feder auf das Gewicht ersetzen wir durch die nach oben gerichtete Kraft X; die Wirkung der Unterlage auf das Gewicht ersetzen wir durch die ebenfalls nach oben gerichtete Reaktionskraft B.
4. Die Gleichgewichtsbedingungen des Gewichts (Bild 4) kommen in einer Bedingungsgleichung zum Ausdruck:

$$P - X - B = 0. \qquad (1.2)$$

Da wir zwei Unbekannte haben, nämlich X und B, und nur eine Gleichung, so sind wir gezwungen, noch eine Gleichung auf Grund der Untersuchung der Formänderungen zu suchen. Gehen wir zu dieser Aufgabe über!

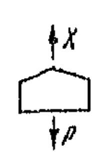


Bild 4

5. Wenn wir durch x die Verlängerung der Feder bezeichnen, so lautet die geometrische Gleichung der Formänderungen:

$$x = a.$$

6. Indem wir das Gesetz der Ausdehnung der Feder benutzen:

$$X = Kx,$$

drücken wir die vorhergehende Formänderungsgleichung in physikalischer Form aus:

$$X = Ka.$$

Setzen wir diese Gleichung zu der Gleichung der Statik (1.2) hinzu, so erhalten wir zwei Gleichungen:

$$X + B = P,$$

$$X = Ka,$$

aus denen wir die beiden unbekannten Kräfte X und B bestimmen.

Da $$A + B = P$$ ist, folgt, daß

$$B = P - Ka, \qquad A = X = Ka;$$

somit ist die Aufgabe gelöst. Aus der erhaltenen Lösung erkennt man: Je kleiner K ist, d. h. je weicher die Feder ist, desto größer ist der Druck B auf die Unterlage und desto kleiner die Reaktion A der Feder im Aufhängepunkt.

Zu bemerken wäre, daß es äußerst wichtig ist, die in diesem Kapitel formulierte Methode zu beherrschen. Daher wird dem Leser dringend empfohlen, beim Kennenlernen jeder Ableitung nach dem Buch oder bei ihrer Wiederholung alle einzelnen oben aufgezählten Operationen zu analysieren, abzusondern und sie streng in der aufgezählten Reihenfolge anzuwenden. Das Auslassen irgendeiner Operation ist gewöhnlich die Ursache von Fehlern und führt in der ersten Zeit der Erlernung des Lehrstoffes zu Schwierigkeiten.

Spannung als Maß der inneren Kräfte
Spannungsflächen von Navier

. Nehmen wir an, daß wir an einem beliebigen Körper die ersten drei rationen durchgeführt haben, und betrachten wir ein wenig näher die an Schnittfläche CD gefundenen inneren Kräfte des verbliebenen Teiles A l 5). Grenzen wir auf dieser das kleine Flächenelement ΔF ab, so können wir doch, wie klein es auch sein mag, mit Recht annehmen, daß an ihm eine bestimmte Anzahl der Kräfte, die die Wirkung des entfernten Teiles B ersetzen, angreift. Das Flächenelement ΔF berührte ja tatsächlich vor der Abtrennung das ihm entsprechende Flächenelement an der Schnittfläche des entfernten Teiles B. Nach der Entfernung des Teiles B wird sich folglich aus der Zahl der Kräfte, die die Wirkung dieses Teiles auf den Teil A ersetzen, ein entsprechender Teil der Kräfte finden, die an dem Flächenelement ΔF angreifen.

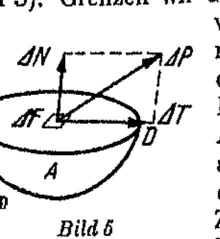


Bild 5

ir wollen auf der Schnittfläche CD ein Netz von kleinen Flächenelementen ΔF ragen und uns vorstellen, daß ihre Anzahl unbegrenzt wächst, gleichzeitig die Größe jedes Flächenelementes sich unbegrenzt vermindert. Wirkt hierbei äß dem eben Gesagten auf jedes Flächenelement dennoch eine entsprechende ahl von Kräften ein, so folgern wir hieraus, daß die Kräfte, die die Wirkung abgetrennten Teiles B ersetzen, vollkommen gleichmäßig über die Schnitte CD verteilt sind, und wir müssen ein Meßverfahren für derartige gleichig verteilte Kräfte finden. Dies ist erforderlich sowohl in bezug auf die von gefundenen inneren Kräfte als auch in bezug auf die gleichmäßig verteilten stungen, die in der Praxis oft vorkommen, z. B. Belastungen der Fußböden Räumen durch Schüttgüter.

ehmen wir ein beliebiges Flächenelement ΔF (Bild 5) und nehmen wir ferner daß ΔP die Resultierende der an ihm angreifenden Kräfte ist, dann wird Verhältnis

$$p_m = \frac{\Delta P}{\Delta F} \tag{1.3}$$

Kraft ausdrücken, die im Mittel auf die Flächeneinheit des Flächenentes ΔF entfällt. Diese Größe nennen wir die *mittlere Spannung* der Kräfte lächenelement ΔF. Die Division der Resultierenden ΔP durch das Flächenent ΔF führen wir mit dem Ziele durch, uns von dem Einfluß der Größe es Flächenelementes frei zu machen und eine Maßeinheit für die inneren 'te zu erhalten.

enn wir ferner die Resultierende ΔP in die zur Schnittebene senkrechte ponente ΔN und in die tangentiale Komponente ΔT zerlegen, so können noch zwei Größen erhalten:

$$\sigma_m = \frac{\Delta N}{\Delta F}; \quad \tau_m = \frac{\Delta T}{\Delta F}. \tag{1.4}$$

sind die sogenannten Normal- und Tangential-Komponenten der mittleren nnung p_m oder, kürzer gefaßt, die mittlere Normal- und mittlere Tangentialnung (Schubspannung) an dem gegebenen Flächenelement ΔF.

Es ist zu bemerken, daß wir in den Formeln (1.3) und (1.4) uns noch nicht endgültig von dem Einfluß der Abmessungen des Flächenelementes in allen den Fällen befreien, in denen die inneren Kräfte nicht gleichmäßig an der Schnittfläche CD verteilt sind. Diese Fälle kommen übrigens in der Praxis sehr oft vor. Um den Einfluß der Abmessungen des Flächenelementes ΔF vollständig auszuschalten, führen wir in Gedanken folgende Operation durch: Wir wählen innerhalb des Flächenelementes einen beliebigen Punkt M der Schnittfläche und stellen uns vor, daß die das Flächenelement umgrenzende Linie sich allmählich um den Punkt M zusammenzieht. Die Größe des Flächenelementes wird hierbei abnehmen, wobei gleichzeitig auch die Größe der Resultierenden ΔP der auf das Flächenelement entfallenden Kräfte abnehmen wird. Das gleiche können wir in bezug auf die in den Formeln (1.4) enthaltenen Komponenten ΔN und ΔT sagen. Geht man zum Grenzwert über, so erhalten wir bei $\Delta F \to 0$ folgende Werte:

$$\left.\begin{aligned} p &= \lim \left(\frac{\Delta P}{\Delta F}\right), \\ \sigma &= \lim \left(\frac{\Delta N}{\Delta F}\right), \\ \tau &= \lim \left(\frac{\Delta T}{\Delta F}\right); \end{aligned}\right\} \tag{1.5}$$

Die *Gesamtspannung* im Punkt M der Schnittfläche CD nennen wir p; entsprechend werden σ und τ als die Normal- und Tangentialkomponente der Spannung oder als die Normal- und Tangentialspannung im Punkt M der Schnittfläche CD bezeichnet.

B. Da gemäß Bild 5

$$(\Delta P)^2 = (\Delta N)^2 + (\Delta T)^2 \text{ ist,} \tag{1.6}$$

so erhalten wir nach Teilung beider Seiten dieser Gleichung durch $(\Delta F)^2$ und auf Grund der Bezeichnungen (1.3) und (1.4):

$$p_m^2 = \sigma_m^2 + \tau_m^2. \tag{1.7}$$

Wenn wir jedoch zu dem Grenzwert bei $\Delta F \to 0$ übergehen, wie dies in den Gleichungen (1.5) vorgenommen wurde, so erhalten wir

$$p^2 = \sigma^2 + \tau^2 \tag{1.7a}$$

oder

$$p = \sqrt{\sigma^2 + \tau^2}. \tag{1.7b}$$

Vereinbaren wir noch, die Spannungen p_m, σ_m, τ_m sowie p, σ und τ als Vektoren anzusehen, die ebenso wie die Kräfte ΔP, ΔN und ΔT gerichtet sind und sich aus diesen gemäß den Gleichungen (1.3), (1.4) und (1.5) ergeben haben. Die Gleichungen (1.7), (1.7a) und (1.7b) zeigen, daß wir dies mit Recht tun, da wir hier die Spannungen σ und τ wie Kräfte oder Geschwindigkeiten (allgemein gesagt, wie Vektoren) nach dem Parallelogrammgesetz addieren. Aus diesem Grunde können wir nun der Normalspannung σ und der Tangentialspannung τ (Bild 6) eine andere Definition geben. Die Normal-

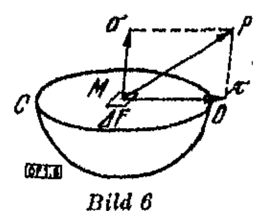


Bild 6

spannung σ ist die Projektion der Gesamtspannung p auf die Normale zum Flächenelement ΔF. Die Tangentialspannung τ ist die Projektion der Gesamtspannung p auf die Richtung MD, die in der Schnittebene CD und gleichzeitig in der durch die Richtungen p und σ geführten Ebene liegt.

Die Spannungen haben große Ähnlichkeit mit Kräften, und wir haben sie eben nach den gleichen Regeln zusammengesetzt und zerlegt, wie man es mit Kräften tut, jedoch drückt eine Spannung eine auf die Flächeneinheit bezogene Kraft aus und hat daher folgende Dimension:

$$[\text{Spannung}] = \frac{[\text{Kraft}]}{[\text{Fläche}]} \quad \text{oder} \quad \frac{[\text{Kraft}]}{[\text{Länge}]^2}.$$

Bei der Messung von Spannungen drückt man in der Regel die Kräfte in kg aus, die Längen aber in cm oder mm. Die Spannung wird dann wie folgt ausgedrückt:

$$\frac{[\text{kg}]}{[\text{cm}]^2} \quad \text{oder} \quad \frac{[\text{kg}]}{[\text{mm}]^2}.$$

Wenn wir eine Kraft von 1 kg haben, die auf ein Flächenelement von 1 cm² wirkt, so erhalten wir die Einheit der Spannung von 1 kg/cm², die zahlenmäßig einer technischen Atmosphäre (1 at) gleich ist.

Im folgenden werden wir oft bei gegebenem Flächenelement ΔF und gegebener Spannung σ (oder τ) die an diesem Flächenelement wirkenden Kräfte ΔN und ΔT ermitteln müssen; offenbar werden wir dann haben:

$$\Delta N = \sigma\,\Delta F \quad \text{oder} \quad \Delta T = \tau\,\Delta F. \tag{1.8}$$

Hier ist es wichtig, sich die Beziehung der Dimensionen zu merken:

$$|\,\text{Kraft}\,| = |\,\text{Spannung}\,| \times |\,\text{Fläche}\,|.$$

C. Um sich die Verteilung der Spannungen am Schnitt eines Körpers klarer vorzustellen, wird folgende geometrische Konstruktion angewendet:

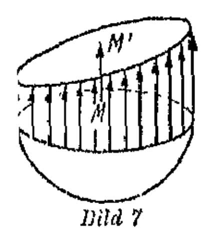


Bild 7

Wählen wir einen beliebigen Punkt M der Schnittfläche (Bild 7), und tragen wir nach Berechnung der Spannung σ [1]) den Wert derselben als Vektor MM' senkrecht zur Schnittebene ab. Führen wir dies für viele Punkte der Schnittfläche durch, so werden die Enden M' der erhaltenen Vektoren auf einer gewissen Fläche liegen, die die *Spannungsfläche von Navier* genannt wird. Wenn wir die Fläche der Normalspannungen konstruieren, so merken wir uns, daß die Vektoren MM' diese Spannungen sowohl hinsichtlich der Größe als auch hinsichtlich der Richtung darstellen. Haben wir es jedoch mit Tangentialspannungen zu tun, so kommt durch die zeichnerische Darstellung der Vektoren MM' ihre Größe nur unklar zum Ausdruck. Wir werden diese Konstruktion für Normalspannungen öfter benutzen; hierbei werden wir fast immer annehmen, daß die Spannungsfläche eine Ebene ist. In vielen praktisch wichtigen Fällen ist eine solche Annahme zulässig, was sowohl durch den Versuch als auch auf rein theoretischem Wege durch die

[1]) Eine derartige Konstruktion kann auch für Tangentialspannungen durchgeführt werden.

Elastizitätstheorie bestätigt wird. Wenn aber die Spannungsfläche eine Ebene ist, so kann man, wie wir uns im folgenden überzeugen werden, die Aufgabe zur Ermittlung der inneren Kräfte auf elementare Weise lösen, ohne auf Schwierigkeiten in mathematischer Hinsicht zu stoßen.

1.5 Lineare und Winkel-Formänderungen

A. Feste Körper können sich in Abhängigkeit von ihrer Form sehr verschiedenartig durch die auf sie wirkenden Kräfte verformen. Nehmen wir z. B. ein Stück Gummi, so können wir diesem mit Hilfe eines auf ihn ausgeübten Druckes oder Zuges die verschiedenartigste Form geben.

Da wir vorhaben, über Formänderungen von Bauwerks- und Maschinenteilen zu sprechen, die unter der Einwirkung großer Kräfte nur wenig ihre Form ändern, beschränken wir uns auf die Fälle kleiner Formänderungen. Es ist dann leicht zu verstehen, daß die Formänderung eines Körpers, wie kompliziert sie auch sein mag, in sehr einfache geometrische Elemente zerlegt werden kann. Zerlegen wir einmal den zu untersuchenden Körper in eine Vielzahl sehr kleiner würfelförmiger Teile. Wenn wir alsdann diesem Körper eine beliebige Formänderung geben, so werden auch alle ihn bildenden Würfel sich verformen, d. h. ihre Form wird sich verzerren. Worin zeigt sich aber diese Verzerrung? Offenbar darin, daß die Längen der Würfelkanten sich ändern, d. h. sich verlängern oder verkürzen, und daß die ursprünglich rechten Winkel der Würfelflächen stumpf oder spitz werden. Wenn für einen jeden solcher Würfel a) die Änderungen der Kantenlängen und b) die Änderungen der von den Kanten eingeschlossenen, ursprünglich rechten Winkel angegeben wären, so könnte man ein Modell eines solchen Einzelwürfels nach seiner Verformung fertigen und, wenn man alle diese Einzelwürfel alsdann zusammenfügt, auch aus ihnen ein Modell des Körpers im ganzen nach seiner Formänderung bauen.

In jedem Falle kann man auf Grund des Gesagten diese Schlußfolgerung ziehen: Wie auch die Formänderung eines Körpers sein mag, sie kann stets in Verlängerungen (oder Verkürzungen) der linearen Teile und in Verzerrungen der ursprünglich rechten Winkel zerlegt werden.

Die Änderung der Länge des Teiles werden wir die *lineare Verformung* oder *Verlängerung* nennen; die Verzerrung des ursprünglich rechten Winkels werden wir die *Winkelverformung* oder den *Schubwinkel*[1]) nennen. Daher werden wir im folgenden nur zwei Arten von elementaren Formänderungen begegnen, a) der Verlängerung und b) dem Schubwinkel, aus denen man eine Formänderung beliebigen Charakters zusammensetzen kann.

Verlängerungen und Verkürzungen werden wir auf Grund ihrer Vorzeichen unterscheiden: Wenn die ursprüngliche Länge des Teiles sich vergrößert hat, so werden wir die Verlängerung als positiv ansehen; wenn sich die ursprüngliche Länge verringert hat, so werden wir die Verlängerung als negativ bezeichnen.

---

[1]) Bei den vorhergehenden Überlegungen haben wir bewußt einen Umstand nicht berücksichtigt, nämlich die Möglichkeit der Krümmung der Kanten der Würfel, in die der zu verformende Körper zerlegt wurde; dieser Umstand hat jedoch keine Bedeutung, da man die Abmessungen der einzelnen Würfel beliebig klein wählen kann; das übliche mathematische Verfahren zur Bestimmung gekrümmter Linien und Flächen besteht darin, daß man die gekrümmte Linie durch eine gebrochene und die Fläche durch ein Polyeder ersetzt und alsdann zu dem Grenzwert übergeht, indem man die Abmessungen der Seiten und die Größen der Flächen des Polyeders verringert. Unser Verfahren ist dem Wesen nach dasselbe; nimmt man die Würfel als unendlich klein an, so können wir daher die Krümmung ihrer Flächen und Kanten unberücksichtigt lassen.

B. Merken wir uns noch folgenden Unterschied zwischen zwei elementaren Formänderungen, der Verlängerung und dem Schubwinkel: Der Schubwinkel ist ein dimensionsloser Wert und wird im Bogenmaß gemessen (das Verhältnis des Kreisbogens zum Radius). Die Verlängerung des Teiles hängt jedoch von seiner Länge ab und wird in Längeneinheiten gemessen (in Zentimetern oder Millimetern) und stellt daher auch keine abstrakte Zahl dar.

Erläutern wir dies mit folgendem Beispiel: Nehmen wir an, daß ein Gummistab von 100 cm Länge sich unter der Einwirkung eines an ihn angehängten Gewichtes um 1 cm verlängert hat. Wenn wir auf ihm einen Abschnitt von 50 cm vermerken, so wird er sich offenbar um 0,5 cm verlängern, ein Abschnitt von 20 cm wird sich dementsprechend um 0,2 cm verlängern. Die Verlängerungen verschiedener Abschnitte ein und desselben Stabes sind entsprechend der Abschnittslänge verschieden und werden als absolute bezeichnet. Um sich von dem Einfluß der Länge freizumachen, ist es natürlich, immer die Verlängerung von Abschnitten ein und derselben Länge zu betrachten, am einfachsten jedoch von Abschnitten von der Länge einer Einheit. In unserem Beispiel zieht sich jeder Zentimeter der Stablänge um ein und denselben Wert $\frac{1\text{ cm}}{100} = 0{,}01$ cm aus. Auf Grund dieser Überlegungen können wir eine geeignete dimensionsfreie Charakteristik der Verlängerung erhalten, die sogenannte *Dehnung*

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}, \tag{1.9}$$

worin Δl die absolute Verlängerung und l die anfängliche Länge des Stabes bedeuten.

C. Es gelang uns, die lineare Formänderung gemäß (1.9) als Verhältnis zweier Strecken darzustellen: Δl und l. Die Winkeländerung (den Schubwinkel) kann man ebenfalls leicht als Verhältnis zweier Strecken darstellen. Wenn der Schubwinkel klein ist, können wir (Bild 8) angenähert schreiben:

Bild 8

$$\gamma = \frac{\overline{mm'}}{\overline{nm}},$$

worin γ der Schubwinkel und mm' der sogenannte *absolute Schub* bedeuten. Den Winkel γ nennt man oft die *Schiebung*.

Als Endergebnis können wir sagen, daß jede Formänderung sich aus Linear- und Winkel-Formänderungen zusammensetzt, die entsprechende, durch abstrakte Zahlen ausgedrückte Charakteristiken besitzen:

a) Dehnung $\qquad \varepsilon = \frac{\Delta l}{l};$

b) Schiebung $\qquad \gamma = \frac{\overline{mm'}}{\overline{nm}}.$

1.6 Zusammenhang zwischen Kräften und Formänderungen Elastizität der Werkstoffe

A. Wir haben einige Merkmale der beiden ersten Seiten der allgemeinen Aufgabe über die Wirkung der Kräfte auf feste Körper behandelt, nämlich der statischen und geometrischen Seite. Unsere Kenntnis von diesen ist bisher noch lange nicht vollständig, und sie muß im folgenden entwickelt und detailliert werden. Schon jetzt kann man aber eine wichtige Angabe im Sinne der Aufzeichnung des Weges machen, auf dem man an die dritte Seite der Aufgabe — an die *physikalische* Seite — herangehen muß.

Die *statische* Seite der Aufgabe hat zwei Begriffe über die inneren Kräfte eingeführt und hat zwei Charakteristiken dieser Kräfte gegeben: Die *Normalspannung* σ und die *Schubspannung* τ.

Die *geometrische* Seite hat gezeigt, daß man eine beliebige zusammengesetzte Formänderung eines Körpers in der Nähe eines gegebenen Punktes in zwei elementare Arten von Formänderungen zerlegen kann: in die *Dehnung* ε und in die *Schiebung* γ.

Das Grundziel der physikalischen Seite der Aufgabe besteht darin, einen allgemeinen, d. h. einen für alle möglichen Fälle brauchbaren Zusammenhang zwischen den Charakteristiken der inneren Kräfte σ und τ und den Charakteristiken der Formänderung ε und γ festzustellen. Die Bedeutung dieses Zusammenhanges und seine Unentbehrlichkeit bei der Lösung der uns interessierenden Aufgaben erklären sich zum Teil aus dem oben Gesagten. Ein Zusammenhang ähnlicher Art ist von uns in Form der Gleichung (1.1) Kap. 1.1 für die Aufgabe über das Gewicht an der Feder eingeführt worden. Ohne einen solchen Zusammenhang hätten wir diese Aufgabe nicht lösen können. Solange wir nicht die Abhängigkeiten der Formänderungen festgestellt haben, werden wir nicht über das notwendigste Mittel zur Lösung sämtlicher Aufgaben über die Kräftewirkung auf einen physikalischen Körper verfügen.

Die uns interessierende Abhängigkeit zwischen den Spannungen und Formänderungen muß unbedingt eine physikalische sein, d. h. sie muß auf einem Versuch aufgebaut sein, worüber schon einiges in Kap. 1.1 gesagt worden ist. Mit Hilfe eines logischen Aufbaues allein kann man eine solche Abhängigkeit nicht finden, da ihr rein physikalische Eigenschaften des Körpers zugrunde liegen.

Wenn die erforderliche Abhängigkeit festgestellt wäre, ohne hierbei vom physikalischen Versuch ausgegangen zu sein, so hätten wir niemals die Garantie, daß die Berechnungen der zu errichtenden Bauwerke die Erscheinungen richtig beschreiben und berücksichtigen, die in ihnen vor sich gehen oder tatsächlich vor sich gehen können.

Es ist notwendig, hier zu bemerken, daß ein grundlegender Abschnitt der theoretischen Mechanik — die Dynamik — auch auf der Abhängigkeit zwischen dem geometrischen Faktor (der Beschleunigung) und dem statischen Faktor (der Kraft) aufgebaut ist. Diese Abhängigkeit ist durch das zweite Axiom Newtons (Kap. 1.2) gegeben und wird kurz so formuliert:

$$\text{Kraft} = \text{Masse} \times \text{Beschleunigung.}$$

Wenn diese Abhängigkeit sich nicht auf den Versuch stützen würde, so würden die Ableitungen der Dynamik die Bewegungen nicht richtig beschreiben, die wir in der Natur beobachten.

B. Bei der Ermittlung der Abhängigkeit zwischen den Kräften und den Formänderungen spielt die Elastizitätseigenschaft der festen Körper, die wir anfangs erwähnt haben, eine außerordentlich große Rolle: die Werkstoffe behalten die elastischen Eigenschaften nur so lange bei, solange die wirkenden äußeren Kräfte eine gewisse Grenze nicht übersteigen. Wenn die auf den Körper wirkenden Kräfte diese Grenze überschreiten, so nimmt der Körper nach ihrer Entfernung nicht mehr ganz seine ursprüngliche Form ein, d. h. in ihm ergeben sich die sogenannten bleibenden Verformungen.

Die Elastizitätseigenschaft der Werkstoffe hat eine große prinzipielle Bedeutung für Bauwerke. Es ist eine Tatsache, daß jedes Bauwerk unter der Einwirkung einer Belastung nicht unverformt bleiben kann; wenn es aber elastisch bleibt, d. h. nach Entfernung der Belastung seine ursprüngliche Form wieder einnimmt, so ist dies ein wichtiges Zeichen dafür, daß die Belastung am Bauwerk keine schädlichen Spuren hinterlassen hat und daß jegliche zukünftigen Belastungen an ihm solche Spuren nicht hinterlassen werden, solange sie nicht bleibende Verformungen mit sich bringen. Hierin liegt die prinzipielle Bedeutung der Elastizität in bezug auf die Bauwerke.

Die Elastizitätseigenschaft der Werkstoffe ist noch in theoretischer Hinsicht wertvoll. Der Versuch zeigt (wie wir dies weiter sehen werden), daß die für uns so notwendige Abhängigkeit zwischen den Spannungen und Formänderungen sich in sehr einfacher Form ergibt, solange der Werkstoff elastisch ist. Beim Zug und Druck eines Balkens werden wir z. B. zwischen der Normalspannung und der Dehnung eine einfache Proportionalität haben:

$$\sigma = E\varepsilon, \tag{1.10}$$

worin E der Elastizitätsmodul ist. Ebenso besteht zwischen der Schubspannung und der Schiebung (s. Kap. 3.02) stets eine Proportionalität:

$$\tau = G\gamma. \tag{1.11}$$

In den Fällen einer komplizierteren Wirkung von Kräften werden sich an Stelle von (1.10) ebenfalls einfache Abhängigkeiten zwischen den Normalspannungen und den Dehnungen ergeben, die durch Gleichungen ersten Grades ausgedrückt werden. Indes werden die uns interessierenden Abhängigkeiten sehr kompliziert, sobald der Werkstoff die Elastizitätseigenschaft verliert. Die Einfachheit dieser Abhängigkeiten ermöglicht es, geeignete Formeln und Gleichungen für die Berechnung von Bauwerken und ihren Teilen zu geben.

C. Es ist jedoch zu bemerken, daß die Festigkeitslehre sich nicht auf die Erforschung der Arbeit der Werkstoffe lediglich in dem Stadium beschränken kann, in dem diese elastisch sind. Die Entscheidung über Fragen eines dauerhaften Widerstandes von Bauwerks- und Maschinenteilen zwingt uns, sich für das Verhalten der Werkstoffe unter der Einwirkung so großer Belastungen zu interessieren, bei denen sich schon sichtbare Zeichen ihrer mehr oder weniger nahen Zerstörung bemerkbar machen. *Nur eine gründliche Kenntnis der Bedingungen,*

bei denen die Zerstörung der Werkstoffe vor sich geht, kann richtige Wege für die Gewährleistung einer zuverlässigen Arbeit der zu entwerfenden und zu errichtenden Objekte weisen.

1.7 Balken und Stab – Einwirkungsarten der äußeren Kräfte

A. In den nächsten Abschnitten werden wir hauptsächlich Körper behandeln, die die Form eines Balkens oder Stabes haben.

Unter einem *Balken* versteht man in der Festigkeitslehre und in der Elastizitätstheorie einen Körper von recht verschiedenartiger und zugleich spezifischer Form. Stellen wir uns irgendeine gerade oder gekrümmte Linie von der Länge l (Bild 9, a) vor, und nehmen wir an, daß längs dieser Linie sich eine ebene Figur CD so bewegt, daß der Schwerpunkt ihrer Fläche sich stets auf der Linie AB, aber die Figurebene sich senkrecht zu dieser Linie befindet. Die Abmessungen der Figur CD setzen wir als nicht groß im Vergleich zu der Länge l der Kurve AB voraus. Einen Körper, dessen Form auf diese Weise beschrieben werden kann, nennt man einen Balken. Die Linie AB wird als Achse des Balkens, die Figur CD als sein Querschnitt bezeichnet.

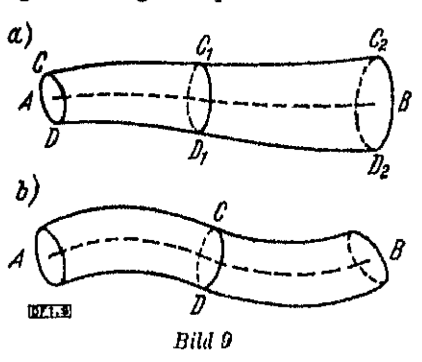


Bild 9

Wenn der Querschnitt CD bei der Bewegung längs der Achse sich nicht ändert und sich nicht um die Tangente zur Achse des Balkens (wie um eine momentane Drehachse) dreht, so haben wir einen Balken mit konstantem Querschnitt. Im Sonderfall, wenn die Achse des Balkens eine Gerade ist, erhält man einen geraden Balken mit konstantem Querschnitt. Ein derartiger Balken ist ein Körper von prismatischer Form. Wenn die Achse des Balkens eine ebene Kurve ist, so erhalten wir einen ebengekrümmten Balken mit konstantem Querschnitt (Bild 9, b). Wenn die Abmessungen des Querschnitts während seiner Bewegung längs der Achse sich ändern, so erhalten wir entsprechend einen geraden oder ebengekrümmten Balken mit veränderlichem Querschnitt.

In der Festigkeitslehre und in der Elastizitätstheorie ist es üblich, als *Stab* dünne und lange Balken zu bezeichnen, bei denen die Abmessungen des Querschnittes im Vergleich zur Länge der Achse[1]) nur sehr gering sind[2]).

Indem wir das Gesagte zusammenfassen, vermerken wir, daß zu den geometrischen Grundelementen des Balkens seine Achse und sein Querschnitt gehören. Mit diesen Begriffen sind alle weiter zur Darlegung kommenden Methoden zur Bestimmung des Balkens aufs engste verbunden. Wenn es uns daher

---

[1]) Die Abgrenzung der Begriffe eines Balkens und eines Stabes ist bisher nicht genau festgelegt.

[2]) *Anm. d. deutschen Redaktion:* In Deutschland ist *Stab* die allgemeine Bezeichnung für einen prismatischen Körper, dessen Querschnittsabmessungen im Vergleich zu seiner Längsachse gering sind. *Balken* dagegen wird ein Stab in horizontaler oder ähnlicher Lage (meist mit viereckiger Querschnittsbegrenzung) genannt. Balken aus I-Querschnitten heißen *Träger*. Stäbe in lotrechter oder ähnlicher Lage werden in Deutschland üblicherweise als *Stiele* oder *Stützen* bezeichnet.

Schwierigkeiten bereitet, die Achse im gegebenen Körper zu finden (aber folglich auch einen solchen Schnitt, den man als Querschnitt bezeichnen könnte), so ist es geboten, bei einem derartigen Körper die Methoden zur Berechnung eines Balkens mit großer Vorsicht anzuwenden.

Die Arbeit der einzelnen Balken oder Stäbe im Bauwerk kann unter sehr verwickelten Bedingungen verlaufen. Indem man jedoch die Methoden der Statik benutzt, können wir auch ein kompliziertes System von auf den Balken wirkenden Kräften in zwei oder mehrere einfachere Systeme zerlegen. Daher kann, wie wir das später sehen werden, jeder komplizierte Fall der Arbeit eines Balkens in drei einfachere zerlegt werden:

1. Zug oder Druck des Balkens,
2. Biegung des Balkens,
3. Verdrehung des Balkens.

Wir lernen zunächst die einfacheren Fälle kennen, die als grundlegende anzusehen sind. Danach wird es schon leichter sein, zu den komplizierteren Fällen überzugehen, die die Bezeichnung der zusammengesetzten Beanspruchung tragen.

B. Hinsichtlich der Art der Wirkung der äußeren Kräfte, die am Balken oder Stab angreifen, muß man ihre statische und dynamische Wirkung unterscheiden. Wenn die äußeren Kräfte (z. B. Belastungen) am Balken so langsam angebracht werden, daß die durch sie hervorgerufenen Beschleunigungen der Balkenteilchen sehr gering sind und vernachlässigt werden können, und wenn man weiter voraussetzt, daß der Balken dabei in keinem Zeitpunkt aus dem Gleichgewichtszustand kam, so sagt man, daß die Belastung statisch aufgebracht wurde; ihre weitere Wirkung wird dann ebenfalls eine *statische* sein.

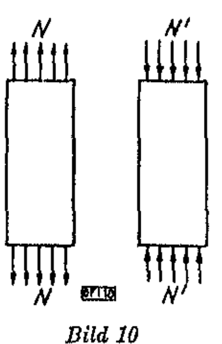
Wenn jedoch die Belastung auf den Balken derart schnell aufgebracht wurde, daß seine Teilchen bemerkbare Beschleunigungen erhielten, so wird der Balken nach dem Aufbringen der Belastung in Bewegung geraten. In diesem Falle sagt man, daß die Belastung dynamisch aufgebracht wurde, und die Wirkung wird eine *dynamische* sein. Wenn der Balken aus elastischem Werkstoff gefertigt ist, so kann man sagen, daß seine Bewegung einen periodischen Charakter haben wird, d. h. der Balken wird elastische Schwingungen ausführen, ähnlich denen, die eine Spiralfeder beim bekannten Versuch aus der Physik unter der Einwirkung eines an ihr plötzlich angehängten Gewichtes ausführt. Diese Schwingungen klingen infolge von Widerständen verschiedener Art unvermeidlich ab, und die Wirkung der Belastung wird schließlich nach einer gewissen Zeit eine statische. Sehr oft jedoch muß man sich mit der dynamischen Wirkung von Belastungen befassen, die im Laufe der Zeit nicht verschwindet. Dies wird z. B. im Falle einer arbeitenden Maschine eintreten, die auf einem Balken montiert ist; eine solche Maschine wird fast unvermeidlich Stöße auf den Balken übertragen, indem sie eine dynamische Belastung schafft, die genügend schnell ihre Größe und bisweilen auch ihre Richtung ändert.

2 Zug und Druck des geraden Balkens

2.01 Allgemeine Begriffe — Gleichmäßiger Zug (Druck)

A. Wenn die Kräfte an den Enden eines geraden Balkens (Bild 10) angreifen und parallel der Balkenachse gerichtet sind, so erhalten wir den Fall des *Zuges* (oder *Druckes*) eines Balkens. Man sagt auch, daß der Balken in diesem Falle auf *Zug* (oder *Druck*) arbeitet.

Nehmen wir an, daß die Kräfte, die am oberen Ende wirken, sich mit den am unteren Ende angreifenden Kräften im Gleichgewicht befinden. Die Resultierende der den Balken ausziehenden (oder zusammendrückenden) Kräftegruppen N oder N' heißt kurz die Zugkraft (Druckkraft).



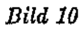


Bild 10

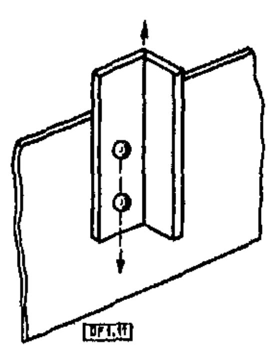


Bild 11

Es sind zwei Fälle zu unterscheiden: 1. Wenn die Resultierende der auf den Balken wirkenden Zugkräfte durch den Schwerpunkt des Balkenquerschnitts geht, und 2. wenn sie außerhalb des Querschnittspunktes liegt. In dem ersten dieser Fälle erweist sich das Studium der Erscheinung als sehr einfach — dies ist der Fall des *einfachen* oder *gleichmäßigen* Zuges (oder Druckes), mit dem wir uns gleich beschäftigen werden. Das Studium der Erscheinung im zweiten Falle wird wesentlich komplizierter — dies ist der Fall des *ungleichmäßigen* und *außermittigen* Zuges (oder Druckes), bei dem der einfache Zug (oder Druck) von einer Biegung des Balkens begleitet wird. Diesen Fall werden wir viel später behandeln. Auf Bild 11 ist ein Winkel dargestellt, der mit zwei Nieten befestigt ist und auf außermittigen Zug arbeitet.

B. Indem wir zu dem Fall eines einfachen Zuges übergehen, ist es erforderlich, noch einen Vorbehalt zu machen. Zugkräfte kann man nämlich auf verschiedene Art an den Enden eines Balkens anbringen. Bild 12 zeigt einige dieser Arten. In bezug auf alle diese Arten kann man sagen, daß in der Nähe der Befestigungen, d. h. an den Stellen des Stabes, an denen die Zugkräfte angebracht sind, die Be-

anspruchung des Stabes unter sehr verwickelten Bedingungen verläuft, die dem einfachen Zug gar nicht ähnlich sind. Wie aber sowohl die theoretischen Überlegungen als auch die Versuche zeigen, kann man damit rechnen, daß sich der Einfluß der Befestigungen in den Querschnitten schon nicht mehr auswirkt, wenn wir Querschnitte $m-n$ betrachten werden, die von den Angriffsstellen der Zugkräfte N etwas entfernt liegen. Die Normalspannungen σ verteilen sich über den Querschnitt ungefähr gleichmäßig[1]) (Prinzip von Saint Venant), während Schubspannungen in diesem Falle nicht vorhanden sind.

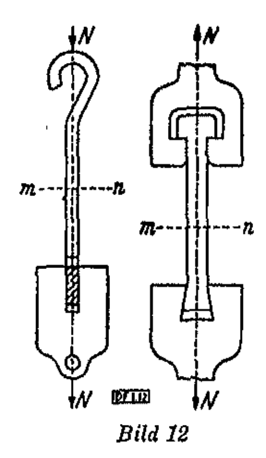
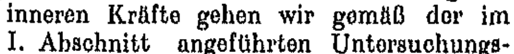


Bild 12

Von der geometrischen Seite wird der einfache Zug durch den Umstand charakterisiert, daß der vor der Ausübung des Zuges ebene Querschnitt $m-n$ des Stabes (Bild 12) nach der Ausziehung keinerlei Verzerrungen erleidet und eben bleibt, indem er sich in Richtung des Zuges vorwärts bewegt. Diese Eigenschaften sind charakteristisch für den einfachen Zug und ermöglichen es, die statische und geometrische Seite der Erscheinung leicht zu untersuchen.

C. Nehmen wir irgendeinen Balken (Bild 13) und unterwerfen wir ihn der Wirkung von Zugkräften N, die zentral längs der Achse angreifen. Infolge der Wirkung der äußeren Kräfte N wird sich der Balken verformen. Wenn er nicht zerstört wird, so werden seine Teilchen in den Gleichgewichtszustand kommen, und wir erhalten einen *Spannungszustand* des Balkens. Zur Ermittlung der



inneren Kräfte gehen wir gemäß der im I. Abschnitt angeführten Untersuchungsmethode vor, und zwar:



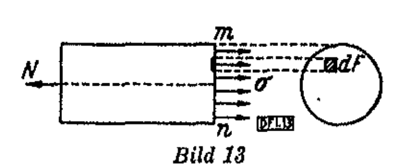


Bild 13

1. Wir führen einen Schnitt $m-n$ durch den zu betrachtenden Balken;
2. wir entfernen einen der Teile, z. B. den rechten Teil;
3. wir ersetzen die Wirkung des entfernten Teiles durch Kräfte;
4. wir stellen Gleichgewichtsgleichungen für den verbliebenen Teil auf.

Von allen Gleichgewichtsgleichungen bleibt in unserer Aufgabe nur eine übrig, die wie folgt lautet:

$$N = \int_F \sigma\, dF = \sigma \int_F dF = \sigma F$$

oder endgültig

$$\sigma = \frac{N}{F}, \tag{2.1}$$

worin N die wirkende Kraft, σ die über den Querschnitt gleichmäßig verteilte Normalspannung und F die Fläche des Querschnittes bedeuten.

[1]) Das heißt, die Spannungsfläche von Navier kann als Ebene angenommen werden, die parallel zum Querschnitt verläuft (siehe 1.4, Absatz C, Seite 12).

Die übrigen Gleichungen wandeln sich in Identitäten um. Die erhaltene Formel (2.1) ist eine Ableitung, die zu der statischen Seite der Aufgabe gehört. Es is leicht zu erkennen, daß sie sich nur deshalb in sehr einfacher Form ergeben hat weil in unserer Aufgabe die Spannungen σ in allen Punkten des Querschnitt gleich groß sind.

D. Bei einem gleichmäßigen Zug des Stabes zeigen sich sehr einfache geometrische Eigenschaften der Formänderung. Die Haupterscheinung besteht darin, daß sich der ebene Querschnitt $m-n$ unter der Einwirkung der Kräfte N (Bild 14) in eine gewisse neue Lage $m'-n'$ bewegt, wobei er eben bleibt, daß sich die ursprüngliche Länge des Balkens von l bis l_1 vergrößert und daß der Balken eine absolute Verlängerung erhält:

$$\Delta l = l_1 - l,$$

Bild 14

die beim Zug positiv sein wird. Im folgenden ist es zweckmäßig, den Begriff der Längsdehnung einzuführen:

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}. \tag{2.2}$$

Beim Druck wird die absolute und relative Verlängerung negativ.

Der Versuch zeigt, daß sich *die Querabmessungen eines aus beliebigem Material angefertigten Balkens beim Zug verringern, beim Druck dagegen vergrößern.* Angenommen (Bild 14), die anfängliche Querabmessung des Balkens war b, die aber nach der Verformung gleich b_1 wurde, dann erhalten wir in der Querrichtung die absolute Queränderung

$$\Delta b = -(b - b_1)$$

und die Querdehnung

$$\varepsilon' = \frac{\Delta b}{b} = -\frac{b - b_1}{b}. \tag{2.3}$$

Wir sehen bei der Betrachtung der physikalischen Seite der Aufgabe, daß die Querdehnung (2.3) eng mit der Längsdehnung (2.2) verbunden ist.

E. Die physikalische Seite der Erscheinungen, die sich beim Zug oder Druck des Balkens ergeben, wird mit Hilfe des Versuchs erforscht, der weiter unten ausführlich beschrieben wird. Zunächst machen wir uns lediglich das Hauptergebnis dieses Versuches zunutze, das im folgenden besteht:

1. Solange die Zug- (oder Druck-)Spannung

$$\sigma = \frac{N}{F}$$

eine bestimmte, für jeden Werkstoff festliegende Grenze nicht erreicht hat, bleibt der Stab elastisch, d. h. er kehrt nach der Entfernung der ihn ausziehenden Kräfte in seine ursprüngliche Form[1]) zurück. Die Spannung σ, die dieser Grenze entspricht, heißt die *Elastizitätsgrenze* beim Zug (oder Druck).

2. Etwa bis zur Elastizitätsgrenze befinden sich die Dehnung ε und die Normalspannung σ in einem konstanten und für das vorliegende Material vollkommen bestimmten Verhältnis:

$$\frac{\sigma}{\varepsilon} = E;$$

mit anderen Worten, die Spannung ist proportional der Dehnung:

$$\sigma = E\,\varepsilon. \tag{2.4}$$

Diese Ableitung, ausgedrückt durch die Gleichung (2.4), nennt man das Hookesche Gesetz. Seine Bedeutung kennen wir schon aus den im I. Kapitel niedergelegten Überlegungen. Der Proportionalitätskoeffizient E in der Gleichung (2.4) heißt der *Elastizitätsmodul* beim Zug (oder Druck) oder der Modul der Längselastizität.

Die Dimensionen der Werte σ und ε sind uns schon (Kapitel 1.4 und 1.5 oder die Formel (2.1) dieses Kapitel) bekannt. Damit wird die Dimension des Moduls zu

$$[E] = \frac{\text{Kraft}}{\text{Länge}^2},$$

d. h. seine Dimension stimmt mit der Dimension der Spannung überein. Man muß im Auge behalten, daß das Hookesche Gesetz eine physikalische Abhängigkeit ist und in mathematischer Form den Zusammenhang zwischen Spannungen und Formänderungen der verschiedensten Werkstoffe widerspiegeln soll.

Es ist durchaus nicht die Schwierigkeit zu verkennen, mit ein und demselben Gesetz die Eigenschaften aller in der Natur anzutreffenden Werkstoffe zu beschreiben. Am besten folgt der Stahl dem Hookeschen Gesetz, jedoch kann man auch für ihn bei genauen Messungen Abweichungen von diesem Gesetz feststellen. Gußeisen, Holz und Beton weisen schon leicht bemerkbare Abweichungen vom Hookeschen Gesetz auf. In bezug auf diese Materialien kann man diese Abhängigkeit nur bis zu einem gewissen Grade bedingt anwenden. Für Zwecke der Ingenieur-Berechnung vernachlässigt man gewöhnlich solche geringfügige Abweichungen und benutzt das Hookesche Gesetz bei der Mehrzahl der in der Praxis vorkommenden Werkstoffe.

2.02 Grundformeln für Zug

A. Die Formeln (2.1), (2.2) und (2.4)

$$\sigma = \frac{N}{F}, \tag{2.1}$$

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}, \tag{2.2}$$

$$\sigma = E\,\varepsilon \tag{2.4}$$

[1]) *Anm. d. deutschen Redaktion:* Nach internationaler Festsetzung (Brüssel 1906) nennt man die Elastizitätsgrenze den Zustand, der nur bleibende Dehnungen (Δl_1) von 0,001 % bis 0,03 % der ursprünglichen Länge hinterläßt.

legen alle drei Seiten der Aufgabe über den Zug und den Druck eines Balkens dar und ermöglichen es, eine Reihe von Ableitungen durchzuführen, die bei der Lösung von praktischen Aufgaben erforderlich sind.

Die wichtigste Ableitung wird benötigt, wenn wir jetzt die absolute Verlängerung eines Balkens errechnen wollen, dessen Abmessungen l und F, dessen Werkstoff, aus dem er gefertigt ist (d. h. E bekannt ist), und die auf ihn wirkende Druck- oder Zugkraft N bekannt sind. Die Berechnung beginnen wir, indem wir von der Formel (2.2)

$$\Delta l = \varepsilon l$$

ausgehen und in diese den Wert ε aus der Formel (2.4) einsetzen; dann wird

$$\Delta l = \frac{\sigma}{E} l.$$

Setzen wir jetzt noch den Wert σ aus der Formel (2.1) ein, so erhalten wir für

$$\Delta l = \frac{Nl}{EF}. \tag{2.5}$$

Diese Formel faßt alle drei Seiten der Aufgabe zusammen und drückt das Hookesche Gesetz in entwickelterer Form aus:

Die Verlängerung eines Balkens beim Zug (Druck) ist proportional der Zug-(Druck-)Kraft und der Länge des Balkens und umgekehrt proportional dem Elastizitätsmodul und der Querschnittsfläche des Balkens.

Der Wert EF im Nenner der Formel (2.5) wird die *Steifigkeit* des Balkens *beim Zug (Druck)* genannt.

Bei der Ableitung der Grundformeln der Festigkeitslehre muß man stets die Dimensionen ihrer rechten und linken Seite überprüfen. In der Formel (2.5) ist die Dimension der linken Seite eine Länge. Es wird dem Leser empfohlen, zu untersuchen, ob die rechte Seite von gleicher Dimension ist und welche Dimension die Steifigkeit EF hat.

B. Die Ableitung (2.5) berücksichtigt die physikalische Seite der Erscheinung des Zugs (Drucks) und ermöglicht es daher, verschiedenartige Aufgaben physikalischen Charakters über den Zug und Druck von Balken zu lösen. Diese Aufgaben sind jedoch oft statisch unbestimmt, d. h. sie können nicht allein auf Grund der Untersuchung der statischen Seite gelöst werden.

Führen wir als Beispiel folgende Aufgabe an. Zwischen zwei Haken A und B (Bild 15) soll ein Stahlstab eingesetzt werden. Es erwies sich, daß er nicht von der erforderlichen Länge l, sondern um einen geringen Wert λ kürzer angefertigt worden war. Beim Einsetzen auf die Haken mußte man ihn um die erwähnte Länge ausziehen. Welche Zugkraft mußte hierzu am Stab angebracht werden? Die Formel (2.1) gibt uns hierauf keine Antwort, da in ihr zunächst N und σ unbekannt sind.

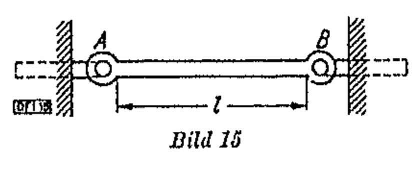


Bild 15

Wenn wir diese Aufgabe mit der im Kapitel 1.3 durchgeführten aufmerksam vergleichen, finden wir eine große Ähnlichkeit. Dies gibt aber auch die Möglichkeit, einen Plan für die weitere Lösung aufzuzeichnen. Offensichtlich ist es erforderlich, in erster Linie die geometrischen Eigenschaften der Formänderung des Balkens bei seiner Ausziehung (die geometrische Seite) zu untersuchen und auf Grund des Versuchs einen Zusammenhang zwischen der Zugkraft und der Verlängerung des Balkens (die physikalische Seite) zu erhalten.

Die statische Seite der Aufgabe kommt darin zum Ausdruck, daß der Balken unter der Einwirkung von zwei gleichen und entgegengesetzten Kräften N, die an den Enden angreifen, sich im Gleichgewicht befindet, und daß in jedem Querschnitt die durch die Formel (2.1) ausgedrückte Normalspannung σ wirkt.

Die geometrische Seite zeigt, daß die Verlängerung Δl infolge der Wirkung der Zugkräfte gleich λ sein muß:

$$\Delta l = \lambda. \tag{2.6}$$

Diese Gleichung ist auch die zusätzliche Bedingung, die zu den Gleichgewichtsbedingungen der Statik hinzugefügt werden muß, um die Aufgabe bis zum Schluß lösen zu können. In die Gleichung (2.6) ist noch an Stelle von Δl sein durch die Zugkraft N ausgedrückter Wert (2.5) einzusetzen, in dem von uns bereits die physikalische Seite der Aufgabe berücksichtigt wurde:

$$\frac{Nl}{EF} = \lambda. \tag{2.7}$$

Aus (2.7) finden wir leicht N:

$$N = \frac{EF\lambda}{l}. \tag{2.8}$$

Dieses Ergebnis ist die Synthese aller drei Seiten der Aufgabe. Es klärt den physikalischen Charakter der Kraft N auf, der, wie wir aus der Formel (2.8) sehen, von der Stablänge l, von seiner Querschnittsfläche F und vom Elastizitätsmodul E des Stabmaterials abhängt. Es ist wichtig, noch eine Eigenschaft der Kraft N zu vermerken, die in unserer Aufgabe als statisch unbestimmte Größe erschien: Diese Kraft wird um so größer sein, je größer die Querschnittsfläche des Stabes und je größer der Elastizitätsmodul des Werkstoffs ist. Je größer wir demnach den Stabquerschnitt in der gegebenen Aufgabe wählen, eine um so größere Kraft muß an diesem wirken, und umgekehrt. Dies ist eine ganz allgemeine Eigenschaft der statisch unbestimmten Aufgaben, die in der Praxis große Bedeutung haben.

Aus der Zugkraft N in der Formel (2.8) finden wir leicht die Normalspannung

$$\sigma = \frac{N}{F} = \frac{E\lambda}{l},$$

die nun nicht mehr von der Querschnittsfläche des Balkens abhängt, sondern mit der Vergrößerung des Elastizitätsmoduls des Werkstoffs wächst.

Untersuchen wir noch eine weitere einfache Aufgabe, die sehr viel Ähnlichkeit mit der oben gelösten hat.

Ein Stahlstab von der Länge l ist bei einer gewissen Temperatur mit seinen Enden in zwei Wände eingespannt worden (Bild 16). Hierauf fiel seine Temperatur um $t°$. Werden sich in ihm Spannungen zeigen, und welcher Art werden sie sein?

Zur Ermittlung der Spannung wollen wir wieder das allgemeine Verfahren anwenden, d. h. 1. wir zerschneiden den Stab, z. B. am linken Ende, 2. wir entfernen den linken Teil, 3. wir ersetzen die Wirkung dieses Teils auf den rechten Teil durch die vorläufig noch unbekannte Kraft X, und 4. wir stellen die Gleichgewichtsbedingungen des verbliebenen rechten Teils auf. Dieser befindet sich unter der Einwirkung der Kraft X und der Reaktion der rechten Wand, die der Kraft gleich, aber entgegengesetzt gerichtet ist, im Gleichgewicht. Es ist ersichtlich, daß die Gleichgewichtsbedingung der rechten Seite nicht genügende Angaben zur Lösung der Aufgabe liefert; daher müssen 5. die Bedingungen der Formänderung berücksichtigt werden. Vorher aber bemerken wir, daß beim Zerschneiden des Balkens vor dem Absinken der Temperatur die Enden an der Schnittstelle nach der Abkühlung um den der Verkürzung der Stablänge gleichen Wert λ auseinandergehen würden. Demnach wird

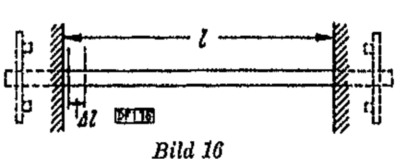


Bild 16

$$\lambda = l\alpha t,$$

worin α der lineare Ausdehnungskoeffizient des Stabmaterials ist.

Da in Wirklichkeit ein Auseinandergehen der Enden nicht eintritt, so muß am rechten Teil eine Kraft X von solcher Größe angesetzt werden, daß das Auseinandergehen verhindert wird. Wenn Δl die Verlängerung des Stabes unter der Einwirkung der Kraft ist, so wird die geometrische Bedingung der Formänderung

$$\Delta l = \lambda$$

oder

$$\Delta l = l\alpha t \tag{2.9}$$

lauten. Es ist noch die Ableitung (2.5) aus der Aufgabe über den Zug (die physikalische Seite) zu verwerten, und wir erhalten dann aus (2.9) leicht die gesuchte Kraft und alsdann die Spannungen im Stab:

$$X = EF\alpha t, \quad \sigma = E\alpha t.$$

Es wird dem Leser nützlich sein, die erhaltenen Ergebnisse zu analysieren und zu klären, welche Umstände der Aufgabe die Größe der Kraft X nicht beeinflussen und welche auf die Größe der Spannung σ keinen Einfluß ausüben; auch wäre zu klären, wie sich die Vergrößerung der Steifigkeit des Stabes EF auf die Größe der Kraft auswirkt.

Wenn ein Stabende nicht eingespannt wäre und die Möglichkeit hätte, sich frei zu bewegen, so würden wir bemerken, daß im Stab keine Kraft X entsteht und daß er irgendeine Nutzlast ohne zusätzliche Temperaturspannungen aufnehmen kann.

Das Erscheinen der Zusatzkraft X erfordert aber eine Vergrößerung der Querschnittsfläche des Balkens, und man ist daher in der Praxis bemüht, die Balken-

auflager so zu konstruieren, daß die Balkenenden Bewegungen ausführen können, die das Auftreten von Kräften infolge von Temperaturänderungen verringern oder überhaupt vollkommen ausschließen.

2.03 Maschinen und Geräte für die Prüfung von Werkstoffen

A. Zur Durchführung von Zug- und Druckversuchen gibt es eine ganze Reihe von Maschinen, die es ermöglichen, ein Experiment auszuführen und genügend genau die auf den Versuchskörper wirkende Kraft zu messen. Die Formänderung wird entweder mit Hilfe besonderer Einrichtungen an der Maschine selbst oder mittels spezieller Meßgeräte gemessen.

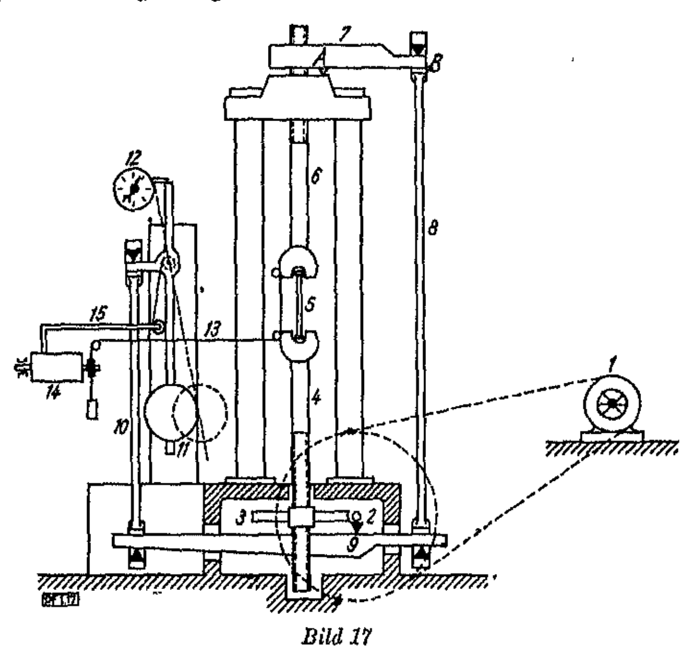


Bild 17

Bei den neuesten Typen von Versuchsmaschinen kann die auf den Versuchsörper wirkende Kraft bis auf einige tausend Tonnen gebracht werden. Mit diesen aschinen untersucht man auf Zug und Druck nicht einzelne Proben von genger Größe, sondern ganze Bauwerksteile in natürlicher Größe. In der Laborariumspraxis benutzt man für die alltägliche Arbeit Maschinen geringerer istung; der Prüfung werden nur einzelne Proben verschiedener Werkstoffe terzogen. Beim Zugversuch werden gewöhnlich Maschinen mechanischer oder draulischer Wirkung angewendet. Am häufigsten kommen Maschinen zur Anndung, bei denen eine Kraft von nicht mehr als 50 t auf den Versuchskörper ertragen wird. Druckversuche werden mittels hydraulischer Pressen mit einer raft von 30 bis 60, höchstens aber bis 500 t durchgeführt. Nachstehend wird e kurze Beschreibung der Konstruktion solcher Maschinen gebracht, wie sie den sowjetischen Laboratorien am häufigsten benutzt werden.

Die *Hebelmaschine* zur Durchführung von Zugversuchen (mit einem Pendelgegengewicht) kann eine Zerreißkraft bis 50 t[1]) entwickeln. Die Maschine (Bild 17) wird vom Elektromotor (*1*) angetrieben, der mit Hilfe einer Schnecke (*2*) und eines Triebrades (*3*) den Stab (*4*) nach unten zieht, der oben mit einem Halter zur Befestigung des Versuchsstabes (*5*) endet. Der obere Stab (*6*) ist durch ein Schraubengewinde mit dem Hebel (*7*) verbunden, der sich im Punkt A auf den Maschinenrahmen stützt und im Punkt B gelenkig mit der Zugstange (*8*) verbunden ist. Die Zugstange ist ihrerseits gelenkig mit dem Hebel (*9*) verbunden, der sich unter der Maschine befindet. Der Hebel (*9*) hat wiederum eine gelenkige Verbindung mit der Zugstange (*10*), die mittels eines Gelenks am Pendel (*11*) befestigt ist.

Bei der Bewegung der Schraube (*4*) nach unten und Ausübung eines Zuges auf den Versuchsstab senkt sich der Stab (*6*), wobei er das Gelenksystem (*7—8—9—10*) in Bewegung setzt; das Pendel (*11*) schlägt hierbei um einen gewissen Winkel (Bild 17) aus und bringt das ganze System ins Gleichgewicht[2]).

In dem Bild 18 ist das Hebelsystem der Maschine schematisch dargestellt. Nehmen wir an, daß auf den Versuchsstab die Kraft P_1 übertragen wurde. Diese Kraft wird weiter auf den Hebel (*7*) übertragen, der auf die Stange einen Zug von

$$P_2 = P_1 \frac{a_1}{a_2} \qquad \text{(a)}$$

ausübt. Die Kraft P_2 wird auf den unteren Hebel übertragen. Infolgedessen wird die Stange (*10*) durch die Kraft

$$P_3 = P_1 \frac{a_1 b_1}{a_2 b_2} \qquad \text{(b)}$$

auf Zug beansprucht.

Bild 18

Das Moment der Kraft P_3 bezogen auf den Gelenkpunkt S muß sich mit dem vom Gewicht Q des ausgeschlagenen Pendels herrührenden Moment ausgleichen, d. h.

$$Q x = P_3 z,$$

worin x und z die Hebelarme veränderlicher Länge sind, deren Größe vom Neigungswinkel α des Pendels abhängt. Setzt man den oben gefundenen Wert P_3 in die erhaltene Gleichung ein, dann wird

$$Q x = P_1 \frac{a_1 b_1}{a_2 b_2} z, \qquad \text{(c)}$$

[1]) Aus der Zahl der Maschinen dieser Bauart kann man auf die in der Sowjetunion entwickelte Maschine von Tschuloschnikow hinweisen sowie auf die Maschinen nach dem System von Mohr-Federhaff.

[2]) Die Hebel *7* und *9* der Maschine schlagen ebenfalls während des Versuchs aus, aber der Ausschlag ist nicht groß und deshalb auf dem Bild nicht dargestellt.

woraus sich die auf den Versuchsstab entfallende Zugkraft

$$P_1 = Q\,\frac{a_2\,b_2}{a_1\,b_1}\cdot\frac{x}{z} \tag{d}$$

ermitteln läßt.

Die Maschine ist so konstruiert, daß die Entfernung zwischen dem Gelenkpunkt S und dem Stäbchen (*12*), gegen das sich das obere Ende des Pendels stützt, stets konstant bleibt. Der Stab (*12*) kann frei in Lagern gleiten, wobei er stets horizontal bleibt. Bei einer Verschiebung des Stabes dreht dieser ein mit einem Zeiger verbundenes Zahnrad, wodurch das Ablesen der Größe der Kraft auf der Skala ermöglicht wird.

Wie aus dem Bild 18 ersichtlich, können x und z durch die Größe des Hebelarmes c_1 und die Länge des Pendels f wie folgt ausgedrückt werden:

$$z = c_1 \cos\alpha, \qquad x = f \sin\alpha, \qquad \frac{x}{z} = \frac{f}{c_1}\,\mathrm{tg}\,\alpha.$$

Aus dem Bild 18 kann man auch leicht feststellen, daß

$$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{x'}{d}$$

ist. Setzt man den gefundenen Wert für $\mathrm{tg}\,\alpha$ in die Formel (d) ein, so erhalten wir abschließend:

$$P_1 = Q\,\frac{a_2\,b_2}{a_1\,b_1}\cdot\frac{f}{c_1}\cdot\frac{x'}{d}.$$

Diese Gleichung gibt die Abhängigkeit zwischen der Kraft P_1 und der Veränderlichen x' in der Form einer einfachen Proportion an. Auf Grund dieser Abhängigkeit wird die Skalenverteilung der Maschine ausgeführt, auf der die Zugkraft P_1 angezeigt wird.

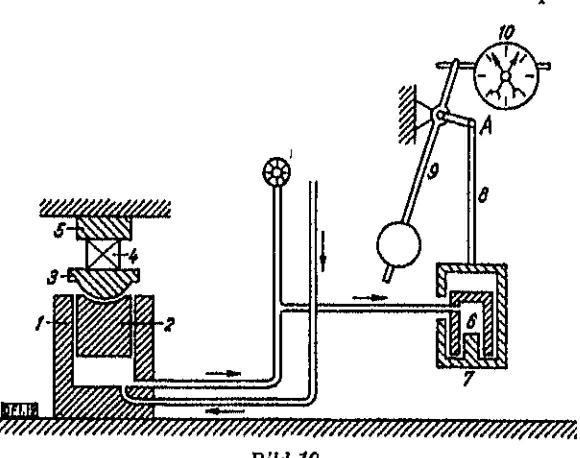


Bild 19

Gehen wir zu der Beschreibung einer *hydraulischen Presse* über, die für die Druckprüfung von Versuchsstäben mit einer höchsten Druckkraft von 60 t zur Anwendung kommt. In dem Bild 19 ist das Schema der Presse dargestellt. Beim Betrieb der Presse wird durch ein Rohr in den Zylinder (*1*) im unteren Teil der Maschine Öl gedrückt, das den Kolben (*2*) hebt. Auf den Kolben ist ein Zwischenstück (*3*) aufgesetzt, das sich mit seiner unteren sphärischen Fläche auf eine entsprechende Vertiefung des Kolbens stützt. Eine derartige Konstruktion ist

zwecks Zentrierung der zu übertragenden Kraft erforderlich. Das obere Zwischenstück (*5*) ist unbeweglich. Zwischen den Zwischenstücken befindet sich der Versuchskörper (*4*), der auf Druck geprüft werden soll. Der Zylinder (*1*) ist durch ein Rohr mit dem Zylinder (*6*) verbunden, in dem sich ein Kolben (*7*) befindet, der mit der Zugstange (*8*) verbunden ist. Der Druck überträgt sich vom Zylinder (*1*) in den Zylinder (*6*), wodurch der Kolben (*7*) und der mit ihm verbundene Zugstab (*8*) nach unten bewegt wird. Der Zugstab (*8*) ist mit Hilfe des Scharniers (*A*) mit dem Pendel (*9*) verbunden, der beim Ausschlag, ebenso wie bei der Hebelmaschine, den Druck auf den Kolben (*7*) ausgleicht. Der Ausschlag des Pendels wird auf einen Zeiger übertragen, der die Kraft auf einer geeichten Skala anzeigt.

B. Die Verlängerung (der Stäbe) beim Zug und die Verkürzung beim Druck mißt man mit besonderen Geräten, von denen die bekanntesten das *Spiegelgerät* und das *Tensometer* sind.

Das Schema des Spiegelgeräts zeigt Bild 20. Das Gerät besteht aus der Metallplatte *AB*, die am Prüfkörper in zwei Punkten gelagert ist. Das eine Lager stellt eine Schneide *AC* dar, die unbeweglich mit der Platte verbunden ist, und das andere ein frei drehbares rhombisches Prisma *BD*. Das Prisma sitzt auf

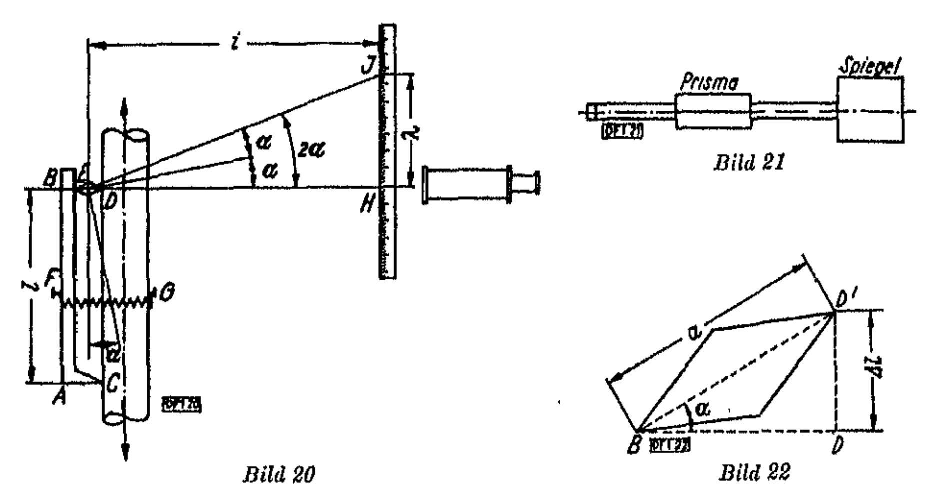


Bild 20

Bild 21

Bild 22

einer langen Achse, an der ein kleiner Spiegel (Bild 21) befestigt ist. Das ganze Gerät wird mit Hilfe einer Federklammer *FG* dicht an den dem Zug zu unterwerfenden Versuchskörper herangezogen. In einer gewissen Entfernung *i* vom Spiegel befindet sich ein Lineal mit Teilstrichen und ein Fernrohr. Das Fernrohr und das Lineal werden so aufgestellt, daß im Fernrohr mit Hilfe des Spiegels die Skala des Lineals zu sehen ist.

Beim Zug des Versuchskörpers dreht sich das Prisma *BD*, und mit ihm dreht sich um den gleichen Winkel auch der Spiegel *E*. Wenn vor der Ausführung des Versuchs im Fernrohr der Teilstrich *H* der Skala zu sehen war, so wird sich nach der Ausübung des Zuges der Teilstrich *J* der Skala im Spiegel widerspiegeln

was vom Beobachter verzeichnet wird. Kennt man die Differenz der Ablesungen λ (Bild 20), so ist es nicht schwierig, den Winkel α zu errechnen, um den sich das Prisma bei der Längsdehnung des Versuchskörpers gedreht hat. Der von den Strahlen EJ und EH eingeschlossene Winkel ist, wie aus der Optik bekannt, gleich 2α und daher

$$\lambda = L \operatorname{tg} 2\alpha .$$

Da der Drehwinkel sehr klein ist, kann man $\operatorname{tg} 2\alpha = 2 \operatorname{tg} \alpha$ setzen, und folglich ist

$$\lambda = 2L \operatorname{tg} \alpha ; \qquad \operatorname{tg} \alpha = \frac{\lambda}{2L} .$$

Die Spitze des Prismas bewegt sich infolge der Zugdehnung des Versuchskörpers (Bild 22) aus dem Punkt D in den Punkt D'. Die Entfernung zwischen D und D' ist gleich der absoluten Verlängerung Δl des Versuchskörpers zwischen den Punkten C und D.

Wie aus Bild 22 ersichtlich, ist

$$\Delta l = a \sin \alpha \approx a \operatorname{tg} \alpha ,$$

worin a die Länge der größeren Diagonale des Prismaquerschnittes ist. Setzt man den oben gefundenen Wert $\operatorname{tg} \alpha$ ein, so erhalten wir

$$\Delta l = \lambda \frac{a}{2L} .$$

Das Gerät wird in der Regel so konstruiert und aufgestellt, daß das Verhältnis $\frac{2L}{a}$, der sogenannte *Vergrößerungskoeffizient*, gleich 500 wird. Hieraus folgt, daß die absolute Verlängerung des Versuchskörperabschnittes

$$\Delta l = \frac{\lambda}{500}$$

wird.

Bild 23

Die Dehnung erhalten wir, wenn wir die absolute Verlängerung Δl durch den Wert der Basis des Geräts, d. h. durch die Strecke zwischen den Punkten C und D teilen:

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l} = \frac{\lambda}{500} l .$$

Das Spiegelgerät wird gewöhnlich in Laboratorien angewendet. Zur Ermittlung von Formänderungen sowohl im Laboratorium als auch im Gelände kann ein anderes, besser tragbares Gerät, das Tensometer, zur Anwendung kommen. Das Schema eines Hebeltensometers ist in Bild 23 gegeben. Im Punkt A ist das Gerät mit der unbeweglichen Spitze mit dem Versuchskörper in Berührung, während im Punkt B ein bewegliches Prisma vorgesehen ist, das mit dem Stab BC verbunden ist, der zusammen mit dem Prisma pendeln kann. Der Stab BC ist mittels eines Gelenkzwischenstabes CD am Zeiger EF befestigt, der auf die je-

weilige Ablesungsstelle der Skala hinweist. Die Basis des Geräts, d. h. die Strecke zwischen der beweglichen und unbeweglichen Schneide, ist bei diesem Gerät gleich 2 cm. Daher bezieht sich die absolute Verlängerung, die vom Gerät verzeichnet wird, auf einen 2 cm langen Abschnitt des Prüfkörpers (Bild 24). Die Hebelarme der Stäbe *BC* und *EF* sind so gewählt, daß das Gerät eine 1000- bis 1200fache Vergrößerung der Formänderung liefert. Die wirkliche absolute Formänderung ist daher gleich der Ablesung Δ auf der Skala geteilt durch die Vergrößerung des Geräts:

$$\Delta l = \frac{\Delta}{K}.$$

Im Bild 25 sind übliche Formen von Versuchsstäben dargestellt, die bei der Zugprüfung von Stahl zur Anwendung kommen.

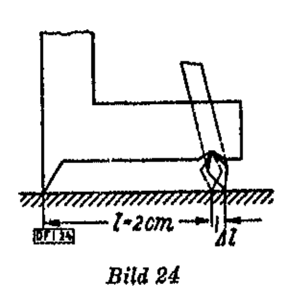


Bild 24

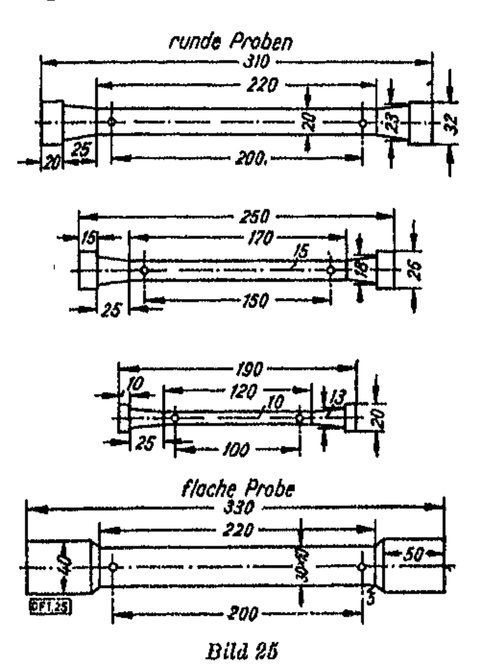


Bild 25

2.04 Zugdiagramm

A. Die Prüfmaschinen sind mit einer besonderen Einrichtung versehen, die den Verlauf des Versuchs in Form eines Diagramms (einer graphischen Darstellung) auf einem Papier (Bild 17) aufschreibt, das auf eine Zylindertrommel (*14*) gewickelt ist. Mit Hilfe der Schnur (*13*), die sich bei der Verlängerung des Versuchsstabes spannt, wird die Zylindertrommel in Bewegung gesetzt; die Drehbewegung der Zylindertrommel hängt demnach von der Formänderung ab. Der das Diagramm aufzeichnende Schreibstift wird mit Hilfe eines Stabes (*15*) mit dem Pendel (*11*) der Maschine verbunden und verschiebt sich längs der Mantellinie der Zylindertrommel beim Ausschlagen des Pendels, d. h. bei der Vergrößerung oder Verringerung der Zugkraft. Hierbei wird auf dem Papier, das auf die Trommel aufgespannt ist, eine Kurve aufgezeichnet, die die Abhängigkeit zwischen der absoluten Verlängerung Δl und der Zugkraft P (Bild 26) zur Darstellung bringt.

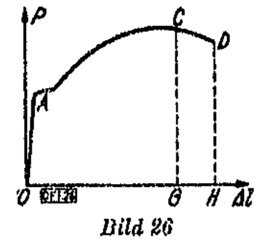


Bild 26

Da zwischen der absoluten Verlängerung Δl und der Dehnung ε eine direkte Proportionalität besteht:

$$\Delta l = \varepsilon l,$$

und da weiter die Kraft P direkt proportional der Spannung

$$P = \sigma F$$

ist, so wird sich das für Δl und P gezeichnete Diagramm von den Diagrammen für ε und σ nur durch die Maßstäbe der Abszissen und Ordinaten (Bild 27) unterscheiden. Das Diagramm (ε, σ) ist jedoch geeigneter und spiegelt besser die physikalischen Eigenschaften des gegebenen Werkstoffs wider, da es nicht von den geometrischen Abmessungen des Prüfkörpers abhängig ist.

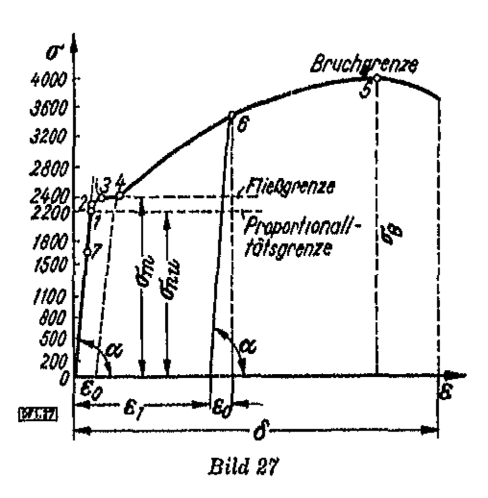


Bild 27

In dem Bild 27 ist ein Beispiel eines Diagramms angeführt, wobei es so aufgebaut ist, daß seine Abszissen und Ordinaten entsprechend die Werte ε und σ darstellen, die sich in den verschiedenen Momenten des Versuchs ergaben. Ein solches Diagramm gibt uns offenbar die nötige Abhängigkeit zwischen der Spannung σ und der Formänderung ε, d. h. es löst die physikalische Seite der Aufgabe über den Zug.

Bei Maschinen ohne Schreibeinrichtungen muß man während des Versuchs in gewissen Zeitabständen eine Ablesung der Größe der Zugkraft P vornehmen und die entsprechenden Verlängerungen Δl des Versuchskörpers (am Tensometer oder Spiegelgerät) messen und diese in eine Tabelle eintragen. Parallel wird eine zweite Tabelle aufgestellt, in der auf Grund der erhaltenen Werte P und Δl die Spannung σ und die Dehnung ε berechnet werden. Eine ähnliche Berechnung des Zugdiagramms wird auch in den Fällen angewendet, bei denen genauere Ergebnisse des Versuchs erforderlich sind.

Zur Illustration ähnlicher Berechnungen sind in den auf Seite 35 befindlichen beiden Tafeln (Tafel 1 und 2) die Zugprüfungsergebnisse eines runden Versuchsstabes aus Stahl von 220 mm Länge bei einem Durchmesser von 1 cm angegeben. Bei der Betrachtung der zweiten Spalte der Tafel 2 sieht man, daß sich die größte Spannung bei etwa 4000 kg/cm² ergab. Auf Grund von Versuchsunterlagen sind die in den Bildern 26 und 27 dargestellten Zugdiagramme aufgebaut worden.

In Tafel 3 sind die Werte der Bruchgrenze und der Dehnungen für einige Metalle angegeben.

Tafel 1

Zugprüfungsergebnisse eines runden Versuchsstabes aus Stahl mit einem Durchmesser von 1 cm

Lfd. Nr der Ablesung	Belastung P in kg	Absolute Verlängerung Δl in mm	Lfd. Nr. der Ablesung	Belastung P in kg	Absolute Verlängerung Δl in mm
1	157	0,020	9	2200	0,409
2	393	0,050	10	2360	1,474
3	628	0,085	11	2510	4,048
4	864	0,117	12	2670	8,008
5	1180	0,165	13	2830	11,890
6	1410	0,188	14	2980	17,250
7	1730	0,233	15	3150	46,200
8	1960	0,289	16	2980	—

Tafel 2

Spannungen und Dehnungen eines runden Versuchsstabes aus Stahl

Lfd. Nr. der Ablesung	σ Spannung in kg/cm²	ε relative Dehnung	$\frac{\sigma}{\varepsilon} = E$ in kg/cm²	Lfd. Nr. der Ablesung	σ Spannung in kg/cm²	ε relative Dehnung	$\frac{\sigma}{\varepsilon} = E$ in kg/cm²
1	200	0,000091	2190000	9	2800	0,00186	1500000
2	500	0,000250	2000000	10	3000	0,0067	447000
3	800	0,000385	2070000	11	3200	0,0183	175000
4	1100	0,00053	2070000	12	3400	0,0363	93500
5	1500	0,00075	2000000	13	3600	0,0540	66500
6	1800	0,00085	2120000	14	3800	0,0785	48300
7	2200	0,00106	2070000	15	4000	0,2100	18100
8	2500	0,00131	1910000				

Tafel 3

Bruchgrenze σ_B beim Zug und die Dehnung δ beim Zerreißen einiger Metalle

Werkstoff	σ_B in kg/cm²	δ in %
Stahl für Bolzen und Niete	3400—5500	22—25
Flußeisen (Stahl)	3000—4800	8—16
Walzstahl	3800—6200	18—22
Nickelstahl	5500—6500	22—27
Chromnickelstahl	6500—7000	16—18
Sonderstahl	11000—16000	8—10
Gußeisen	1200—2500	—
Rotkupfer	2000—2300	38
Bronze	2500	15
Phosphorbronze	2000—4200	6—15
Aluminium	1000—3500	10—12

B. Wir wollen hier folgende charakteristischen Punkte des Prüfungsdiagramms eines Versuchskörpers aus weichem Stahl hervorheben. Aus dem Bild 27 ist zu ersehen, daß das Diagramm als gerade Linie *0—1* erscheint, solange die Spannung eine bestimmte Größe nicht erreicht hat (in unserem Falle etwa 2200 kg/cm²), d. h. die Spannung ist in diesem Falle direkt proportional der Dehnung:

$$\sigma = E\varepsilon.$$

In diesem Bereich besteht daher das Hookesche Gesetz zu Recht. Die Spannung, die dem Punkt 1 entspricht, trägt die Bezeichnung *Proportionalitätsgrenze.* Aus dem Bild ist ersichtlich, daß der Elastizitätsmodul $E = \frac{\sigma}{\varepsilon}$ proportional dem Tangens des Neigungswinkels des geraden Diagrammteils ist, demnach $E = \frac{m}{n} \operatorname{tg} \alpha$, worin mit m der Maßstab der Ordinaten und mit n der Maßstab der Abszissen der graphischen Darstellung bezeichnet ist.

Über den Punkt *1* hinaus ergibt sich eine Krümmung der Linie des Diagramms, und die Spannungen sind nicht mehr proportional den Dehnungen. Ein wenig oberhalb des Punktes *1* befindet sich ein anderer interessanter Punkt *2*. Die Spannung, die diesem Punkte entspricht, heißt die *Elastizitätsgrenze.* Über die Elastizitätsgrenze hinaus verliert der Werkstoff seine elastischen Eigenschaften, und er wird im Falle der Entlastung *bleibende Verformungen* aufweisen. Die Punkte *1* und *2* liegen sehr nahe beieinander, und in der Praxis rechnet man, daß die Elastizitäts- und Proportionalitätsgrenze zusammenfallen, obgleich dies nicht ganz genau zutrifft.

Es ist zu bemerken, daß die Ermittlung der Proportionalitäts- und Elastizitätsgrenze bedeutende Schwierigkeiten bereitet, da sich bei ausreichend genauen Messungen herausstellt, daß die Punkte auf dem Abschnitt *0—1* des Diagramms nicht genau auf einer Geraden liegen, was auf die unvermeidliche Unhomogenität des Werkstoffs und die mit der Maschine selbst verbundenen Ungenauigkeiten der Messung zurückzuführen ist. Bei Entlastung des Versuchsstabes erhalten wir zum Teil aus diesen Gründen eine Formänderung, die nicht gleich Null ist. Daher stellt man auf Grund des Versuchs lediglich die technische Proportionalitätsgrenze und die technische Elastizitätsgrenze fest. So ist z. B. die technische Elastizitätsgrenze als erreicht anzusehen, wenn die bleibende Dehnung einen im voraus festgelegten Wert erreicht (z. B. 0,001%; 0,003%; 0,005% usw.).

Der nächste charakteristische Punkt des Diagramms ist der Punkt *3*; die diesem Punkt entsprechende Spannung heißt *Fließgrenze.* Vor diesem Punkt ist das Diagramm scharf gekrümmt, das darauf in einen der Abszissenachse parallelen Abschnitt übergeht. Der Werkstoff scheint während dieser Zeit zu fließen. Ohne Vergrößerung der Spannung in der Probe stellen sich große Dehnungen ein, die um das Mehrfache größer sind als diejenigen vor der Fließgrenze. Wenn der Prüfstab flach und genügend gut geschliffen oder poliert ist, so werden sich auf seiner Oberfläche beim Auftreten des Fließens die soge-



Bild 28

nannten Lüdersschen[1]) Linien zeigen (Bild 28). Diese Linien sind zur Linie der Kraftwirkung unter einem Winkel geneigt, der angenähert 45° beträgt, und stellen Bewegungsspuren der einzelnen Werkstoffteilchen dar, die durch große Formänderungen des Prüfstabes hervorgerufen wurden. Der Fließabschnitt reicht bis zu der Spannung, die dem Punkt *4* des Diagramms entspricht.

Das Fließen des Stahls wird beim langsamen Belasten des Versuchsstabes beobachtet. Beim schnellen Zunehmen der Belastung nähern sich die Punkte *3* und *4* einander und fallen oft in einen Punkt zusammen, so daß der Fließabschnitt in diesem Falle verschwindet. Bisweilen wird vor dem Fließabschnitt eine gewisse Erhöhung der Spannung (in Bild 27 ist dies durch die punktierte Linie angegeben) beobachtet, die schnell abfällt und alsdann bis zum Ende der Fließerscheinung nahezu konstant bleibt. Im weiteren Verlauf verfestigt sich der Werkstoff, d. h. er erlangt wieder die Fähigkeit, dem Zug Widerstand zu leisten, so daß man die Spannung erhöhen muß, um eine weitere Vergrößerung der Verlängerung zu erhalten. Zwischen der Spannung und der Dehnung besteht jedoch keine Proportionalität mehr, und das Diagramm hat das Aussehen einer Kurve. Die Spannung, die dem höchsten Punkt *5* entspricht, trägt die Bezeichnung *Bruchgrenze*, und die Belastung, die diese Spannung hervorruft, heißt die *Bruchlast.*

Bei der Durchführung des Versuchs zeigt sich, daß sich bei der Erreichung der Bruchgrenze im Prüfstab eine Einschnürung bildet, d. h. eine starke Verengung des Querschnitts an irgendeiner Stelle des Versuchsstabes (Bild 29). Bei einem verengten Querschnitt ist auch für das Zerreißen eine kleinere Kraft erforderlich, darum beginnt der Schreibstift der Maschine sich zu senken, die Kraft nimmt ab, und recht schnell tritt die Zerstörung des Versuchsstabes ein (Punkt *D* in Bild 26).

Wenn die Spannung im Prüfstab während des Versuchs bis auf einen gewissen Punkt *6* (Bild 27) gebracht und alsdann eine allmähliche Entlastung vorgenommen wird, so bewegt sich der das Diagramm aufzeichnende Schreibstift der Maschine abwärts, jedoch wird er sich nicht auf dem früheren Wege bewegen, sondern eine gewisse gerade Linie aufzeichnen, die parallel der Linie *0—1* verläuft. Diese Gerade wird auf der Abszissenachse eine Strecke ε_1 abschneiden, die die Größe der bleibenden Formänderung darstellt. Wir fällen jetzt vom Punkt *6* aus eine Senkrechte auf die Abszissenachse und vermerken die Strecke ε_0. Diese stellt die elastische Formänderung dar, die bei der Entlastung des Versuchsstabes verschwindet. Entlastet man den Versuchsstab, indem man seine Spannung nicht bis zur Elastizitätsgrenze erhöht, sondern z. B. den Versuch im Punkt *7* des Diagramms abbricht, so wird sich der Schreibstift auf der Geraden *7—0* in den Punkt *0* zurückbewegen. Dies bedeutet, daß eine bleibende Formänderung nicht vorhanden ist.

Bild 29

Die weiter im Abschnitt 3 eingefügte Tafel 8 zeigt die Werte des Elastizitätsmoduls *E* für die wichtigsten Baustoffe.

---

[1]) Dies ist die festgelegte Terminologie, jedoch sind diese Linien nach den Unterlagen, die im „Вестнике инженеров и техников Nr. 3, 1948" (Mitteilungsblatt der Ingenieure und Techniker) enthalten sind, erstmalig von dem russischen Metallurgen Tschernow erwähnt worden.

C. Indem wir bei der Konstruktion des Diagramms die Formel

$$\sigma = \frac{P}{F}$$

für die Errechnung der Spannungen benutzt und die Fläche F als unveränderlich und gleich dem ursprünglichen Querschnitt vor dem Zugversuch angesehen haben, sind wir zu dem Ergebnis gekommen, daß das für σ und ε (Bild 27) konstruierte Diagramm sich in bezug auf sein Aussehen durch nichts von dem Diagramm für P und Δl (Bild 26) unterscheidet. Die hinter dem Punkt *5*, der der Bruchgrenze des Werkstoffs entspricht, nach der gleichen Formel berechnete Spannung wird sich verringern, und das Zerreißen wird bei einer Spannung eintreten, die kleiner als die Spannung der Bruchgrenze ist. Für die Zwecke der Praxis erweist sich ein derartiges Diagramm als ausreichend. Im Grunde genommen ist es jedoch nur bedingt richtig und gibt nicht genau den wahren Wert der Spannung des Werkstoffs an.

Bei Zugbeanspruchung des Versuchsstabes zeigt sich nicht nur eine Vergrößerung seiner Länge, sondern auch eine Querzusammenziehung (Querkontraktion), d. h. die Querschnittsfläche des Versuchsstabes verringert sich dauernd, und daher erhalten wir bei Teilung der Kraft durch die ursprüngliche vor dem Versuch gemessene Querschnittsfläche nicht den Wert der wahren Spannung. Bis zur Erreichung der Fließgrenze ist die Änderung der Querschnittsfläche nicht groß und spielt bei der Berechnung der Spannung keine wesentliche Rolle. Im weiteren Verlauf, wenn das Material fließt, tritt jedoch schon eine bedeutendere Verringerung der Fläche auf, die sich gleichmäßig auf die ganze Länge des Versuchsstabes erstreckt. Bei noch weiterem Verlauf, bei der Erreichung der Bruchgrenze, zeigt sich außerdem eine örtliche Verengung — eine Einschnürung, wobei die Querschnittsfläche an dieser Stelle bis zum Bruch stark abnimmt.

Die Abszissen unseres Diagramms, die die Dehnung ε darstellen, charakterisieren ebenfalls nach dem Erreichen der Bruchgrenze des Werkstoffs nicht genügend genau die Dehnungsfähigkeit des Werkstoffs, da nach der Bildung des Halses die Dehnung auch von den Querabmessungen des Versuchsstabes abhängen wird. Das wahre Zugdiagramm, das für die wahren Spannungen $\sigma = \frac{P}{F_z}$ konstruiert ist, worin F_z die veränderliche Querschnittsfläche bezeichnet, zeigt, daß auch hinter dem die Bruchgrenze charakterisierenden Punkt die Spannung während der ganzen Zeit ununterbrochen, bis zum Zerreißen, zunimmt.

2.05 Poissonsche Zahl

A. Beim Studium der Formänderung infolge eines Zuges (Kapitel 2.01 E) erwähnten wir schon, daß die Verlängerung eines auf Zug beanspruchten Balkens von seiner Verkürzung in Richtung senkrecht zur Linie der Kraftwirkung begleitet wird. Im Bereich der Elastizität ändert sich der Wert der relativen Querverkürzung proportional der normalen Zugspannung und macht immer einen gewissen Teil der relativen Verlängerung aus. Wir nehmen an, daß

$$\varepsilon' = \mu \varepsilon \tag{2.10}$$

ist, worin μ einen konstanten physikalischen Koeffizienten darstellt, der die Eigenschaften des Werkstoffs charakterisiert, aus dem der auf Zug beanspruchte Balken gefertigt ist. Erstmalig wurde dieser Koeffizient von dem französischen Mathematiker Poisson eingeführt, und daher nennt man den Koeffizienten μ die Poissonsche Zahl. Im Laboratorium durchgeführte Versuche haben gezeigt, daß der Koeffizient μ von 0 bis 0,5 schwankt. Der erste Wert wurde für Kork gefunden, der zweite für Paraffin. Die Werte der Poissonschen Zahl für verschiedene Werkstoffe sind in Tafel 8 angegeben.

Besonders wäre zu bemerken, daß die Poissonsche Zahl μ neben dem Elastizitätsmodul E die physikalischen Eigenschaften der Werkstoffe charakterisiert. Wir werden im folgenden zeigen, *daß die Kenntnis der beiden Zahlen E und μ für die Feststellung aller elastischen Eigenschaften eines isotropen Werkstoffs völlig ausreicht.*

Bei Berechnungen in der Praxis wird der Einfluß der Querzusammenziehung auf die Größe der Querschnittsfläche gezogener Stäbe (folglich auch der Querausdehnung gedrückter Stäbe) nicht berücksichtigt. Versuchen wir zu klären, wie groß der Einfluß der Querzusammenziehung auf die Verringerung der Querschnittsfläche eines Stabes ist. Wenn wir der Einfachheit wegen annehmen, daß die Fläche eines quadratischen Stabquerschnittes vor der Formänderung die Abmessungen $F = 1:1 = 1$ hatte, so wird sich nach der Formänderung jede Seite unseres Quadrats um den Wert $\varepsilon' = -\mu\varepsilon$ ändern, und folglich wird die Querschnittsfläche:

$$F_1 = (1 - \mu\varepsilon)^2 = 1 - 2\mu\varepsilon + \mu^2\varepsilon^2.$$

Vernachlässigt man den letzten Summand, der ein Kleinstwert zweiter Ordnung ist, so erhalten wir für $F_1 = 1 - 2\mu\varepsilon$; die Verringerung der Fläche wird dann:

$$F - F_1 = 1 - (1 - 2\mu\varepsilon) = 2\mu\varepsilon \quad \text{oder} \quad 2\mu\varepsilon \cdot 100 \text{ (in \%)}.$$

Wie klein diese Verringerung des Querschnitts ist, sieht man daraus, daß sie z. B. für das gezogene Element eines eisernen Dachstuhlankers bei einer Beanspruchung von $\sigma = 1600$ kg/cm² und einem $E = 2 \cdot 10^6$ kg/cm² nur 0,045% ausmacht.

Die eben betrachtete Verringerung der Querschnittsabmessungen eines gezogenen Balkens, der *im Bereich der Elastizität* arbeitet, darf man nicht mit Erscheinungen verwechseln, die in den Metallen außerhalb der Elastizitätsgrenze vor sich gehen. Bei Belastung eines Versuchsstabes mit Kräften, die den Werkstoff oberhalb der Proportionalitätsgrenze (Punkt *2* — siehe das Zugdiagramm in Bild 27) beanspruchen und sich den Bruchkräften nähern, zeigt sich am Versuchsstab, wie wir dies schon wissen (2.4), eine örtliche Verengung des Querschnitts (Einschnürung), die allmählich mit der Vergrößerung der Kräfte zunimmt und den Versuchsstab eben an dieser Stelle zur Zerstörung bringt. Der Grad der Verringerung des Querschnitts des Versuchsstabes an der Stelle der Einschnürung charakterisiert die *Plastizität* (aber nicht die Elastizität) des Werkstoffs.

2.06 Energie der Formänderung beim Zug

A. Beschäftigen wir uns jetzt mit der Ermittlung der Arbeit, die die Kraft beim Zug leistet. Stellen wir uns einen Stab vor, der oben befestigt ist und durch eine Kraft auf Zug beansprucht wird, deren Größe von Null ab allmählich zu-

nimmt (Bild 30). Zu einem gewissen Zeitpunkt wird die Kraft gleich P und die Verlängerung gleich Δl sein. Die Kraft P soll jetzt die Zunahme dP erfahren. Unter dem Einfluß der Kraftzunahme wird der Stab eine zusätzliche Verlängerung (Bild 31) um einen gewissen Wert $d(\Delta l)$ erhalten, und die vom Wert P auf $P + dP$ anwachsende Zugkraft wird folgende Arbeit leisten:

$$dA = \left(P + \frac{1}{2}\,dP\right) d(\Delta l) = P\,d(\Delta l) + \frac{1}{2}\,dP\,d(\Delta l).$$

Das letzte Glied der erhaltenen Formel stellt einen unendlich kleinen Wert höherer Ordnung dar und kann daher vernachlässigt werden. Dann wird

$$dA = P\,d(\Delta l). \tag{2.11}$$

Die Gesamtarbeit vom Beginn des Zuges bis zu einem gewissen Moment, in dem der Stab die Verlängerung $\Delta l = \Delta l_1$ erhält, ist

$$A = \int_0^{\Delta l_1} P\,d(\Delta l). \tag{2.12}$$

Bild 30

Bild 31

Bild 32

Wenn hierbei die Proportionalitätsgrenze noch nicht überschritten ist, d. h. das Hookesche Gesetz noch Gültigkeit hat, dann ist

$$\Delta l = \frac{Pl}{EF}, \quad d(\Delta l) = \frac{l}{EF}\,dP.$$

Setzen wir den gefundenen Wert $d(\Delta l)$ in die Formel für die Arbeit ein, indem wir den oberen Integrationswert Δl durch den ihm entsprechenden Wert der Kraft P_1 ersetzen, und berücksichtigen wir, daß

$$\Delta l_1 = \frac{P_1 l}{EF}$$

ist, so erhalten wir:

$$A = \int_0^{\frac{P_1 l}{EF}} \frac{l}{EF}\,P\,dP = \frac{P_1^2 l}{2EF} = \frac{1}{2}\,P_1\,\Delta l_1. \tag{2.13}$$

Diese Arbeit wird graphisch durch die Fläche des Dreiecks OAB im Zugdiagramm (Bild 32) dargestellt:

$$\text{Fläche } \Delta OAB = \frac{1}{2}\,P_1\,\Delta l_1.$$

Wenn der Körper vollkommen elastisch ist, so führt die von der Kraft P geleistete Arbeit zu einer Ansammlung potentieller (elastischer) Energie des verformten Stabes. Bei der Entlastung verschwindet die Formänderung, wobei die angesammelte potentielle Energie restlos verbraucht wird. Die thermischen und elektrischen Erscheinungen, die die Formänderung begleiten, vernachlässigen wir hierbei, da sie im Bereich der Elastizität keine große Bedeutung haben.

Aus der Formel (2.12) kann man schließen, daß die Gesamtarbeit, die für das Zerreißen aufgebraucht wird, gleich der Fläche $OACDH$ (Bild 26) des ganzen Zugdiagramms ist. Die Größe dieser Fläche kann ausgedrückt werden durch

$$A_{\text{Bruch}} = \eta \overline{CG} \cdot \overline{OH} = \eta P_{\max} \Delta l_{\max},$$

worin η der sogenannte *Völligkeitsgrad* ist. Der Wert η ist für einen jeden gegebenen Werkstoff ausreichend konstant und kann auf Grund von Versuchen ermittelt werden.

B. Wir haben den Fall der statischen Belastung eines Stabes untersucht, bei dem die Kraft, von Null angefangen, stetig und außerdem so langsam zunimmt, daß man die Beschleunigungen vernachlässigen kann, d. h. man kann annehmen, daß sich in jedem Moment die am Stab angreifenden Kräfte gegenseitig ausgleichen (z. B. so, wie dies an der im Kapitel 2.03 beschriebenen Prüfmaschine vor sich geht). Wenn das Gewicht P plötzlich (ohne Anfangsgeschwindigkeit) angebracht wird, so wird sich die den Stab auf Zug beanspruchende Kraft X mit der Zeit ändern. Am Gewicht (Bild 33 und 34) wirken zwei nicht im Gleichgewicht befindliche Kräfte: sein Eigengewicht P und die Kraft X. Unter der Einwirkung dieser Kräfte wird das Gewicht Schwingungen ausführen, die infolge des Einflusses verschiedener Widerstände mit der Zeit abklingen.

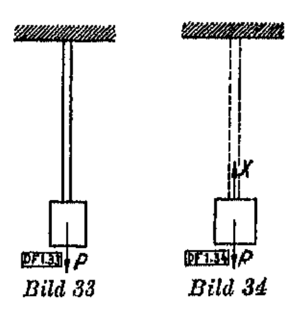


Bild 33 *Bild 34*

Die Gleichung der Bewegung des Gewichts schreiben wir in der Form des Gesetzes der kinetischen Energie

$$A = \frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2},$$

worin A die Arbeit der Kräfte P und X vom anfänglichen Moment des Anbringens des Gewichtes ($v_0 = 0$) ab bis zu einer gewählten Lage des Systems darstellt. Wenn man als solche eine Lage wählt, bei welcher der Stab die größte Verlängerung aufwies und bei der sich das Gewicht in der untersten Lage befand, so ist offensichtlich $v = 0$ und folglich $A = 0$. Die Arbeit A setzt sich zusammen aus der Arbeit des Gewichtes $P \Delta l$ und der Arbeit der Kraft $X_{\max}$, die auf Grund von (2.13) mit

$$-\frac{X_{\max} \Delta l}{2}$$

berechnet wird. Das Minuszeichen weist darauf hin, daß die Arbeit der Kraft X negativ ist, d. h. die Bewegungsrichtung ist der Kraftrichtung entgegengesetzt. Daher ist

$$P \Delta l - X_{\max} \frac{\Delta l}{2} = 0$$

und hieraus

$$X_{\max} = 2P.$$

Demnach ist die maximale Zugkraft und folglich auch die Normalspannung beim plötzlichen Anbringen der Kraft P zweimal so groß als bei der statischen Belastung.

2.07 Plastische und spröde Werkstoffe

Das im Bild 35 dargestellte Diagramm ist charakteristisch für weichen Stahl, der die Eigenschaft besitzt, große Verlängerungen zu liefern. Werkstoffe, die bei Belastung große Formänderungen aufweisen, nennt man plastische. Als Maß der Plastizität ist der Wert der relativen bleibenden Dehnung bei Bruch anzusehen.

$$\delta = \frac{\Delta l_0}{l} \cdot 100 \text{ (in \%)}. \qquad (2.14)$$

Zur Berechnung von δ mißt man die Länge l des Prüfstabes vor dem Versuch und die bleibende Zunahme der Stablänge Δl_0 nach dem Bruch.

Als zweite Zahl, die den Plastizitätsgrad charakterisiert, erscheint die relative Einschnürung der Querschnittsfläche beim Bruch

$$\psi = \frac{F_0 - F_1}{F_0} \cdot 100 \text{ (in \%)}, \qquad (2.15)$$

worin mit F_0 die ursprüngliche Querschnittsfläche und mit F_1 die Fläche der Einschnürung beim Bruch bezeichnet ist. Zu den plastischen Werkstoffen gehören weicher Stahl, Kupfer, Bronze, Blei u. a.

Das Diagramm einiger plastischer Werkstoffe, wie z. B. der Bronze (Bild 35), hat keinen scharf ausgeprägten Fließabsatz. In solchen Fällen nimmt man als Fließgrenze die Spannung an, bei der die bleibende plastische Verlängerung 0,2% der ursprünglichen Länge ausmacht.

Spröde Werkstoffe zerreißen gewöhnlich plötzlich ohne Bildung einer Einschnürung (Bild 36) bereits bei geringen Verlängerungen. Wenn auch

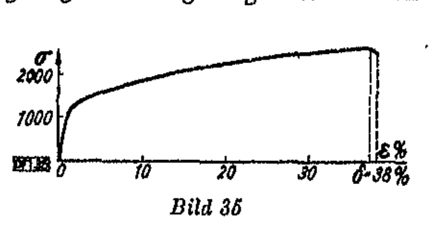
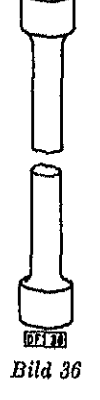


Bild 35


Bild 36

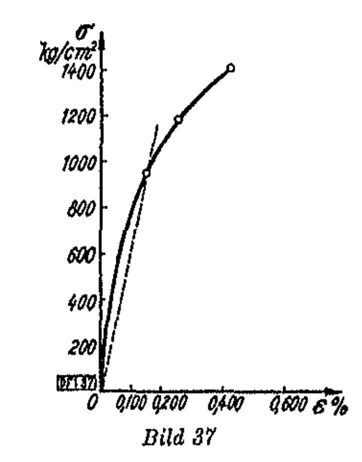


Bild 37

weicher Stahl beim Bruch sich um 20 bis 25% dehnt, so zerreißen die typisch spröden Werkstoffe, wie z. B. Gußeisen, indem sie sich höchstens um 0,5 bis 0,6% verlängern. Das Zugdiagramm des Gußeisens ist in Bild 37 wiedergegeben. Das Diagramm der spröden Werkstoffe hat keinen klar ausgeprägten geraden Abschnitt, so daß man folgern könnte, daß in diesem Falle die Spannung nicht proportional der Dehnung ist. Bei den geringen Spannungen jedoch, bei denen der Werkstoff in Bauwerken ausgenutzt wird, stellt das Diagramm eine Linie dar,

die nur eine geringe Krümmung aufweist. Man hält es daher bei praktischen Berechnungen für erlaubt, auch in diesem Falle das Hookesche Gesetz anzuwenden, indem man die Kurve (Bild 37) als geradlinig ansieht und in diesem Bereich den Elastizitätsmodul als konstant annimmt. Zu den spröden Werkstoffen gehören Gußeisen, Steine, Beton, Glas. Spröde Werkstoffe leisten gewöhnlich dem Druck viel besser Widerstand als dem Zug.

Einer Stoßbelastung setzen spröde Werkstoffe nur geringen Widerstand entgegen. Der Stoß überträgt auf das Bauwerk eine große Menge kinetischer Energie, die letzteres aufnehmen und in potentielle Energie umwandeln muß. Die spröden Werkstoffe erfordern infolge der kleinen Formänderungen beim Zerreißen einen geringen Aufwand an Energie, das Zugdiagramm ist für sie kürzer, und die Fläche desselben, welche die Formänderungsarbeit charakterisiert, ist bedeutend geringer als bei den plastischen Werkstoffen. Man muß daher beim Entwurf von Konstruktionen, die Stoßbelastungen ausgesetzt werden, für diese Bauteile plastische Werkstoffe wählen, die dem Stoß bedeutend besser Widerstand leisten.

In der heutigen Zeit beginnt man, die Plastizität der Werkstoffe auch für einen anderen Zweck auszunutzen, nämlich für die künstliche und günstigere Neuverteilung der Spannungen in statisch unbestimmten Konstruktionen. Wie wir im Abschnitt 1 gesehen haben, so werden wir es auch bei den statisch unbestimmten Aufgaben dieses Abschnitts sehen, daß man die Kräfte nicht ermitteln kann, wenn man nicht die Formänderungen kennt. Anders ausgedrückt bedeutet dies, daß hier die Kräfte von den Formänderungen abhängen. Wenn sich in einem solchen Bauwerk infolge einer Überbelastung plastische Formänderungen ergeben, so ändern diese Formänderungen selbst die Spannungen ein wenig.

2.08 Druck. Pressung

A. Wir haben bisher die Druckerscheinung nicht beleuchtet. Es zeigt sich, daß bei der Mehrzahl der homogenen Metalle die Druckerscheinung im wesentlichen so verläuft wie die Zugerscheinung, d. h. hier tritt im ersten Stadium das Hookesche Gesetz

$$\sigma = E\varepsilon$$

in Erscheinung, das bis zu einer gewissen Grenze zu Recht besteht. Bei den weichen Werkstoffen zeigt sich auch die Fließgrenze (Bild 38).

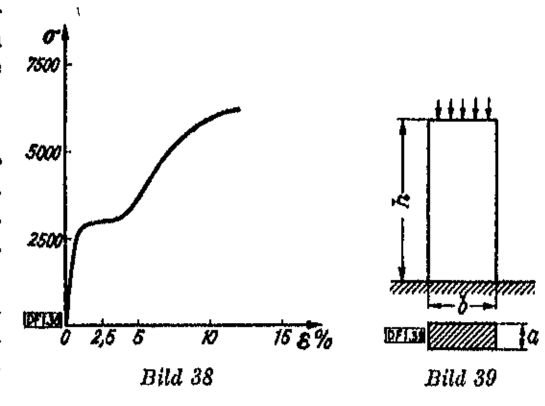


Bild 38 *Bild 39*

Es wäre zu bemerken, daß man die Erscheinung des einfachen (gleichmäßigen) Drucks nur bei relativ kurzen Versuchsstäben erreichen kann. Im Falle langer Stäbe kann gleichzeitig mit der Druckerscheinung eine andere Erscheinung auftreten, die sogenannte Knickung, die man leicht beobachten kann, wenn man versucht, ein dünnes Lineal in der Längsrichtung zusammenzudrücken. Diese Erscheinung werden wir später untersuchen. Um ihr zu entgehen und einen reinen

Druck zu bekommen, verwendet man Versuchsstäbe in Form eines Würfels oder eines niedrigen Zylinders.

Es stellt sich heraus, daß man die Erscheinung des reinen Druckes in einem Versuchsstab erzielen kann, dessen Länge den fünffachen Wert seiner kleineren Querabmessung nicht übersteigt, d. h. bei $h \leqq 5a$ (Bild 39). Da andererseits sich beim Druck eine Vergrößerung der Querabmessungen des Körpers ergibt, so übt bei einer sehr kleinen Höhe des Versuchsstabes die Reibung, die sich an den Angriffsflächen der Belastung entwickelt (an der Druckfläche der Presse), einen großen Einfluß auf das Versuchsergebnis aus. Wegen all der Schwierigkeiten, die sich bei der Prüfung von Werkstoffen auf Druck ergeben, prüft man die Werkstoffe, die gut auf Zug arbeiten (Eisen, Stahl), auf Zug und urteilt auf Grund des oben Gesagten an Hand dieser Prüfung über die Eigenschaften des Werkstoffs bei seiner Arbeit auf Druck. Für spröde Werkstoffe (Beton, Ziegelsteine, Natursteine, Gußeisen) ist gerade die Prüfung auf Druck charakteristisch, da sie dem Zug nur geringen Widerstand leisten. Für diese Werkstoffe sind bestimmte Normalabmessungen der Versuchskörper festgelegt worden, die in besonderen Pressen durch Druck bis zur Zerstörung belastet werden (siehe Tafel 4).

Tafel 4

Normalabmessungen der Versuchskörper für Druckprüfungen[1])

Bezeichnung der Werkstoffe	Abmessungen
Gußeisen in Würfeln	$2 \times 2 \times 2 \div 3 \times 3 \times 3$ cm³
„ zylindr.	$h = d = 2$ cm
Natursteine	$7 \times 7 \times 7$ cm³
Zementsteine (Mörtel)	$7 \times 7 \times 7$ cm³
Beton	$20 \times 20 \times 20 \div 30 \times 30 \times 30$ cm³
Ziegelstein	12×12 cm (in zwei Hälften zersägter Ziegelstein)

Der Charakter der Zerstörung spröder und plastischer Werkstoffe unter Druckbeanspruchung ist verschieden. Ein plastischer Werkstoff, z. B. weicher Stahl, drückt sich, solange der Versuch nicht unterbrochen wird, allmählich unter der Presse auseinander, wobei der Versuchskörper hierbei in die Form einer sehr dünnen Platte gepreßt wird. Bei spröden Werkstoffen tritt die Zerstörung, wie beim Zug, plötzlich und bei sehr kleinen Formänderungen ein. Der Versuchskörper spaltet sich beim Zerdrücken in Schichten und zerfällt in eine Anzahl einzelner Stücke. In Bild 40 ist die Zerstörungsform eines gußeisernen Versuchskörpers durch Druck dargestellt.

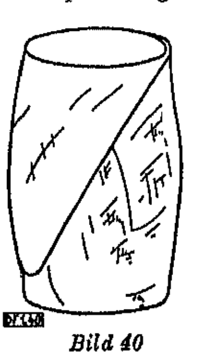


Bild 40

In Tafel 5 sind die Werte der Bruchgrenze beim Druck für einige Werkstoffe angegeben.

B. Bei der Druckübertragung von einem Körper auf den anderen tritt an der Berührungsfläche eine Druckspannung

[1]) *Anm. d. deutschen Redaktion:* Die Abmessungen der Tafel 4 entsprechen auch den deutschen amtlichen Vorschriften.

Tafel 5

Bruchgrenze σ_B bei Druck für einige Werkstoffe

Bezeichnung der Werkstoffe	σ_B in kg/cm²	Bezeichnung der Werkstoffe	σ_B in kg/cm²
Gußeisen	6000—9000	Ziegelstein	80—300
Granit	800—2000	Beton	70—500
Basalt	1000—3200	Eiche längs der Faser	350—400
Sandstein	500—1800	Kiefer längs der Faser	300—350
Kalkstein	400—2000		

auf, die gewöhnlich nur auf einen kleinen Teil der ganzen Oberfläche der sich berührenden Körper begrenzt bleibt und daher zu der Kategorie der sogenannten örtlichen Spannungen gehört. Es ist üblich, diese Art des örtlichen Drucks als *Pressung* zu bezeichnen. Wenn die aufeinander Druck ausübenden Konstruktionsteile aus Werkstoffen verschiedener Härte angefertigt sind, so wird die Einpressung in dem Werkstoff von geringerer Härte größer sein. Ein eiserner Träger z. B., der mit seinem Ende auf einer Ziegelsteinwand aufliegt, ruft im Mauerwerk der Wand, in der Ebene des Lagerteiles $m—n$ (Bild 41, a) eine Pressung hervor. Eine Schienenunterlagsplatte, die den Druck von der Schiene auf die Schwelle überträgt, ruft eine Pressung der Schwelle unter der Unterlagsplatte in der Ebene

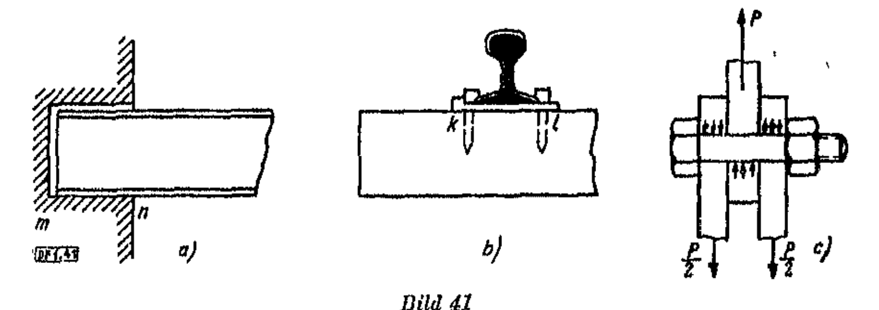


Bild 41

$k—l$ (Bild 41, b) hervor, die die Aufgabe hat, den Schienendruck auf eine größere Fläche zu verteilen und hierdurch die Formänderung der Schwelle zu vermindern. Zwischen dem Bolzen und der Leibung einer Bolzenverbindung (Bild 41, c) tritt eine Pressung an den zylindrischen Berührungsflächen auf.

Die Spannung durch Pressung und die Formänderung erstrecken sich nicht auf eine große Tiefe ins Innere der sich berührenden Körper und nehmen schnell mit der Entfernung von der Berührungsfläche ab.

Der örtliche Charakter der Pressung gibt in vielen Fällen die Möglichkeit, die zulässige Spannung im Vergleich zur sonst zulässigen Druckspannung zu erhöhen. So werden z. B. in den Nietverbindungen für die Leibungsbeanspruchung der Niete gewöhnlich doppelt so große Spannungen zugelassen wie bei der Beanspruchung auf Druck. Die zulässige örtliche Druckspannung für Holz wird infolge seines ungleichmäßigen faserartigen Aufbaus geringer angenommen als für

ächendruck, und sie hängt davon ab, unter welchem Winkel zu den Fasern ...)annung wirkt. Am schlechtesten leistet Holz dem Druck senkrecht zu ... ısern Widerstand.

)9 Einfluß der Wirkungsweise der Belastung, der Zeit und der Temperatur

Wir haben oben das physikalische Bild der Formänderung beim Zug ledigl... r Erläuterung des Sinnes des Hookeschen Gesetzes betrachtet. Im allgeme... ıd jedoch die Erscheinungen, die in physikalischen Körpern unter dem E... ıß der Belastung vor sich gehen, sehr kompliziert und interessant. Die Z... stigkeit der Metalle hängt unter anderem in sehr starkem Maße von der Z...), während welcher der Versuch durchgeführt wird. Ein über eine lange Z... ıuer oft wiederholter Zug oder Druck zieht eine *Ermüdung* des Metalls ... ıh und ruft seinen Bruch bei Spannungen hervor, die bedeutend niedriger ... s der Wert der Bruchgrenze. Beobachtungen zeigen, daß in einem auf Zug ... ıspruchten Versuchsstab bei einer gewissen, für den gegebenen Werkstoff ... immten Temperatur mit der Zeit eine ununterbrochene Zunahme der For... ıderungen ohne weitere Erhöhung der Belastung möglich ist. Diese Erschei... ınnt man das *Kriechen*. Mit steigender Temperatur wird das Kriechen stärk...

Die Geschwindigkeit der Belastungsaufbringung und die Änderung der T... ıratur ändern so weit die Eigenschaften der Werkstoffe, daß ein und ders... 'erkstoff bei verschiedenen Verhältnissen bald spröde und bald plastisch ... ınn. Es wäre daher richtiger, nicht von überhaupt spröden und plastis... 'erkstoffen zu sprechen, sondern von einem spröden und plastischen Zust... ıs Werkstoffs unter gegebenen Verhältnissen.

Das Studium der Eigenschaften der Werkstoffe und ihres Verhaltens un... räfte- und Temperatureinwirkungen ist eine sehr wichtige physikalische Auf... ıbe, über die eine umfangreiche Literatur besteht. Diese Fragen werden a... ıhrlicher im zweiten Teil des Lehrbuches behandelt.

10 Sicherheit. Zulässige Spannungen

Die im Falle eines gleichmäßigen Zuges oder Druckes im Stab wirke... pannung wird nach der Formel (2.1)

$$\sigma = \frac{P}{F}$$

ɜrechnet.

Nachdem wir die Spannung berechnet haben, stoßen wir gleich auf die Frag...) eine solche Spannung in unserer Konstruktion auch zugelassen werden kö... ffensichtlich ist die Frage nach der Wahl der Spannung, die für dieses ... ınes Bauwerk oder für eine Maschine zugelassen werden kann, äußerst wich... a von der richtigen Festlegung des Wertes der *zulässigen Spannung* die Fest... eit und die *Sicherheit* einer geplanten Konstruktion abhängen.

Von der Größe der festgelegten zulässigen Spannung σ_{zul} hängt außer... ıch die Menge des aufgewendeten Materials ab. Bei einer geringen zuläss... pannung wird mehr Material benötigt als bei einer hohen zulässigen Spann... olglich hängt von der richtigen Festlegung der zulässigen Spannung in ho... [aße die Wirtschaftlichkeit der Ausführung ab. Daher beschäftigen sich ... er Frage der Festlegung der Werte der zulässigen Spannungen in der Ud...

staatliche Organe, die Normen festsetzen und entsprechende Normen herausgeben, nach denen man sich unter den üblichen Entwurfsbedingungen bei der Berechnung von Konstruktionen richten muß.

In der Ingenieurpraxis können jedoch auch solche Fälle vorkommen, in denen es infolge irgendwelcher ungewöhnlicher Bauumstände oder Besonderheiten der Konstruktion nicht möglich ist, die zulässige Spannung nach den Normen zu bestimmen. Es wird erforderlich, andere zulässige Spannungen festzusetzen, indem man von den Bedingungen der gegebenen Aufgabe ausgeht. Daher ist es nötig, die Umstände zu untersuchen, die vom technischen Standpunkt aus die Wahl der zulässigen Spannung beeinflussen.

In den meisten Bauwerken und Maschinen kann man nicht zulassen, daß einzelne Elemente bleibende Formänderungen erleiden. Es kann z. B. nicht geduldet werden, daß das Material eines stählernen Brückenbogens oberhalb der Elastizitätsgrenze arbeitet. Wie wir schon wissen, ist die Formänderung des Werkstoffs oberhalb der Elastizitätsgrenze sehr groß, es entstehen bleibende Verformungen, und die Durchbiegung einer so belasteten Brücke würde in diesem Falle so groß werden, daß sie für den Verkehr nicht mehr benutzt werden kann. Das gleiche trifft auch für die Decken und Dächer von Wohngebäuden und Werkanlagen zu.

Wenn wir daher davon überzeugt wären, daß

1. der Werkstoff der Konstruktion die gleichen Eigenschaften haben wird wie die aus ihm angefertigten Prüfstäbe und er auch sonst fehlerfrei ist,
2. die von der Konstruktion aufzunehmenden Belastungen in unserer Berechnung genügend genau berücksichtigt worden sind und
3. wir in der Berechnung die tatsächlich größtmöglichen Beanspruchungen des Werkstoffs vorgesehen haben,

so könnten wir in der geplanten Konstruktion ohne Bedenken Spannungen bis nahe an die Elastizitätsgrenze zulassen.

In der Praxis ist es jedoch nicht möglich, alle drei erwähnten Bedingungen vorauszusetzen, da man

1. nicht von der Gleichmäßigkeit der Eigenschaften der beim Bau verwendeten gesamten Werkstoffmenge überzeugt sein kann und auch nicht von der genauen Übereinstimmung ihrer Eigenschaften mit den Eigenschaften der in geringer Anzahl geprüften Versuchsstäbe;
2. auch mit einigen Überbelastungen des Bauwerks im Vergleich zu den in der Berechnung angenommenen Belastungen rechnen muß. Insbesondere nehmen wir z. B. in der Mehrzahl der Fälle an, daß die Belastung ruhig auf das Bauwerk einwirkt, und berücksichtigen nicht den Einfluß, der durch die Bewegung der Belastung oder durch Stöße bewirkt wird, oder berücksichtigen dies nur angenähert;
3. für Fälle einer komplizierten Wirkung der Kräfte auf Teile des Bauwerks keine ausreichend zuverlässigen praktischen Methoden zur genauen Berechnung der größten Spannungen hat, und alle praktischen Berechnungen, die auf der Festigkeitslehre basieren, mehr oder weniger angenähert sind. Sogar beim Laboratoriumsversuch auf Zug können wir nur angenähert damit rechnen, daß sich die Spannungen gleichmäßig über den Querschnitt verteilen.

Aus dem eben Gesagten geht klar hervor, daß die zulässigen Spannungen bedeutend niedriger als die Elastizitätsgrenze des Werkstoffs liegen müssen, wenn wir das Bauwerk vor der Möglichkeit einer Katastrophe bewahren wollen. Wenn das Verhältnis der zulässigen Spannung zur Elastizitätsgrenze gleich $1/\nu$ ist, so sagt man, daß der gegebene Balken eine ν-fache Sicherheit hat; die Zahl ν nennt man den *Sicherheitsgrad* oder den *Sicherheitsbeiwert*. Bei praktischen Anwendungen ist es jedoch unbequem, die zulässige Spannung durch ihren Vergleich mit der Elastizitätsgrenze festzulegen, da es nicht immer gelingt, die Prüfung ausreichend genau durchzuführen, wie dies zur Bestimmung der Elastizitätsgrenze erforderlich ist. In der Praxis ermittelt man oft gar nicht die Elastizitätsgrenze, sondern setzt die zulässige Spannung auf den $1/\nu$-Teil der Bruchgrenze fest, dessen Ermittlung keine großen Schwierigkeiten bereitet, da es hierbei nicht nötig ist, die Formänderungen zu messen. Daher nennt man als Sicherheitszahl öfter die Zahl ν_B, die gleich dem Verhältnis der Bruchgrenze zu der zulässigen Spannung ist:

$$\nu_B = \frac{\sigma_B}{\sigma_{zul}}. \tag{2.16}$$

Für plastische Werkstoffe ist es zweckmäßig, den Sicherheitsgrad in Abhängigkeit von der Fließgrenze festzusetzen, da bei der Durchführung der Versuche der Beginn des Fließens auch ohne genaue Meßgeräte (was bei Betriebsbedingungen wichtig ist) wahrgenommen werden kann. In diesem Falle ist der Sicherheitsgrad

$$\nu_F = \frac{\sigma_F}{\sigma_{zul}}. \tag{2.17}$$

In jedem Falle, wo es sich um die Sicherheit handelt, muß zur Vermeidung von Fehlern genau festgelegt werden, welche Sicherheit gemeint ist: Die Sicherheit in bezug auf die Bruch-, Elastizitäts- oder Fließgrenze.

Die Größe des Sicherheitsgrades hängt von den Bedingungen ab, die oben besprochen wurden. Je homogener der Werkstoff ist und je mehr wir von seinen Eigenschaften überzeugt sind, je besser die Belastungen berücksichtigt werden und je genauer die Berechnungsmethode ist, um so geringer kann der Sicherheitsgrad und folglich um so höher die zulässige Spannung sein. Im Endergebnis erhalten wir eine um so größere Wirtschaftlichkeit hinsichtlich des Materialaufwandes für das Bauwerk[1]).

Für solche Werkstoffe wie Stahl, der genügend homogen hinsichtlich seines Aufbaus ist und dessen Herstellung fabrikmäßig unter besonders aufmerksamer Beobachtung durchgeführt wird, rechnet man zur Zeit mit Bezug auf die Fließgrenze bei statischer Belastung mit einem Sicherheitsbeiwert ν_F von etwa 1,6 bis 1,7. Da die Bruchgrenze für Stahl etwa 1,5- bis 1,7mal höher als die Fließgrenze liegt, schwankt der Koeffizient ν_B von 2,5 bis 3,5.

Für spröde Werkstoffe, wie z. B. für Gußeisen, muß man einen höheren Sicherheitsbeiwert wählen als für plastische Werkstoffe. Sie leisten einer Schlagbeanspruchung schlechten Widerstand und können sogar bei geringen, in der Berechnung nicht vorgesehenen Formänderungen, die z. B. als Ergebnis einer Ungenauigkeit bei der Montage der Konstruktion möglich sind, eine plötzliche

---

[1]) In England trägt der Sicherheitsgrad die Bezeichnung „Koeffizient der Unwissenheit".

Zerstörung erfahren. Für Gußeisen nimmt man den Sicherheitsbeiwert ν_B gleich 5 bis 6 an.

Für Holz, das kein homogener Werkstoff ist und dessen Festigkeit in hohem Maße von einer Reihe zufälliger Ursachen, z. B. das Vorhandensein von Ästen, von kleinen unbemerkten Rissen und anderen Holzfehlern abhängt, nimmt man einen Sicherheitsbeiwert ν_B gleich 3,5 bis 6 an. Für Beton und Stahlbeton schwankt der Sicherheitsbeiwert von 2 bis 3,5 in Abhängigkeit von den Eigenschaften des Betons, der Konstruktion und der Bestimmung des Bauwerks.

In den nachfolgenden Tafeln 6 und 7 werden die zulässigen Spannungen für die wichtigsten Baustoffe aufgeführt, die der Berechnung von Bauwerken zugrunde gelegt werden, falls auf diese nur die sog. Hauptbelastungen einwirken.

Tafel 6

Zulässige Spannungen auf Zug und Druck[1]) [2])

Lfd. Nr.	Werkstoff	Zulässige Spannung in kg/cm²	
		Druck	Zug
1	Baustahl Güte B	1600	1600
2	Stahl Güte 2	1400	1400
3	Holz — Kiefer bei einer Feuchtigkeit von nicht höher als 15%, in Faserrichtung	100	70
4	dgl. Eiche in Faserrichtung	130	90
5	Grauguß	1200—1500	—
6	Beton Güte[3]) $R_{28} = 110$ kg/cm²	38	4,5
7	Beton Güte $R_{28} = 170$ kg/cm²	60	7

Die zulässige Spannung für den Leibungsdruck des Stahls bei der Berechnung von Nieten wird gleich der doppelten zulässigen Zugspannung festgesetzt. So ist für Stahl 3 (Ст. 3)[4])

$$\sigma_{l\,zul} = 2\sigma_{z\,zul} = 3200 \text{ kg/cm}^2.^{5)}$$

[1]) Die Tafel 6 ist gemäß den in der UdSSR für das Entwerfen gültigen Normen „H und TY — 40 und H 2 — 46" aufgestellt.

[2]) *Anm. d. deutschen Redaktion:* Gemäß den zur Zeit gültigen amtlichen deutschen Vorschriften lauten die entsprechenden zulässigen Spannungen wie folgt:

Lfd. Nr.	Werkstoff	Zulässige Spannung in kg/cm²	
		Druck	Zug
1	Holz — Nadelholz, Güteklasse II.	85	85
2	Holz — Eiche und Buche, Güteklasse II	100	100
3	Beton B 120 ($W_{28} = 120$ kg/cm²).	40	2
4	Beton B 160 ($W_{28} = 160$ kg/cm²).	50—80	2,5—4

[3]) Der Beton wird durch Gütemarken charakterisiert, die die Bruchgrenze beim Druck von Würfeln, die 28 Tage alt sind, kennzeichnen. Die Spannungen sind für die Berechnung von Betonbauwerken angegeben.

[4]) Im weiteren werden die Stahlgütemarken in abgekürzter Form nach „Ост" (allgemeine Normen) bezeichnet: „Ст. 2, Ст. 3, . . ."

[5]) *Anm. d. deutschen Redaktion:* Die deutschen Stahlsortenbezeichnungen lauten anders, wie z. B. St. 37 usw. St. 37 kennzeichnet eine Stahlsorte, deren Zugfestigkeit $\sigma_B \geqq 37$ kg/mm² beträgt, während seine Elastizitäts- und Proportionalitätsgrenze etwa bei 1900 kg/cm² liegt:

$$\sigma_{Qu} \triangleq \sigma_{l\,zul} = 2\sigma_{z\,zul}$$

Tafel 7

Zulässige Druckspannung bei Kiefer und Eiche in kg/cm²[1])

Lfd. Nr.	Spannungsart	Kiefer	Eiche
1	Druck quer zur Faser	15	30
2	Örtliche Pressung quer zur Faser bei einer Länge der Druckfläche (in Faserrichtung) von mehr als oder gleich 10 cm	20	40
3	dgl. bei einer Länge der Druckfläche von weniger als 10 cm	25	50
4	Druck der Stirnseite (in Faserrichtung)	100	130
5	Druck an den Stirnseiten eines Blattes und von prismatischen Keilen, in Faserrichtung . . .	100	130
6	dgl. senkrecht der Faserrichtung	25	50

Die Frage der zulässigen Spannung bei Berücksichtigung besonderer Eigenschaften der Werkstoffe und der Wirkungsweise der Belastung ist im zweiten Teil des Lehrbuchs dargelegt.

2.11 Einfachste Festigkeitsberechnungen auf Zug und Druck

A. Bei den praktischen Berechnungen auf Zug und Druck können drei verschiedene Aufgaben vorkommen, je nachdem, welcher von den drei zur Formel $\sigma = \frac{N}{F}$ gehörigen Werten der gesuchte ist.

Erster Fall

Die Abmessungen des Querschnitts oder seiner Fläche F sind bekannt, und durch Berechnung ist die Längskraft N ermittelt worden. Die vorhandene Spannung im Stab soll errechnet werden. Die Festigkeitsbedingung des Stabes lautet:

$$\sigma = \frac{N}{F} \leqq \sigma_{zul}, \tag{2.18}$$

worin σ_{zul} die für den gegebenen Werkstoff zulässige Spannung bedeutet.

Zweiter Fall

Auf Grund einer Berechnung ist die Kraft N gefunden und der Werkstoff mit der entsprechenden zulässigen Spannung σ_{zul} gewählt worden. Der Querschnitt des Stabes soll berechnet, d. h. die Form und die Abmessungen des Querschnitts sollen ermittelt werden. Zu diesem Zweck finden wir zunächst die

---

[1]) *Anm. d. deutschen Redaktion:* Die Druckspannungen für alle Holzsorten sind gem. DIN 1052 (Holzbauwerke, Berechnung und Ausführung) nicht soweit differenziert wie in den sowjetischen amtlichen Bestimmungen.

In der DIN 1052 sind folgende Angaben für Kiefer und Eiche der Güteklasse II enthalten:

a) Druck rechtwinklig zur Faserrichtung (entspr. Zeile 1 der Tafel 7) $\sigma_{d_{zul\perp}} = 20$ kg/cm² (Kiefer) und 30 kg/cm² (Eiche).

Als weitere Angabe findet sich:

b) Druck rechtwinklig zur Faserrichtung bei Bauteilen, bei denen geringfügige Eindrückungen unbedenklich sind, $\sigma_{d_{zul\perp}} = 25$ kg/cm² (Kiefer) und 40 kg/cm² (Eiche).

Als Einschränkung wird lediglich zu a) gemacht:
„Der Überstand der Schwellen über die Druckfläche muß in der Faserrichtung mindestens gleich dem 1,5fachen der Schwellenhöhe h sein; andernfalls sind die Spannungen um ein Fünftel zu ermäßigen."

c) Druckspannungen in Faserrichtung $\sigma_{d_{zul\|}} = 85$ kg/cm² (Kiefer) und $\sigma_{d_{zul\|}} = 100$ kg/cm² (Eiche).

erforderliche Querschnittsfläche, indem wir die Formel (2.18) auf folgende Art umschreiben:

$$F = \frac{N}{\sigma_{zul}}. \tag{2.19}$$

Wenn wir alsdann ein zweckmäßiges Querschnittsverhältnis in Übereinstimmung mit der Bestimmung und dem Charakter der Konstruktion ins Auge fassen und die erforderliche Fläche F kennen, wählen wir die Abmessungen des Querschnitts. Hierbei muß man danach streben, daß die Fläche des gewählten Querschnitts möglichst der durch Berechnung ermittelten Fläche nahekommt. Unvermeidliche Abweichungen nach oben oder unten werden gewöhnlich in den Grenzen von 5% zugelassen. Die Querschnittsermittlung ist die am häufigsten vorkommende Berechnungsoperation.

Dritter Fall

Bekannt sind die Querschnittsabmessungen und die zulässige Spannung des Werkstoffs. Zu ermitteln ist die größte Kraft, bei der für die Festigkeit des Stabes keine Gefahr besteht. Die Formel (2.18) erhält die Gestalt:

$$N = F\sigma_{zul}. \tag{2.20}$$

Dieser wie auch der erste Fall kommen hauptsächlich bei der Überprüfung der Festigkeit bereits bestehender Konstruktionen (z. B. im Zusammenhang mit einer Belastungsänderung) vor.

Bemerkung

Bei der Berechnung von Stäben auf *Druck* kann man die Formel $\sigma = \frac{N}{F}$ nur benutzen, wenn die Länge des Stabes im Vergleich zu den Abmessungen des Querschnitts nicht groß ist. Im anderen Falle ist eine zusätzliche Überprüfung der Stabilität des Stabes gegen seitliches Ausknicken (Knickung) erforderlich[1]).

Beispiel 1

Die Spannung im stählernen waagerechten Zugband AB des Konsolkrans (Bild 42) ist zu ermitteln. Der Querschnitt des Zugbandes ist rund mit einem Durchmesser von 2,5 cm, und die zulässige Zugspannung $\sigma_{z_{zul}} = 1000$ kg/cm² (unter Berücksichtigung der Wirkungsart der Belastung). Die größte vom Kran zu hebende Last ist $P = 2{,}5$ t und der Winkel $\alpha = 30°$.

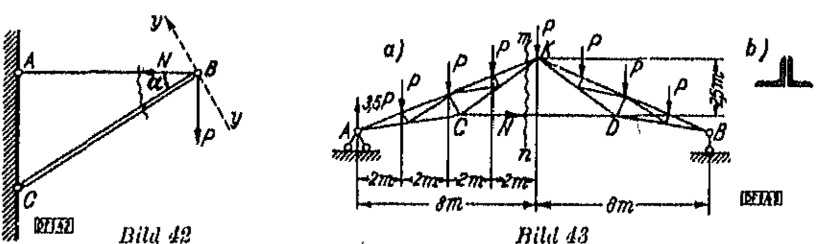


Bild 42 Bild 43

Indem wir den Knotenpunkt B herausschneiden und die in ihm zusammentreffenden Kräfte auf die *Achse y projizieren*, die senkrecht zum Stab BC gerichtet ist, finden wir die Kraft im Zugband

$$N = P \operatorname{ctg} \alpha = 2{,}5 \cdot 1{,}73 = 4{,}33 \text{ t (Zug)}.$$

[1]) *Anm. d. deutschen Redaktion:* Gemäß den amtlichen deutschen Bestimmungen ist praktisch jede Berechnung eines Druckstabes mit einem Knickbeiwert (ω) durchzuführen.

Die Querschnittsfläche des Zugbandes ist

$$F = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{3{,}14 \cdot 2{,}5^2}{4} = 4{,}9 \text{ cm}^2.$$

Die Arbeitsspannung im Zugband ist

$$\sigma_{\text{vorh}} = \frac{4330}{4{,}9} = 883 \text{ kg/cm}^2.$$

Wegen $\sigma_{\text{vorh}} < \sigma_{z_{\text{zul}}}$ ist die Haltbarkeit des Zugbandes gewährleistet.

Beispiel 2

Zu wählen ist der Querschnitt der Zugstange CD eines geschweißten Dachbinders, der in den Knotenpunkten der oberen Gurtung mit den gleichen Lasten $P = 3{,}25$ t belastet ist (Bild 43, a). Der Werkstoff ist Stahl „Oc" mit einer zulässigen Spannung $\sigma_{z_{\text{zul}}} = 1400$ kg/cm². Der Querschnitt soll aus zwei gleichschenkligen Winkeleisen bestehen (Bild 43 b). Die Auflagerdrücke des Binders sind $A = B = 3{,}5\,P$ (infolge symmetrischer Belastung). Wir führen einen Schnitt $m - n$ und setzen das Moment aller auf den linken abgetrennten Teil des Binders wirkenden Kräfte in bezug auf den Punkt K (die Rittersche Schnittmethode) gleich Null:

$$8A - P\,(2 + 4 + 6) - 2{,}5\,N = 0.$$

Hieraus finden wir die Kraft in der Zugstange: $N = 6{,}4\,P = 20{,}8$ t (Zug). Die erforderliche Querschnittsfläche der Zugstange ist:

$$F = \frac{20\,800}{1400} = 14{,}68 \text{ cm}^2.$$

Aus der Tafel der gleichschenkligen Winkeleisen (ГОСТ 2452) wählen wir den aus zwei Winkelstählen ∟ 65.65.6[1]) gebildeten Querschnitt. Die Fläche des gewählten Querschnitts ist

$$F = 7{,}55 \cdot 2 = 15{,}1 \text{ cm}^2,$$

welche die erforderliche Fläche um 1,6% übersteigt.

B. Wenn der Stab einen veränderlichen Querschnitt aufweist, so kann eine gleichmäßige Verteilung der Zug- und Druckspannungen mit genügender Genauigkeit nur dann angenommen werden, wenn die Änderung der Querschnittsabmessungen sich allmählich über die Länge des Stabes vollzieht. An den Stellen starker Änderungen des Querschnitts, z. B. bei dessen Schwächung durch Löcher, Ausdrehungen, Ausschnitte usw., wachsen die Spannungen an den Rändern der Löcher und Ausschnitte stark an.

Theoretische und experimentelle Untersuchungen haben gezeigt, daß die Konzentration der Spannungen an den Rändern von Löchern und Ausschnitten auf einen sehr geringen Teil der Querschnittsfläche begrenzt bleibt, d. h. sie hat einen scharf ausgeprägten örtlichen Charakter. Das Bild 44, a und b zeigt die Spannungsverteilungsbilder am Schnitt $m-n$ eines Bandes, das a) durch eine kleine runde Öffnung und b) durch zwei kleine halbrunde Ausschnitte geschwächt ist. Aus den Spannungsbildern ist zu ersehen, daß sich die Spannungen je nach der Entfernung vom Rand der Öffnung oder des Ausschnittes schnell vermindern. Bezeichnet man mit σ_0 die Spannung im ungeschwächten Querschnitt des Bandes, so werden die Spannungen an den Rändern der Öffnung etwa $3 \cdot \sigma_0$ sein, an den Rändern der Einschnitte dagegen nur etwa $2 \cdot \sigma_0$.

[1]) *Anm. d. deutschen Redaktion:* Sowjetisches ∟-Profil.

Dieser Charakter der Spannungsverteilung bleibt bestehen, solange die größte Spannung nicht die Proportionalitätsgrenze erreicht. Bei spröden Werkstoffen bleibt er auch nach der Überschreitung der Proportionalitätsgrenze bis zur Zerstörung (oder bis zum Erscheinen von Rissen an den Stellen der Konzentration) erhalten. Bei einem Stab aus sprödem Werkstoff tritt daher eine Zerstörung oder ein Riß im geschwächten Querschnitt bereits bei einer mittleren Spannung σ auf, die viel kleiner ist als die Bruchgrenze. Hieraus folgt, daß bei der Berechnung von Stäben aus spröden Werkstoffen die Konzentration der Spannungen berücksichtigt werden muß, insbesondere bei wechselnder Belastung.

Wenn der Werkstoff plastisch ist und sein Zerreißdiagramm eine ausreichend lange Fließstrecke aufweist, so wird die Spannung bei allmählicher Zunahme der Belastung nach dem Erreichen der Fließgrenze an den Stellen der Konzentration nicht weiter anwachsen, während die Spannungen in dem übrigen Teil des Querschnittes weiter anwachsen werden. Die Plastizität begünstigt auf diese Weise den Ausgleich der Spannungen, und daher sind die plastischen Werkstoffe bei statischer Belastung hinsichtlich örtlicher Überbeanspruchungen weniger empfindlich[1]). Aus diesem Grunde kann man bei der Berechnung von Stäben aus plastischem Werkstoff auf Zug und Druck die gleiche Formel (2.18) benutzen, indem man in die Berechnung die sogenannte *Nettoquerschnittsfläche* einführt, die sich aus der vollen *Bruttofläche* durch Abzug der Querschnittsschwächung ergibt.

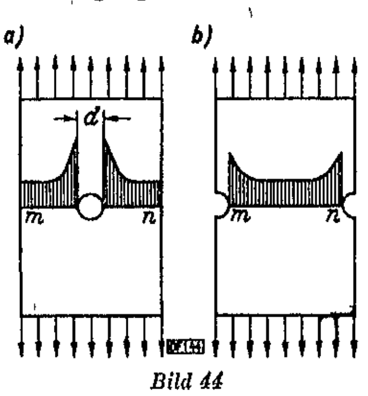


Bild 44

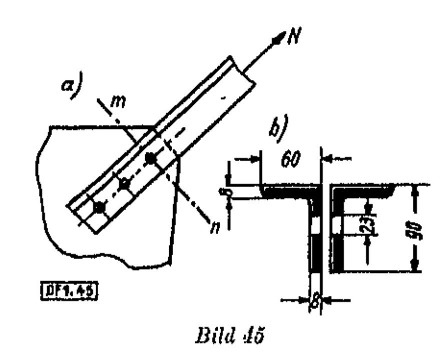


Bild 45

Beispiel 3

Es ist die Arbeitsspannung in einer auf Zug beanspruchten Strebe eines Stahlbinders zu überprüfen, die aus zwei ungleichschenkligen Winkeln L 60.60.8 mm besteht und an das Knotenblech durch drei Niete mit einem Durchmesser $d = 23$ mm angeschlossen ist (Bild 45). Die Zugkraft in der Strebe ist $N = 30$ t, der Werkstoff ist Cт. 3.

Drei Querschnitte, die durch die Achsen der Niete gehen, werden gleichstark geschwächt sein. Von ihnen ist der durch die Achse des ersten Niets geführte Querschnitt $m - n$ als gefährlichster anzusehen (Bild 45, a). An den übrigen Querschnitten ist die Zugkraft kleiner, da ein Teil derselben durch den ersten Niet auf das Knotenblech übertragen wird. Wir suchen die Fläche des geschwächten Querschnitts (Bild 45, b).

---

[1]) Bei der Wirkung sich schnell ändernder Spannungen mit verschiedenem Vorzeichen kann man die Konzentration auch bei plastischen Werkstoffen nicht unberücksichtigt lassen, da sie zur Bildung von Rissen führen kann, die sich mit der Zeit vergrößern.

Nach der Tafel „ГОСТ 10015“ ist die Fläche der zwei Winkel

$$F_{\text{brutto}} = 11{,}5 \cdot 2 = 23 \text{ cm}^2.$$[1]

Wir ziehen die Fläche von zwei Nietlöchern ab:

$$F_{\text{netto}} = 23 - 0{,}8 \cdot 2{,}3 \cdot 5 = 19{,}32 \text{ cm}^2.$$

Die Arbeitsspannung in der Strebe ist

$$\sigma_{\text{vorh}} = \frac{N}{F_{\text{netto}}} = \frac{30\,000}{19{,}32} = 1550 \text{ kg/cm}^2,$$

welche die zulässige Spannung $\sigma_{z_{\text{zul}}} = 1600$ kg/cm² für Ст. 3 nicht übersteigt.

2.12 Statisch unbestimmte Aufgaben

In Kapitel 2.02, Absatz B, wurde bereits gezeigt, daß die dort abgeleitete Formel (2.5)

$$\Delta l = \frac{Nl}{EF}$$

für die Deutung der Erscheinungen beim einfachen Zug nach drei Seiten hin (statisch, geometrisch und physikalisch) dazu geeignet ist, statisch unbestimmte Aufgaben zu lösen, d. h. solche, die zu ihrer Lösung nicht nur das Studium der auftretenden Kräfte erfordern, sondern auch die Berücksichtigung der physikalischen Eigenschaften der Körper, an denen diese Kräfte angreifen. In diesem Kapitel werden wir uns mit Aufgaben dieser Art beschäftigen.

Beispiel 4

Ein steifer Balken AB ist mittels eines Gelenkes an einer Wand im Punkt A befestigt und an zwei Stahlstäben *1* und *2* von gleichem Querschnitt aufgehängt (Bild 46 a). Zu ermitteln sind die Kräfte, die in den Stäben infolge der am Ende des Balkens angehängten Last P auftreten, wobei der Balken als absolut starr angenommen wird. Die Entfernungen zwischen den Punkten A, C, D und B sind gleich a. Das Eigengewicht des Balkens kann, da gering im Vergleich zu der Last P, vernachlässigt werden.

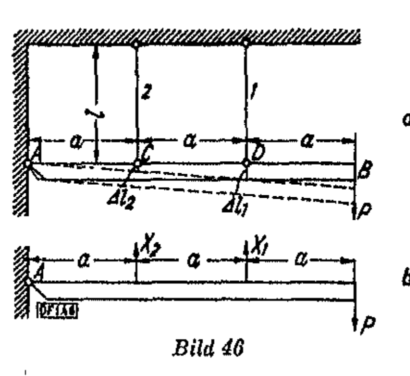


Bild 46

Die statische Seite. Wir zerschneiden die Stäbe *1* und *2* in den Punkten D und C und ersetzen die Wirkung der entfernten oberen Teile auf den Balken durch die unbekannten Kräfte X_1 und X_2 (Bild 46, b). Zur Bestimmung dieser Kräfte kann man nur eine der drei Gleichgewichtsgleichungen des Balkens ausnutzen: Die Summe der Momente aller Kräfte in bezug auf das Gelenk A ist gleich Null. Die beiden anderen Gleichungen $\Sigma X = 0$ und $\Sigma Y = 0$ werden außer den Kräften X_1 und X_2 noch zwei unbekannte Kräfte enthalten: die vertikale und horizontale Komponente der Gelenkkraft A, die aus diesen Gleichungen erst dann ermittelt werden können, wenn die Kräfte X_1 und X_2 bestimmt worden sind. Stellen wir die Gleichung $\Sigma M_A = 0$ auf:

$$P \cdot 3a - X_1 \cdot 2a - X_2 \cdot a = 0 \quad \text{oder} \quad 2X_1 + X_2 = 3P. \tag{a}$$

Die geometrische Seite

Unter Einwirkung der Last P werden sich die Stäbe strecken und der Balken sich um Punkt A um einen kleinen Winkel (die Verformung ist in Bild 46, a durch eine punk-

[1]) *Anm. d. deutschen Redaktion:* Nach den amtlichen deutschen Tabellen $F = 11{,}4 \cdot 2 = 22{,}8$ cm².

tierte Linie dargestellt) drehen. Hierbei werden die Punkte C und D Kreisbögen beschreiben, die man aber wegen des sehr geringen Drehwinkels des Balkens als Vertikalbewegung der Punkte C und D annehmen kann, indem man die horizontalen Abweichungen als kleine Werte höherer Ordnung vernachlässigt. Dann werden wir die geometrische Abhängigkeit zwischen den Verlängerungen Δl_1 und Δl_2 der beiden Stäbe ohne Mühe aus dem Bild 46, a finden:

$$\frac{\Delta l_1}{\Delta l_2} = \frac{2a}{a} \text{ oder } \Delta l_1 = 2\,\Delta l_2. \tag{b}$$

Die physikalische Seite und die *Synthese*

Mit Hilfe des Hookeschen Gesetzes (2.5) drücken wir die Verlängerungen der Stäbe durch die in ihnen wirkenden Kräfte aus (hierbei denken wir daran, daß die Längen und die Steifigkeiten der Stäbe gleich sind) und erhalten, indem wir diese in (b) einsetzen, die Formänderungsgleichung in physikalischer Form:

$$\frac{X_1 l}{EF} = 2\,\frac{X_2 l}{EF} \text{ oder } X_1 = 2\,X_2. \tag{c}$$

Als gemeinsame Lösungen der Gleichungen (a) und (c) erhalten wir die Kräfte in den Stäben: $X_1 = 1{,}2\,P$; $X_2 = 0{,}6\,P$.

Beispiel 5

Eine Last P ist mit Hilfe mehrerer Stäbe an einer Decke befestigt (Bild 47, a), wobei die Zahl der Stäbe $2n > 2$ sei. Die Stäbe sind symmetrisch in bezug auf die Achse OY, die durch den Aufhängepunkt O der Last geht, angeordnet. Jedes Paar symmetrischer Stäbe ist aus jeweils gleichem Werkstoff hergestellt und hat gleiche Querschnitte.

Nehmen wir an, daß die Querschnittsfläche irgendeines $m$ten Stabes F_m und der Elastizitätsmodul seines Materials E_m sind, für die Länge gilt

$$l_m = \frac{h}{\cos\,\alpha_m},$$

wobei der Stab mit der OY-Achse den Winkel α_m einschließt. Zu ermitteln sind die Kräfte aller Stäbe.

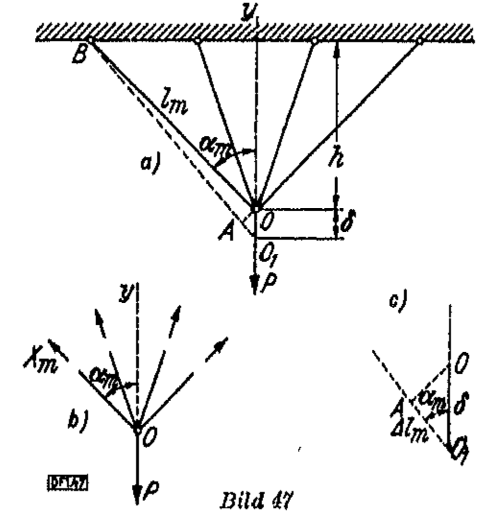


Bild 47

Die statische Seite. Wir schneiden den Knotenpunkt O heraus, in dem alle Stäbe zusammenlaufen, und ersetzen die Wirkung der oberen entfernten Teile derselben durch die unbekannten Kräfte

$$X_1, X_2 \ldots, X_m \ldots, X_{2n} \text{ (Bild 47, b).}$$

In den symmetrisch gelegenen Stäben werden die Kräfte gemäß der Bedingung der Aufgabe gleich sein. Da der Punkt O ein Bündel von in einem Punkte zusammenlaufenden Kräften aufweist, so liefert die Statik für diese nur zwei Gleichgewichtsbedingungen

$$\Sigma X = 0, \quad \Sigma Y = 0,$$

von denen die erste infolge der Symmetrie des Systems identisch erfüllt wird, während wir aus der zweiten die einzige Gleichung statischen Charakters erhalten:

$$2 \sum_{m=1}^{m=n} X_m \cos\alpha_m = P. \tag{a}$$

das Summieren infolge der Symmetrie nur auf die Hälfte der Stäbe: Gleichung genügt jedoch nicht zur Ermittlung von n unbekannten

$$X_1, X_2, \ldots X_m, \ldots X_n,$$

lich, zu dieser $(n-1)$ Formänderungsbedingungen hinzuzufügen.

geometrischen Seite über. Alle Stäbe werden sich unter der Einwirkung n. Hierdurch wird sich der Punkt O um einen zunächst unbekannten h unten bewegen (die Bewegung des Punktes O wird wiederum infolge Systems vertikal sein). Die Verlängerung eines beliebigen $m$ten Stabes n leicht durch den Wert der Absenkung δ der Last ausgedrückt werden. ng des Stabes in dem Bild zu finden, muß man vom Zentrum B aus einen Kreisbogen bis zum Schnitt mit BO_1 schlagen. Der Winkel OBO_1, ıg des Winkels α_m im Ergebnis der Formänderung entspricht, wird ngen Formänderung sehr klein sein. Wir können daher 1. das Schlagen is zum Schnitt mit BO_1 durch das Fällen einer Senkrechten OA auf die n und 2. die Verringerung des Winkels α_m nach der Formänderung nn erhalten wir aus dem rechtwinkligen Dreieck AOO_1 (Bild 47, c):

$$\Delta l_m = \delta \cos \alpha_m. \tag{b}$$

netrischen Bedingungen der Art (b) ist gleich n, das ist die Anzahl der lfte des Systems.

ysikalische Seite der Aufgabe ermöglicht es, diese geometrischen Be- ie Kräfte $X_1, X_2 \cdots X_n$ auszudrücken. Zu diesem Zweck benutzen it

$$\Delta l_m = \frac{X_m l_m}{E_m F_m} = \frac{X_m h}{E_m F_m \cos \alpha_m}. \tag{c}$$

Abhängigkeiten wird ebenfalls gleich n sein. Setzt man den Wert für n, so erhalten wir n durch Kräfte ausgedrückte Formänderungsbedin- cher Form:

$$\frac{X_m h}{E_m F_m \cos \alpha_m} = \delta \cos \alpha_m$$

$$X_m = \frac{\delta}{h} E_m F_m \cos^2 \alpha_m. \tag{d}$$

ler statischen Bedingung (a) hinzu, so werden wir $(n+1)$ Gleichungen Unbekannte enthalten:

$$X_1, X_2 \ldots X_m, \ldots X_n;\ \delta.$$

ırte Lösungsgang der Aufgabe zeichnet sich durch die Besonderheit den n unbekannten Kräften noch eine Unbekannte δ geometrischen rt haben. Ein solches Verfahren wird bisweilen zur Lösung kom- ıbestimmter Systeme angewandt. Wir werden aus der vorliegenden viefern dieses nützlich sein kann. Die Formänderungsbedingungen (d) aß alle unbekannten Kräfte X_m sehr einfach durch eine Unbekannte δ etzt man die Werte X_m aus den Bedingungen (d) in (a) ein, so erhalten

$$\frac{2\delta}{h} \sum_{m=1}^{n} E_m F_m \cos^3 \alpha_m = P \tag{e}$$

$$\delta = \frac{Ph}{2 \sum_{m=1}^{n} E_m F_m \cos^3 \alpha_m}. \tag{f}$$

Nach
ihn ko

Nac
nahme
wir zu
Forme
die Ar

Aus
Steifig
abhän
zitätsr
Fläche

Die
diese s

Hat
wir au
Wahl
Kräfte
bestim
Quers
Die vo
X_m ka

Neh
Materi
sollen.
so wer
größte

und w
annehı
Wählt
hierdu
dem n

Aus
$E_m F_m$
Kraft
zu den
die Kr

Die
im Sys
Da es s
nicht
lässige
einige

Nach der Formel (f) kann der Absenkungswert δ der Last P berechnet werden. Wenn man ihn kennt, so können wir nach der Gleichung (d) die Kräfte aller Stäbe ermitteln:

$$X_m = \frac{P\, E_m F_m \cos^2 \alpha_m}{2 \sum\limits_{m=1}^{n} E_m F_m \cos^3 \alpha_m}. \tag{g}$$

Nachdem wir außer den unbekannten Kräften X_m noch einen Wert δ eingeführt hatten, nahmen wir diesen als Hauptunbekannte an und bestimmten sie vor allen anderen, indem wir zunächst die unbekannten Kräfte X_m ausschalten. Alsdann ist es leicht, nach den Formeln in der Form von (g) die Kräfte X_m, wie groß auch ihre Anzahl sein mag, d. h. die Anzahl der die Last stützenden Stäbe, zu ermitteln.

Aus der Formel (g) geht hervor, daß die Kraft X_m in irgendeinem Stabe sowohl von der Steifigkeit $E_m F_m$ des gegebenen Stabes als auch von der Steifigkeit aller übrigen Stäbe abhängt. Wenn alle Stäbe aus demselben Werkstoff hergestellt sind, so läßt sich der Elastizitätsmodul in der Formel (g) herauskürzen, und die Kräfte in den Stäben werden von den Flächen F_m ihrer Querschnitte abhängen.

Diese Besonderheit, die allen statisch unbestimmten Systemen eigen ist, unterscheidet diese stark von den statisch bestimmten und erschwert die Berechnung.

Hat man ein statisch bestimmtes System (z. B. einen Binder) zu berechnen, so ermitteln wir aus den Gleichgewichtsbedingungen die Kräfte in allen Stäben und gehen dann zur Wahl der Querschnitte über, die den gefundenen Kräften entsprechen. Hier hängen die Kräfte überhaupt nicht von den Querschnitten ab. Ist das System jedoch statisch unbestimmt, so kann man die Kräfte nicht ermitteln, wenn man nicht vorher die Größe der Querschnittsflächen aller Stäbe oder, was einfacher ist, die Verhältnisse der Flächen schätzt. Die vorherige Festlegung der Verhältnisse der Flächen F_m bei noch unbekannten Kräften X_m kann schwierig sein.

Nehmen wir an, daß für das untersuchte Beispiel die Stabquerschnitte aus gleichem Material unter Zugrundelegung einer gegebenen zulässigen Spannung $\sigma_{z_{zul}}$ gewählt werden sollen. Wenn wir z. B. voraussetzen, daß die Querschnittsflächen aller Stäbe gleich sind, so werden wir leicht alle Kräfte X_m finden. Hat man die Wahl des Querschnitts nach der größten Kraft X_{max} getroffen, so ist

$$F = \frac{X_{max}}{\sigma_{z_{zul}}}$$

und wir werden gemäß der Voraussetzung diesen Querschnitt auch für alle übrigen Stäbe annehmen müssen. Folglich werden diese Stäbe mit einer übermäßigen Sicherheit arbeiten. Wählt man jedoch die Querschnitte auf Grund der gefundenen Werte X_m, so ändern wir hierdurch die Kräfte selbst, so daß ihre nochmalige Ermittlung in Übereinstimmmung mit dem neuen Verhältnis der Flächen erforderlich wird.

Aus der Formel (g) kann man ersehen, daß der Zähler bei der Vergrößerung der Steifigkeit $E_m F_m$ eines der Stäbe in stärkerem Maße zunimmt als der Nenner, und daher wächst die Kraft im Stab an. Die Kräfte verteilen sich also im System in einem gewissen Verhältnis zu den Steifigkeiten der Stäbe. Das statisch unbestimmte System reguliert gleichsam selbst die Kräfte in seinen Elementen entsprechend ihrer Leistungsfähigkeit.

Diese wertvolle Eigenschaft ermöglicht es, eine wünschenswerte Verteilung der Kräfte im System zu schaffen, wenn man vorher die Querschnitte der einzelnen Elemente festlegt. Da es aber eine direkte Proportionalität zwischen der Streifigkeit und der Stabkraft (Formel g) nicht gibt, so erweist es sich als überhaupt unmöglich, eine volle Ausnutzung der zulässigen Spannung in allen Stäben zu erreichen, und man muß sich damit abfinden, daß einige Stäbe mit einer übermäßigen Sicherheit arbeiten.

2.13 Temperatureinfluß auf statisch unbestimmte Systeme

Die zweite Besonderheit der statisch unbestimmten Systeme, die diese von den statisch bestimmten unterscheidet, ist die Abhängigkeit der Kräfte in den Elementen des Systems von der Temperatur. Die Temperaturänderung einzelner Stäbe des Systems und in vielen Fällen auch die gleiche Temperaturänderung aller Stäbe ruft das Erscheinen von Kräften im System hervor, wie dies schon in Kapitel 2.02, Absatz B, vermerkt worden ist.

Beispiel 6

Untersuchen wir ein symmetrisches System dreier Stäbe von ähnlicher Art wie in der vorherigen Aufgabe (Bild 48, a). Nehmen wir an, daß das System bei einer gewissen Temperatur t_1° montiert worden ist, und daß sich darauf alle Stäbe bis zu der Temperatur t_2° erwärmt haben, so daß die Temperaturerhöhung

$$t = t_2 - t_1$$

beträgt.

Die Kräfte in allen Stäben sind bei der Montagetemperatur t_1 offensichtlich gleich Null, da die äußere Belastung fehlt. Bei einer Erwärmung können sich die Stäbe nicht frei ver-

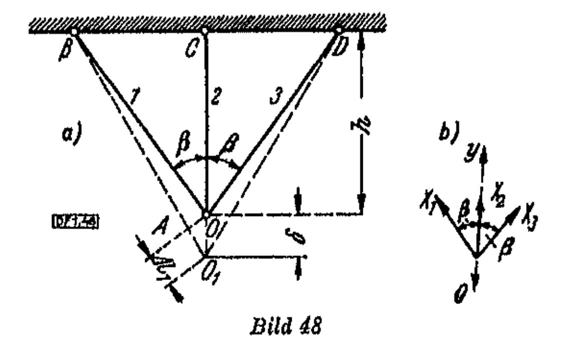


Bild 48

längern, da sie im Knotenpunkt O miteinander verbunden sind. In den Stäben werden daher Kräfte auftreten, mit deren Ermittlung wir uns auch befassen wollen.

Wir schneiden den Knotenpunkt O heraus und ersetzen die Wirkung der abgetrennten Stäbe durch Kräfte X_1, X_2 und X_3, wobei wir annehmen, daß alle Kräfte Zugkräfte, d. h. vom Knotenpunkt nach außen gerichtet sind (Bild 48, b)[1]. Auf Grund der Symmetrie folgern wir, daß $X_1 = X_3$ ist.

Aus der Gleichgewichtsbedingung $\Sigma Y = 0$ ergibt sich

$$2 X_1 \cos \beta = - X_2. \qquad \text{(a)}$$

Auf diese Weise haben wir zur Bestimmung von zwei Unbekannten $X_1 = X_3$ und X_2 eine Gleichung (a). Die zweite Gleichung stellen wir auf Grund der Untersuchung der Formänderung des Systems auf.

Bei der Erwärmung der Stäbe bewegt sich der Knotenpunkt O infolge der Symmetrie senkrecht abwärts um einen gewissen Wert δ, der auch gleichzeitig die Verlängerung des mittleren Stabes darstellen wird. Die Formänderungsgleichung muß das gleiche Aussehen wie in der vorherigen Aufgabe haben:

$$\Delta l_1 = \delta \cos \beta = \Delta l_2 \cos \beta. \qquad \text{(b)}$$

[1] Der Umstand, daß der Knotenpunkt bei der auf Bild 48, b eingetragenen Richtung der Kräfte offensichtlich nicht im Gleichgewicht sein wird, soll uns nicht irreführen, da das Ergebnis der Lösung zeigen wird, für welche Kräfte die angenommene Richtung falsch gewählt war.

Um die Gleichung (b) in physikalischer Form darzustellen, müssen wir bedenken, daß die Verlängerung jedes Stabes erstens von der auf ihn wirkenden Kraft und zweitens von der Erhöhung der Temperatur abhängt. Daher müssen wir hier zwei physikalische Gesetze zum Ausdruck bringen: das Hookesche Gesetz und das Gesetz der Wärmeausdehnung.

Die endgültige Verlängerung des Stabes stellt sich als algebraische Summe der freien Verlängerung $\alpha l t$ infolge der Erwärmung (worin α der lineare Temperaturausdehnungskoeffizient ist) und der von der im Stab wirkenden Kraft X bewirkten elastischen Verlängerung (Verkürzung) $\frac{Xl}{EF}$ dar:

$$\Delta l = \alpha l t + \frac{Xl}{EF}. \tag{c}$$

Der Werkstoff aller Stäbe soll gleich sein. Wir stellen fest, daß $l_2 = h$ und $l_1 = \frac{h}{\cos\beta}$ ist, und setzen die Werte Δl_1 und Δl_2 aus (c) in (b) ein. Dann erhalten wir die Formänderungsbedingung in physikalischer Form

$$\frac{\alpha h t}{\cos\beta} + \frac{X_1 h}{EF_1 \cos\beta} = \left(\alpha h t + \frac{X_2 h}{EF_2}\right)\cos\beta,$$

die nach Kürzung durch h und einigen Umbildungen

$$E\alpha t \sin^2\beta = \frac{X_2}{F_2}\cos^2\beta - \frac{X_1}{F_1} \quad \text{ergibt.} \tag{d}$$

Setzt man in (d) den Wert für X_2 aus (a) ein und löst man die erhaltene Gleichung in bezug auf X_1, so erhalten wir

$$X_1 = -\frac{E\alpha t \sin^2\beta}{\frac{2\cos^3\beta}{F_2} + \frac{1}{F_1}}. \tag{e}$$

Der Zähler und Nenner der Formel (e) sind an sich positiv. Das Minuszeichen vor dem rechten Teil weist aber darauf hin, daß wir die Richtung der Kräfte X_1 und X_3 (Bild 48, b) nicht richtig gewählt haben. In Wirklichkeit werden diese Kräfte Druckkräfte sein, d. h. zum Knotenpunkt hin gerichtet. Setzt man den Wert X_1 aus (e) in (a) ein, so finden wir für

$$X_2 = \frac{2\,E\alpha t \sin^2\beta\cos\beta}{\frac{2\cdot\cos^3\beta}{F_2} + \frac{1}{F_1}} \tag{f}$$

Das positive Zeichen des Ergebnisses zeigt an, daß die Richtung der Kraft X_2 richtig angesetzt worden war.

Wir multiplizieren den Zähler und Nenner der rechten Seiten der Gleichungen (e) und (f) entsprechend mit F_1 und F_2 und bezeichnen das Verhältnis $\frac{F_1}{F_2} = n$. Dann erhalten wir:

$$\left.\begin{aligned} X_1 &= -\frac{E\alpha t \sin^2\beta F_1}{2n\cos^3\beta + 1}, \\ X_2 &= \frac{2\,E\alpha t \sin^2\beta\cos\beta F_2}{2\cos^3\beta + \frac{1}{n}}, \end{aligned}\right\} \tag{g}$$

oder

$$\left.\begin{aligned} \frac{X_1}{F_1} &= \sigma_1 = -\frac{E\alpha t \sin^2\beta}{2n\cos^3\beta + 1} \\ \frac{X_2}{F_2} &= \sigma_2 = \frac{2\,E\alpha t \sin^2\beta\cos\beta}{2\cos^3\beta + \frac{1}{n}}. \end{aligned}\right\} \qquad \text{(h)}$$

Vergleicht man (g) und (h), so sehen wir, daß die Spannungen infolge der Temperaturänderung nur vom Verhältnis der Querschnittsflächen, die Kräfte aber auch von der absoluten Größe der Flächen abhängen[1]).

2.14 Einfluß von Ungenauigkeiten der Ausführung und der Montage

Bei der Ausführung von Konstruktionsteilen sind praktisch immer geringe Abweichungen von den vorgesehenen Abmessungen vorhanden. Diese Ungenauigkeiten ziehen nach der Montage der Konstruktion keine Spannungen nach sich, wenn die Konstruktion statisch bestimmt ist. Ungenauigkeiten der Ausführung in statisch unbestimmten Systemen rufen aber sogenannte Vorspannungen hervor, die bei der Montage entstehen.

Nehmen wir z. B. an, daß die Strebe AD in dem statisch bestimmten Fachwerk (Bild 49, a) etwas kürzer als in der erforderlichen Länge ausgeführt wurde. Beim Einsetzen an Ort und Stelle müssen sich die Knotenpunkte A und D nähern, und das Fachwerk erhält eine geringe Verzerrung. Da das Gelenkrechteck $ACDB$ sich frei in ein Parallelogramm umwandeln kann (ein sogenanntes veränderliches System), so wird die nicht ausreichende Länge der Strecke AD keinerlei Spannungen im System hervorrufen. Wenn wir es jedoch mit einem statisch unbestimmten Fachwerk (Bild 49, b) zu tun haben, so muß man beim Einsetzen der Strebe AD an ihren vorgesehenen Platz die Knotenpunkte A und D künst-

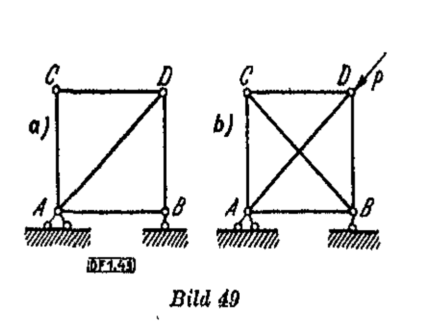


Bild 49

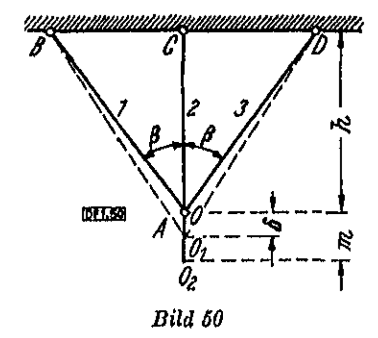


Bild 50

lich nähern, indem man hierzu eine gewisse Kraft P anbringt, die in den Stäben eine entsprechende Spannung hervorruft. Nach dem Einsetzen der Strebe und der Freimachung des Systems von der Kraft P wird sich die Strebe ein wenig dehnen, da die Knotenpunkte A und D das Bestreben haben, wieder auseinander-

[1]) Die Kräfte infolge der Wirkung der Belastung hängen nur von dem Verhältnis der Flächen ab, wie dies aus dem vorhergehenden Beispiel zu ersehen war.

zugehen. Im Endergebnis werden sich die Spannungen in den übrigen Stäben verringern. Das ganze System wird sich aber auf diese Weise als in einem angespannten Zustand befindlich erweisen. Dies werden auch die Vorspannungen infolge der Montage sein. Auf einen einfachen Fall von Vorspannungen wurde bereits in Kapitel 2.02, Absatz B, hingewiesen.

Beispiel 7

Bei der Montage eines aus drei Stäben gebildeten Systems (Bild 50) erwies sich der Stab *2* um eine geringe Strecke $\overline{OO_2} = m$ länger als vorgesehen. Um die Enden der Stäbe im Punkt *O* zu verbinden, mußte der Stab *2* vorher um die erwähnte Strecke zusammengedrückt werden, indem man eine entsprechende vertikale Kraft anbrachte. Nach der Montage und Entfernung der angebrachten Kraft bewegte sich der Knotenpunkt *O* unter dem Einfluß der Spreizwirkung des gedrückten Stabes *2* um die Strecke $\overline{OO_1} = \delta$ in senkrechter Richtung. Zu ermitteln sind die Kräfte in den Stäben, wenn ihr Werkstoff gleichartig und $F_1 = F_3$ ist. Die grundlegenden Gleichungen der drei Seiten dieser Aufgabe werden dieselben sein wie in dem Beispiel 5 des Kapitels 2.12. Hierbei wird der Wert δ mit der Verkürzung des mittleren Stabes $O_1O_2 = \Delta l_2$ und der Abhängigkeit $\delta = m - \Delta l_2$ verknüpft sein, so daß im Ergebnis die geometrische Formänderungsgleichung die Form $\Delta l_1 = \delta \cos\beta = (m - \Delta l_2)\cos\beta$ haben wird. Führt man die Lösung durch, so erhalten wir folgende Werte für die Kräfte in den Stäben:

$$X_1 = \frac{E_m \cos^2\beta\, F_1}{h\,(1 + 2n\cos^3\beta)}, \quad X_2 = -\frac{2\,E_m\, n\cos^3\beta\, F_2}{h(1 + 2n\cos^3\beta)}.$$

Wie oben, so bezeichnet auch hier n das Verhältnis $\frac{F_1}{F_2}$. Teilt man beide Teile der Gleichungen entsprechend durch F_1 und F_2, so können wir uns davon überzeugen (wie auch in dem vorhergehenden Beispiel), daß die Vorspannungen infolge der Montage nur von dem Verhältnis der Flächen, die Kräfte jedoch noch von dem absoluten Wert der Querschnittsflächen abhängen.

Nehmen wir $h = 2{,}0$ m, $\beta = 30°$, $E = 2 \cdot 10^6$ kg/cm² (Stahl), $n = 1$ und $m = 1$ mm an, so erhalten wir für

$$\sigma_1 = 325 \text{ kg/cm}^2 \text{ und } \sigma_2 = -565 \text{ kg/cm}^2.$$

Hieraus sehen wir, daß sogar eine kleine Ungenauigkeit in der Länge der Stäbe, die bei der Ausführung zugelassen wurde, bedeutende Spannungen nach der Montage hervorrufen kann. Die Vorspannungen können, wenn sie zu den von der Belastung hervorgerufenen Spannungen hinzutreten, in einer Reihe von Fällen einen ungünstigen Einfluß auf das Verhalten der Konstruktion ausüben.

Zum Schluß wollen wir noch den Sinn der Plus- und Minuszeichen in den Lösungen der Aufgaben aus diesem und den vorherigen Kapiteln erklären. Hier benutzen wir folgende allgemeine Regel, die auch sehr oft in der Baustatik angewandt wird.

1. Den unbekannten Kräften geben wir irgendeine Richtung längs ihrer Wirkungslinie, die wir in der Zeichnung durch einen Pfeil kenntlich machen.

2. Wir führen die Werte der Kräfte in die Gleichung ein, indem wir die Kräfte selbst als *an sich positive* Werte ansehen. Wenn in die Gleichungen Momente oder Komponenten von Kräften aufgenommen werden müssen, so setzen wir vor diese Vorzeichen nach den allgemeinen Regeln der Statik.

3. Wir lösen die Gleichungen in bezug auf die unbekannten Kräfte. Wenn wir für irgendeine Kraft einen negativen Wert erhalten, so weist dies auf einen Fehler der Kraftrichtung hin (da gemäß Punkt *2* die Werte der Kräfte an sich

positiv sind). In Wirklichkeit also wird die Richtung dieser Kraft umgekehrt der angenommenen sein. Es empfiehlt sich zur Vermeidung weiterer Fehler, die Richtung (den Pfeil) dieser Kraft nunmehr sofort zu ändern.

2.15 Berechnung statisch unbestimmter Systeme durch Ermittlung ihrer Tragfähigkeit

Bisher wurden die statisch unbestimmten Aufgaben auf Zug und Druck von uns unter der Annahme gelöst, daß die vorhandene Spannung in allen Elementen des gegebenen Systems die Elastizitätsgrenze nicht übersteigt. Bei der Wahl der Querschnitte benutzten wir die Festigkeitsformel:

$$\sigma_{\text{vorh}_{\max}} = \frac{P}{F} \leqq \sigma_{\text{zul}}.$$

Die zulässige Spannung soll, wie früher darauf hingewiesen worden ist, den $\frac{1}{\nu}$ ten Teil der gefährlichen Spannung (der Fließgrenze oder der Bruchgrenze) ausmachen. Als Beispiel untersuchen wir den Fall einer Last P, die an mehreren Stäben aufgehängt ist (Bild 51). Wenn wir, nachdem wir die Querschnitte aller Stäbe gewählt haben, die Last P um das ν-fache vergrößern, so erhalten wir in dem am stärksten angespannten Stab einen gefährlichen Zustand: in ihm zeigt sich die Fließerscheinung. Die Normalarbeit des Stabsystems ist gestört, aber die „*Tragfähigkeit*" des Systems, d. h. dessen Fähigkeit, die Last zu tragen, ist noch nicht erschöpft. Da das System statisch unbestimmt ist, d. h. überzählige Stäbe aufweist, so wird sich die zusätzliche Belastung nach dem Erreichen von Fließspannungen in dem am stärksten angespannten Stab auf die übrigen Stäbe verteilen, wobei in den letzteren noch kein gefährlicher Zustand zu entstehen braucht. Erhöht man die Belastung weiter, so kann man erreichen, daß der nächste Stab (der am stärksten beanspruchte) oder eine Reihe von Stäben sich von der weiteren Arbeit ausschließen usw.

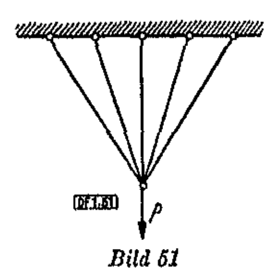


Bild 51

Hieraus sieht man, daß die Belastung, bei der die Tragfähigkeit eines statisch unbestimmten Systems erschöpft ist, bedeutend höher als die Belastung ist, die einen gefährlichen Zustand in dem am meisten angespannten Stab hervorruft.

Bisher hatten wir den gefährlichen Zustand eines Stabsystems dem gefährlichen Zustand des am stärksten angespannten Stabes gleichgesetzt. In vielen Fällen ist es jedoch naturgemäß, als gefährlichen Zustand die Grenztragfähigkeit des Systems anzusehen. Daher kann man an die Berechnung der statisch unbestimmten Systeme ein wenig anders herangehen. Man kann für das gegebene System im ganzen seine Tragfähigkeit oder die sogenannte Grenzbelastung ermitteln, d. h. die Belastung ausfindig machen, der das System noch dicht an der *Zerstörungsgrenze* standhalten kann. Dann ist es naturgemäß, als zulässige Belastung den $\frac{1}{\nu}$ ten Teil der Grenzbelastung anzunehmen. In diesem Falle also wird die Berechnung nicht unter der *Zugrundelegung von zulässigen Span-*

nungen, sondern *auf Grund zulässiger Belastungen*[1]) durchgeführt. Bei gleichem Sicherheitsbeiwert ν ergibt die Berechnung auf Grund der Tragfähigkeit eine vollkommenere Ausnutzung des Materials der Konstruktion als eine Berechnung, der die zulässigen Spannungen zugrunde liegen.

Unter der Tragfähigkeit und Zerstörungsgrenze kann man je nach Art der Konstruktion, der Bestimmung des Bauwerks und dem Material, aus dem das Bauwerk hergestellt ist, verschiedene Werte verstehen. So muß man unter der Tragfähigkeit eines Fachwerks, das aus plastischem Material ausgeführt ist, die Grenzbelastung verstehen, bei der eine Vergrößerung der Verformung (z. B. der Durchbiegung des Fachwerks) ohne weitere Erhöhung der Belastung möglich wird. Mit anderen Worten, man beobachtet anfänglich eine Zunahme der Durchbiegung des Fachwerks nur während des Zunehmens der Belastung. Im weiteren können wir jedoch einen solchen Zustand erreichen, daß in dem Fachwerk die Vergrößerung der Durchbiegung auch ohne weitere zusätzliche Belastung vor sich geht, wobei die Formänderungen in diesem Falle sehr groß werden. Die Belastung, die diesem Zustand entspricht, bestimmt die Tragfähigkeit des Fachwerks. Wenn man das gleiche Fachwerk aus sprödem Material herstellt, z. B. aus Gußeisen, das eine plötzliche Zerstörung bei sehr geringen Formänderungen ergibt, so hätte man als Tragfähigkeit die Belastung anzunehmen, bei der die Zerstörung des Fachwerks eintreten muß.

Beispiel 8

Bestimmen wir den Wert der Tragfähigkeit der statisch unbestimmten Konstruktion, die im Beispiel 4 aufgeführt ist. Dieses System stellte einen absolut starren Balken AB dar, der mit Hilfe eines Gelenks an einer Wand im Punkt A befestigt und an zwei Stahlstäben *1* und *2* gleichen Querschnitts (Bild 52) aufgehängt ist.

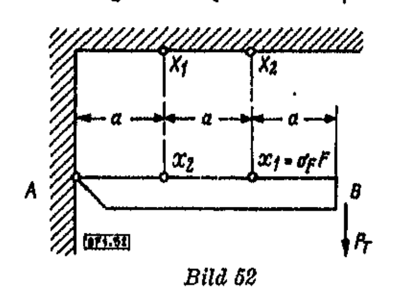


Bild 52

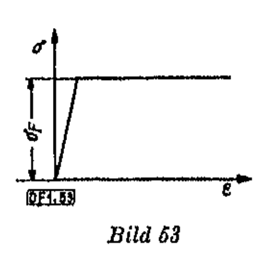


Bild 53

Stahl ist ein plastischer Werkstoff. Bei Berechnungen statisch unbestimmter Bauwerke nimmt man das Zugdiagramm des Stahls in einer ein wenig vereinfachten Form an, wie dies von Prof. *Prandtl* (Bild 53) vorgeschlagen wurde, d. h. man geht von der Annahme aus, daß der Stahl bis zur Fließgrenze σ_F elastisch ist und dem Zug gemäß dem Hookeschen Gesetz

$$\sigma = E\varepsilon$$

Widerstand bietet.

Oberhalb der Fließgrenze dehnt sich der Stahl ununterbrochen bei konstanter Spannung.

Aus der vorherigen Lösung unserer Aufgabe ist bekannt, daß der Stab *1* von einer doppelt so großen Kraft auf Zug beansprucht wird wie der Stab *2*. Aus diesem Grunde kommen

[1]) Die Berechnung der Bauwerke auf Grund ihrer Tragfähigkeit ist von Prof. *A. A. Gwosdew* und *A. F. Loleit* ausgearbeitet worden.

wir zu der Folgerung, daß die Spannung im Stab *1* bei einer gewissen Größe der Belastung die Fließgrenze erreichen wird, und daß sich der Stab bei weiterer Verformung unseres Systems gemäß dem Diagramm von *Prandtl* durch Wirkung ein und derselben Zugkraft $F\sigma_F$ verlängern wird. Die Belastung, die diesem Zustand entspricht, wird jedoch die Tragfähigkeit des Systems noch nicht charakterisieren, da das System sich ohne Erhöhung der Belastung nicht weiter verformen wird, solange noch der Stab *2* bei Spannungen, die kleiner als die Fließgrenze sind, arbeiten wird. Bei weiterer Vergrößerung der Kraft P wird auch der Stab *2* die Fließgrenze erreichen. Von diesem Moment ab werden sich beide Stäbe *1* und *2* und mit ihnen das ganze System ohne weitere Vergrößerung der Last P verformen. Dieser Zustand und die entsprechende Belastung bestimmen die *Tragfähigkeit* des Bauwerks.

Ermitteln wir die Größe der Kraft P_T, die die Tragfähigkeit unseres Systems charakterisiert. Wir führen einen Schnitt durch die Stäbe *1* und *2* (Bild 52), ersetzen ihre Wirkung auf den Balken durch die Kräfte $X_1 = X_2 = \sigma_F \cdot F$ und ermitteln aus der Gleichgewichtsbedingung die Größe der Kraft P_T. Summiert man die Momente aller Kräfte in bezug auf den Punkt A, so erhalten wir

$$\Sigma M_A = -X_2 \cdot a\, X_1 \cdot 2a + P_T \cdot 3a = 0,$$

$$-\sigma_F \cdot Fa - \sigma_F F \cdot 2a + P_T \cdot 3a = 0,$$

und hieraus

$$P_T = \sigma_F \cdot F.$$

Zur Festlegung der zulässigen Spannung muß man P_T durch einen gewissen Sicherheitsgrad teilen. Bei der Berechnung auf Grund der zulässigen Spannungen wählt man für Stahl eine Sicherheit im Verhältnis zur Fließgrenze $\nu_F = \frac{\sigma_F}{\sigma_{zul}}$. Wählen wir auch den gleichen Sicherheitsgrad bei unserer Berechnung. In diesem Falle wird

$$P_{zul} = \frac{P_T}{\nu_F} = \frac{\sigma_F F}{\nu_F}.$$

Wir benutzen die Ergebnisse der Lösung der Aufgabe in Kapitel 2.12 und ermitteln die Größe der zulässigen Beanspruchung bei der Wahl der Stabquerschnitte auf Grund der zulässigen Spannungen. In der vorherigen Lösung ergab sich

$$X_1 = 1{,}2\, P.$$

Bei der Wahl der Querschnitte muß mit der zulässigen Spannung

$$\sigma_{zul} = \frac{\sigma_F}{\nu_F}$$

gerechnet werden. Die Festigkeitsgleichung sieht dann wie folgt aus:

$$\frac{X_1}{F} = \frac{1{,}2\, P}{F} \leqq \frac{\sigma_F}{\nu_F}.$$

Hieraus folgt

$$1{,}2\, P'_{zul} = \frac{\sigma_F F}{\nu F}$$

oder

$$P'_{zul} = \frac{\sigma_F F}{1{,}2\,\nu_F}.$$

Demnach ist die auf Grund der zulässigen Spannungen berechnete zulässige Belastung kleiner als die mit Hilfe der Berechnung der Tragfähigkeit gefundene Belastung:

$$P'_{zul} < P_{zul}.$$

Bei der Lösung der Aufgabe und Festlegung der zulässigen Belastung haben wir, indem wir von der Tragfähigkeit ausgingen, keine Schwierigkeiten wegen der statischen Unbestimmtheit des Bauwerks empfunden. Auf Grund der Materialersparnis, die sich durch die neue Berechnungsart ergibt, und wegen der Einfachheit der Lösung der Aufgabe gewinnt diese Methode eine immer größer werdende Anzahl von Anhängern. Die neuen Normen für das Entwerfen von Stahlbetonkonstruktionen in der Sowjetunion sind ebenfalls auf dieser Methode aufgebaut.

Beispiel 9

An ein System von drei gelenkig verbundenen Stahlstäben, dessen Stäbe in einem Punkt zusammenlaufen (Bild 54), ist eine Kraft P angebracht. Die Querschnitte aller Stäbe sind gleich. Es soll die Größe der Kraft ermittelt werden, die der Tragfähigkeit des Systems entspricht.

Der angespannte Stab AO erreicht als erster den Fließzustand. Hiervon kann man sich überzeugen, wenn man die statisch unbestimmte Aufgabe in bezug auf das gegebene

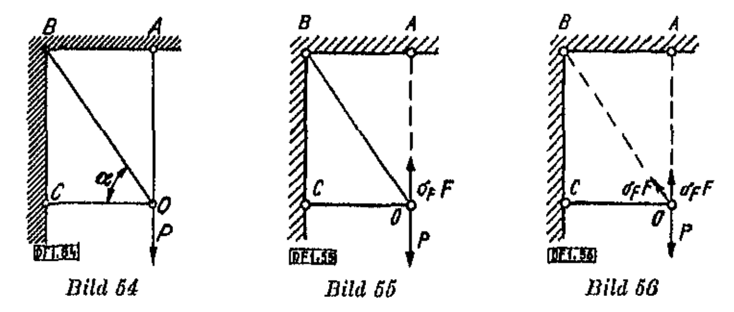


Bild 54 *Bild 55* *Bild 56*

System löst. Entfernt man den Stab und ersetzt man seine Wirkung auf den Knotenpunkt O durch die Kraft $\sigma_F F$, so finden wir (Bild 55), daß der Stab BO als nächster in den Fließzustand kommen wird. Entfernt man auch diesen Stab und ersetzt seine Wirkung durch die Kraft $\sigma_F F$, so sehen wir, daß sich unser System (Bild 56) in einen Mechanismus umgewandelt hat und folglich seine Tragfähigkeit schon erschöpft ist. Hierbei wird sich der Stab CO noch nicht im Fließzustand befinden. Es ist nicht schwer festzustellen, daß die gesuchte Größe der Belastung

$$P_T = F\sigma_F(1 + \sin\alpha)$$

sein wird.

Aus diesem Beispiel sehen wir, daß es Systeme gibt, bei denen die Tragfähigkeit zu einer Zeit erschöpft wird, noch bevor alle Stäbe den Fließzustand erreicht haben.

2.10 Zug und Druck infolge des Eigengewichts Balken gleicher Festigkeit gegen Druck

A. Bisher haben wir die Fälle des Ziehens und Drückens eines prismatischen Balkens behandelt, die durch eine von außen wirkende Kraft hervorgerufen wurden. Der Einfluß des Eigengewichts wurde hierbei nicht berücksichtigt. Befassen wir uns jetzt mit dem Einfluß des Eigengewichts auf die Spannungen und Formänderungen beim Zug und Druck. In Bild 57 ist ein Balken dargestellt, dessen oberes Ende eingespannt ist und der infolge seines Eigengewichts auf Zug

beansprucht wird. Wir bezeichnen die Querschnittsfläche des Balkens mit F und das Gewicht der Volumeneinheit des Werkstoffs mit γ_0. Wir zerschneiden den Balken in der Ebene $m-n$, entfernen den unteren Teil und ersetzen dessen Wirkung auf den oberen Teil durch eine Kraft (Bild 58), die offenbar

$$P = \gamma_0 F x$$

sein wird. Da diese Kraft in bezug auf den verbliebenen Teil als äußere Kraft erscheint, so kann die Spannung am Schnitt $m-n$ nach der Formel (2.1) berechnet werden:

$$\sigma = \frac{P}{F} = \frac{\gamma_0 F x}{F} = \gamma_0 x \tag{2.21}$$

Die Spannung im oberen Querschnitt, an der Einspannungsstelle, erhalten wir, indem wir in die vorhergehende Formel $x = l$ einsetzen:

$$\sigma_{max} = \gamma_0 l.$$

Verläuft die Zugbeanspruchung nur bis zur Proportionalitätsgrenze, so kann man die Gesamtformänderung des Balkens ermitteln. Die Dehnung in einem be-

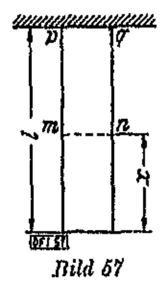


Bild 57

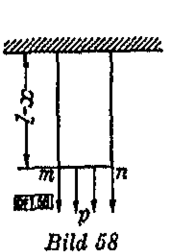


Bild 58

liebigen Punkt, der in einem Abstand x vom unteren Ende entfernt ist, wird gemäß dem Hookeschen Gesetz nach der Formel (2.4) wie folgt ausgedrückt:

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} = \frac{\gamma_0 x}{E}.$$

Die absolute Verlängerung des Elements dx (Bild 59) ist

$$\varepsilon\, dx = \frac{\gamma_0 x}{E}\, dx.$$

Die Gesamtverlängerung des Balkens setzt sich aus den Verlängerungen der einzelnen Elemente zusammen:

$$\Delta l = \int_0^l \varepsilon\, dx = \frac{\gamma_0}{E}\int_0^l x\, dx = \frac{\gamma_0 l^2}{2E} \tag{2.22}$$

Durch Multiplizieren des Zählers und Nenners der erhaltenen Formel mit F erhalten wir unter der Berücksichtigung, daß $\gamma l F$ das Gewicht Q des Balkens darstellt, für

$$\Delta l = \frac{\lambda_0 l^2}{2E} \cdot \frac{F}{F} = \frac{Q l}{2EF}. \tag{2.23}$$

Folglich hat sich die Verlängerung des Balkens infolge seines Eigengewichts als halb so groß erwiesen, als beim Zug unter der Einwirkung einer am unteren Schnitt des Balkens ansetzenden äußeren Kraft $P = Q$.

B. Befassen wir uns jetzt mit der Aufgabe, die Form zu ermitteln, die man einem Balken gleicher Festigkeit (σ_c = const = σ_{zul}) geben muß, wenn er durch sein Eigengewicht und die Belastung P, die auf seinem oberen Ende angebracht ist, auf Druck beansprucht wird (Bild 60).

Von der Festigkeitsformel ausgehend, können wir die Größe der Querschnittsfläche F_0 am oberen Ende unseres Balkens ermitteln:

$$\frac{P}{F_0} = \sigma_c, \qquad P = F_0 \sigma_c.$$

Ferner bezeichnen wir die Querschnittsfläche im Abstand x vom Koordinatenanfangspunkt mit F_x, das Gewicht des Balkenteils oberhalb des Schnittes mn

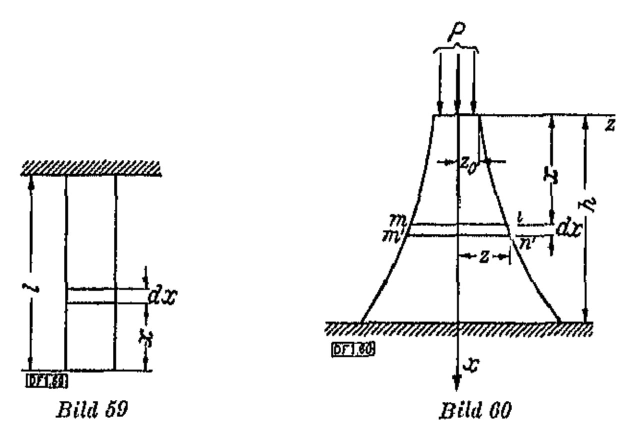


Bild 59 *Bild 60*

mit Q_x und das Raumgewicht mit γ_0. Da die Spannung in allen Querschnitten gleich σ_c sein soll, so muß auch

$$F_x \sigma_c = P + Q_x \tag{2.24}$$

sein.

Im folgenden Querschnitt $m'n'$, der von dem Schnitt mn um den Abstand dx entfernt ist, ergibt sich eine Vergrößerung der Belastung um den Wert $F_x \gamma_0 \, dx$, folglich muß auch die Querschnittsfläche eine Zunahme dF_x erfahren.

Es muß

$$(F_x + dF_x)\sigma_c = P + Q_x + F_x \gamma_0 \, dx \tag{2.25}$$

sein. Zieht man von (2.25) die Gleichung (2.24) ab, so erhalten wir

$$\sigma_c \, dF_x = F_x \gamma_0 \, dx$$

oder

$$\frac{dF_x}{F_x} = \frac{\gamma_0}{\sigma_c} \, dx.$$

Somit haben wir eine Differentialgleichung erhalten. Durch Integrieren derselben finden wir das Gesetz der Änderung der Querschnittsfläche F_x längs der Höhe des Balkens:

$$\ln F_x = \frac{\gamma_0}{\sigma_c} x + C$$

oder

$$F_x = e^{\frac{\gamma_0}{\sigma_c} x + C} = C_0 e^{\frac{\gamma_0}{\sigma_c} x}.$$

Die Integrationskonstante C_0 ermitteln wir aus der Bedingung, daß bei $x = 0$ die Fläche $F_{x=0} = F_0 = \frac{P}{\sigma_c}$ ist, woraus sich $C_0 = F_0$ ergibt. Endgültig wird

$$F_x = F_0 e^{\frac{\gamma_0}{\sigma_c} x}. \tag{2.26}$$

Wenn man an Stelle eines Balkens eine Wand betrachtet, die oben gleichmäßig belastet ist, so erhalten wir, wenn wir aus ihr mittels zweier senkrecht geführter Querschnitte einen Teil herausschneiden, der in der Längsrichtung (senkrecht zur Bildebene) die Abmessung 1 hat, für

$$F_x = 2z \cdot l \quad \text{und} \quad F_0 = 2z_0 \cdot l.$$

Diese Werte in (2.26) eingesetzt, ergeben die Gleichung der Kurve, die die Form unserer Wand bestimmt:

$$Z = z_0 e^{\frac{\gamma_0}{\sigma_c} x}. \tag{2.27}$$

Ein Balken, der die Bedingung erfüllt, daß in allen seinen Querschnitten gleiche Spannungen wirken, trägt die Bezeichnung *Balken gleicher Festigkeit.*

3 Weitere Zug- und Druckuntersuchungen im elastischen Bereich. Schub

3.01 Spannungen an schrägen Schnitten

A. Bisher haben wir uns nur für die Spannungen in den Normalschnitten des gezogenen (oder gedrückten) Balkens und für seine Verlängerung in der Längsrichtung interessiert. Jetzt ist es nötig, unsere Untersuchungen zu vertiefen und die Spannungen zu behandeln, die in einem beliebigen schrägen Schnitt des Balkens auftreten. Es ist auch sehr wichtig, die Formänderungen vollständiger zu studieren, die im Balken beim Zug und Druck entstehen. Im Ergebnis werden wir finden, daß es im Balken beim einfachen Zug sowohl Normal- als auch Tangentialspannungen gibt. Gleichzeitig ergeben sich neben den Verlängerungen auch Schiebungen (Kapitel 1.5, Absatz C).

Wenden wir die Methode des Schnitts bei folgender Aufgabe an. Ein prismatischer Balken befindet sich unter der Einwirkung von Zugkräften, die am Querschnitt Normalspannungen σ_y hervorrufen. Klären wir, welche Spannungen an schrägen Flächenelementen auftreten, die unter dem Winkel α geneigt sind (Bild 61). Zu diesem Zweck gehen wir wie folgt vor:

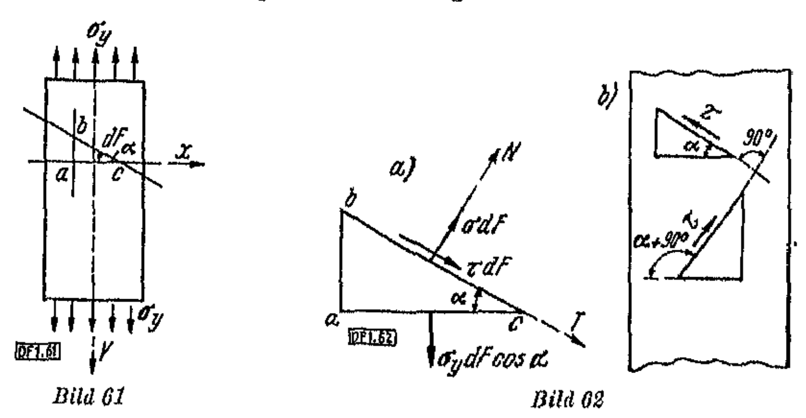


Bild 61 *Bild 62*

1. Wir zerschneiden (in Gedanken) unseren Balken durch drei Ebenen, die so gewählt werden, daß
   a) eine senkrecht zur Richtung der Kräfte,
   b) eine parallel zur Richtung der Kräfte und
   c) eine zur Querschnittsebene (zur x-Achse) unter dem Winkel α geneigt liegt.

2. Wir entfernen alle Teile mit Ausnahme des Prismas abc und nehmen an, daß das Flächenelement $bc = dF$ (Bild 62, a) ist. Dann ist

$$\text{das Flächenelement } ac = dF \cos\alpha$$
$$\text{und das Flächenelement } ba = dF \sin\alpha.$$

3. Wir ersetzen die Wirkung der fortgenommenen Teile auf den verbliebenen durch Kräfte.

Am Flächenelement ac wird offenbar nur eine Normalkraft wirken.

$$\sigma_y \, dF \cos\alpha.$$

Am Flächenelement ab werden keine Kräfte wirken. Wenn wir tatsächlich mit Hilfe von ab-ähnlichen Längsschnitten den ganzen Balken in einzelne Fasern zerschneiden, so würde das erhaltene Faserbündel infolge der gleichmäßigen Verteilung der Spannungen an den Endquerschnitten des Balkens genau so arbeiten wie ein ganzer Balken. Die einzelnen Fasern würden aufeinander weder Druck ausüben noch aufeinander gleiten. Dies bedeutet, daß es zwischen ihnen weder Normal- noch Tangentialspannungen geben wird.

Am Flächenelement bc werden im allgemeinen zwei Kräfte wirken, und zwar die Normalkraft σdF und die Tangentialkraft τdF, worin mit σ und τ die gesuchten Spannungen bezeichnet sind: Die Normal- und die Tangentialspannung.

4. Wir stellen die Gleichgewichtsgleichungen auf, indem wir die Projektionen aller Kräfte auf die Achse N gleich Null setzen; wir erhalten

$$\sigma \, dF - \sigma_y \, dF \cos\alpha \cos\alpha = 0$$

oder nach Kürzung durch dF

$$\sigma = \sigma_y \cos^2\alpha = \frac{\sigma_y}{2}(1 + \cos 2\alpha).$$

Nehmen wir ferner die Projektion der Kräfte auf die Achse T

$$\tau \, dF + \sigma_y \, dF \cos\alpha \sin\alpha = 0,$$

aus der sich nach Kürzung durch dF

$$\tau = -\sigma_y \cos\alpha \sin\alpha = -\frac{\sigma_y}{2}\sin 2\alpha$$

ergibt.

Da wir die Richtung der Kräfte $\sigma \, dF$ und $\tau \, dF$ in Richtung der Achsen N und T angenommen haben, so weist das Minuszeichen in der Formel für den Wert der Tangentialspannung τ darauf hin, daß die Richtung dieser Spannung falsch angenommen wurde und daß sie nach der entgegengesetzten Seite gerichtet sein wird. Wir erhalten also folgende Formeln für die Spannungen am schrägen Flächenelement, das unter dem Winkel α zum Querschnitt geneigt ist:

$$\left.\begin{aligned} \sigma &= \frac{\sigma_y}{2}(1 + \cos 2\alpha), \\ \tau &= -\frac{\sigma_y}{2}\sin 2\alpha. \end{aligned}\right\} \qquad (3.1)$$

Wir haben die Abmessungen des Flächenelements nicht begrenzt. Unsere Ableitungen sind für beliebige Abmessungen gültig. Im allgemeinen werden wir

jedoch das Flächenelement als unendlich klein ansehen. Wir wollen das Flächenelement bc parallel zu sich selbst in Richtung zum Punkt a hin bewegen. Dann werden sich im Grenzfall alle drei Flächenelemente in dem einen Punkt a schneiden, und wir haben das Recht zu sagen, daß wir die Spannungen *an einem beliebigen Flächenelement bc untersuchen, das durch den Punkt a geht* und im Winkel α zur O_x-Achse geneigt ist.

Aus den Gleichungen (3.1) geht hervor, daß die Spannungen σ und τ Funktionen von α sind, d. h. sie ändern sich mit der Änderung der Neigung des Flächenelements bc. Es ist sehr wichtig, festzustellen, bei welchen Werten des Winkels α die Spannungen σ und τ ihre größten Werte erreichen.

Da die rechten Seiten der Gleichungen nur von $\sin 2\alpha$ und $\cos 2\alpha$ abhängen, so finden wir leicht, daß sich σ_{max} bei $\cos 2\alpha = 1$, d. h. bei $2\alpha = 0$ ergibt, weshalb $\alpha = 0$ sein muß. Folglich wird

$$\sigma_{max} = \sigma_y. \tag{3.2}$$

σ_{min} ergibt sich bei $\cos 2\alpha = -1$; hieraus wird $2\alpha = 180°$, $\alpha = 90°$ und

$$\sigma_{min} = 0. \tag{3.3}$$

τ_{max} erhält man bei $\sin 2\alpha = -1$, d. h. bei $2\alpha = -90°$ oder $\alpha = -45°$, demnach ist

$$\tau_{max} = \frac{\sigma_y}{2}. \tag{3.4}$$

Aus (3.2) ersehen wir, daß sich beim einfachen Zug (Druck) die größte Normalspannung stets im Querschnitt des Balkens ergibt. Die Gleichung (3.3) zeigt, daß es im Längsschnitt keine Normalspannungen gibt, wie wir dies auch anfänglich angenommen haben. Als sehr wichtig für das Weitere ist die Ableitung (3.4) anzusehen, die darauf hinweist, daß sich *beim einfachen Zug die größten Tangentialspannungen an einem Schnitt ergeben, der im Winkel von 45° zur Balkenachse geneigt ist, und daß sie gleich der Hälfte der Zugspannung sind.*

Die hier angewandte und mit dem Herausschneiden eines unendlich kleinen Prismas abc verbundene Methode ist die allgemeine Untersuchungsmethode des Spannungszustandes in einem gegebenen Punkt. Im weiteren werden wir sie beim Studium von komplizierteren Fällen noch oft benutzen.

B. Leiten wir das Gesetz der Wechselwirkung der Tangentialspannung ab. Die zweite der Gleichungen (3.1) gibt den Wert der Tangentialspannung am Flächenelement an, das unter dem Winkel α zum Querschnitt geneigt ist:

$$\tau = -\frac{\sigma_y}{2}\sin 2\alpha.$$

Untersuchen wir, welcher Art die Tangentialspannung am Flächenelement ist, das im Winkel $\alpha + 90°$ geneigt ist (Bild 62, b). Zu diesem Zweck setzen wir in die Formel (3.1) den Wert des neuen Winkels ein; dann wird

$$\tau = -\frac{\sigma_y}{2}\sin 2(\alpha + 90°) = -\frac{\sigma_y}{2}\sin(2\alpha + 180°) = \frac{\sigma_y}{2}\sin 2\alpha, \tag{3.5}$$

d. h. *die Tangentialspannungen an zwei Flächenelementen, die einen Winkel von 90° einschließen, sind der Größe nach gleich. Diese Abhängigkeit nennt man das*

Gesetz der Gegenseitigkeit der Tangentialspannungen. Im weiteren (Abschnitt 3.07) werden wir sie im allgemeinsten Falle betrachten und ausführlicher die *Richtung der gegenseitigen Tangentialspannungen* untersuchen.

C. Es ist erforderlich, eine Bemerkung hinsichtlich der Vorzeichen der Spannungen bei der Ableitung der Gleichungen (3.1) zu machen. Die Richtungen der Spannungen haben wir in dem Bild 62, a für den Fall angenommen, bei dem $\alpha < 90°$ ist, und haben diese, indem wir sie als an sich positiv ansahen, in die Gleichgewichtsgleichungen des elementaren Prismas abc eingeführt. Die Gleichungen (3.1) werden jedoch, wie wir eben gesehen haben, auch bei einem Winkel, der größer als 90° ist, angewandt. Es entsteht die Frage, welchen Richtungen die positiven Werte der Spannungen σ und τ entsprechen, die sich in diesem Falle aus den Gleichungen (3.1) ergeben. Zur Beantwortung dieser Frage betrachten wir zwei Flächenelemente bc in ein und demselben Balken, die etwas weniger und etwas mehr als 90° zum Querschnitt geneigt sind (Bild 63, a und b). Beim Übergang des Winkels α über den Wert von 90° hinaus müssen alle Spannungen des Falles gemäß Bild 63, a kontinuierlich in die Spannungen des Falles gemäß Bild 63, b übergehen.

Die Spannung σ_y drückt in beiden Fällen die Wirkung des unteren (abgetrennten) Teils auf den oberen aus. Daher wird seine Richtung in beiden Fällen gleich sein. Was jedoch die Spannungen σ und τ am schrägen Flächenelement bc betrifft, so werden diese im Falle a die Wirkung der rechten Seite auf die linke ausdrücken, im Falle b jedoch umgekehrt. Es ist daher erforderlich, beim Übergang vom Fall a auf den Fall b (Bild 63) die Richtungen der Spannungen in die entgegengesetzten zu ändern, wenn wir erreichen wollen, daß sich bei diesem Übergang die Regel der Vorzeichen für die Spannungen in den Formeln (3.1) nicht ändert.

Wenn am Flächenelement ab die Spannungen σ_x und τ_x angebracht wären (Bild 63, a), so müßte man beim Übergang α über 90° hinaus ihre Richtungen aus den gleichen Überlegungen ebenfalls ändern. Wir erhalten folgende Regel:

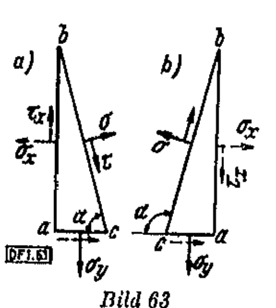


Bild 63

Erster Fall: $\alpha < 90°$; wenn die Formeln (3.1) für σ und τ positive Werte liefern, so sind sie wie in Bild 63, a gerichtet; wenn sich aber irgendeine von ihnen als negativ ergibt, so ist ihre Richtung umgekehrt der in Bild 63, a dargestellten.

Zweiter Fall: $90° < \alpha < 180°$; wenn wir auf Grund von (3.1) $\sigma > 0$ und $\tau > 0$ erhalten, so sind sie wie in Bild 63, b gerichtet.

Bei anderen Vorzeichen ändern sich ihre Richtungen entsprechend. Wenn eine andere Richtung der Spannung σ_y als in Bild 63 gegeben ist, so muß ihr Vorzeichen in den Gleichungen (3.1) entsprechend geändert werden.

Bei der Ableitung der Formeln (3.1) ist die Ablesungsrichtung des Winkels α im Sinne des Uhrzeigers angenommen, wie dies manchmal gemacht wird. Wenn man die Ablesung des Winkels α nach den Regeln der Trigonometrie im Gegensinne des Uhrzeigers vornimmt, so muß an Stelle von α der Winkel $180° - \alpha$

eingesetzt werden. Die erste Formel (3.1) ändert sich dabei nicht, die zweite dagegen ändert ihr Vorzeichen in das umgekehrte, da

$$\cos 2(180° - \alpha) = \cos 2\alpha \quad \text{und} \quad \sin 2(180° - \alpha) = -\sin 2\alpha,$$

demnach

$$\left.\begin{aligned} \sigma &= \frac{\sigma_y}{2}(1 + \cos 2\alpha) \\ \tau &= \frac{\sigma_y}{2}\sin 2\alpha \end{aligned}\right\} \text{ist.} \tag{3.1a}$$

3.02 Relativer Schub und Hookesches Gesetz für Schubspannungen

A. Bisher befaßten wir uns mit linearen Formänderungen und haben dabei eine Abhängigkeit dieser Formänderungen von den Kräften gefunden. Versuchen wir, ob man nicht eine Abhängigkeit zwischen den Kräften und den Winkeldeformationen finden kann. Zu diesem Zweck setzen wir die Untersuchung der in Abschnitt 3.01 begonnenen Aufgabe fort. Die Gleichungen der Statik gaben uns die Abhängigkeiten (3.1) zwischen der Normalspannung σ_y am Querschnitt und den Spannungen σ und τ an einem unter beliebigem Winkel α geführten schrägen Schnitt

$$\sigma = \sigma_y \cos^2\alpha, \quad \tau = \sigma_y \sin\alpha \cos\alpha.$$

In der zweiten dieser Gleichungen haben wir das Vorzeichen geändert, und entsprechend hierzu müssen wir die Richtung der Schubspannung (Tangentialspannung) τ umkehren.

Untersuchen wir die Deformationen, die beim Zug des Balkens in dem Prisma abc (Bild 64, a) entstehen. Da die Abmessung des Flächenelements $bc = dF$ keinen Einfluß hat, so nehmen wir sie, der Einfachheit wegen, gleich 1 an (Bild 64, a):

$$bc = 1; \quad ab = 1 \cdot \sin\alpha; \quad ac = 1 \cdot \cos\alpha.$$

Beim Zug des Balkens wird die Kante ab des Prismas parallel zur Achse des Balkens (d. h. vertikal) bleiben und die absolute Verlängerung (Bild 64, b)

$$bb_1 = \varepsilon_y \cdot ab = \varepsilon_y \sin\alpha \tag{3.6}$$

erhalten.

Wegen der Querdeformation, die eine Begleiterscheinung des Zugs eines Balkens ist, erhält die Kante ac eine negative Verlängerung, deren absolute Größe

$$cc_1 = |\varepsilon_x|\, ac = |\varepsilon_x|\, 1 \cdot \cos\alpha = \mu\varepsilon_y \cos\alpha \tag{3.6a}$$

ist, wobei mit $|\varepsilon_x|$ der absolute Wert der Dehnung ε_x (die beim Zug negativ ist) bezeichnet ist. Es ist leicht zu erkennen (Bild 64, b), daß infolge der oben erwähnten Formänderungen der Kanten ab und ac sich die Kante bc ein wenig um den Winkel β dreht. Diesen Drehwinkel kann man ohne Mühe mit einer Genauigkeit bis zu kleinen Größen höherer Ordnung berechnen. Wenn wir mit bb_2 und c_2c_1 die Projektionen der Verlängerungen bb_1 und cc_1 auf die Senkrechte zur Kante bc bezeichnen, so erkennt man aus dem Bild 64, b, daß

$$\beta \approx \frac{bb_2 + c_2c_1}{bc} = bb_2 + c_2c_1 \quad \text{ist.} \tag{3.7}$$

Aber aus den elementaren Dreiecken $b b_1 b_2$ und $c c_1 c_2$ erhalten wir ebenfalls mit einer Genauigkeit bis zu Kleinstwerten höherer Ordnung die Werte für

$$b b_2 = b b_1 \cos \alpha; \quad c_1 c_2 = c c_1 \sin \alpha,$$

oder auf Grund von (3.6) und (3.6a)

$$b b_2 = \varepsilon_y \sin \alpha \cos \alpha;$$

$$c_1 c_2 = \mu \varepsilon_y \sin \alpha \cos \alpha.$$

Setzen wir diese Werte in (3.7) ein, so erhalten wir die gesuchte Ableitung von der geometrischen Seite der Aufgabe her in Form einer Abhängigkeit zwischen der Grundverlängerung ε_y und dem Drehwinkel β des geneigten Abschnittes $b c$:

$$\beta \approx (1 + \mu)\, \varepsilon_y \sin \alpha \cos \alpha. \tag{3.8}$$

Werten wir jetzt die durch das Hookesche Gesetz ausgedrückte physikalische Seite der Aufgabe aus:

$$\sigma_y = E \varepsilon_y$$

oder

$$\varepsilon_y = \frac{\sigma_y}{E}.$$

Setzt man den Wert ε_y in (3.8) ein, so erhalten wir

$$\beta \approx \frac{1 + \mu}{E}\, \sigma_y \sin \alpha \cos \alpha. \tag{3.9}$$

Die erhaltene Synthese (3.9) der drei Seiten der Aufgabe nimmt eine einfachere Form an, wenn wir die zweite der Gleichungen (3.1) benutzen; dann erhält (3.9) das Aussehen:

$$\beta = \frac{1 + \mu}{E}\, \tau. \tag{3.10}$$

Diese Beziehung weist auf das Vorhandensein einer Proportionalität zwischen der Tangentialspannung τ, an einem beliebig geneigten Flächenelement, und dem Drehwinkel β dieses Flächenelements hin. Besonders wichtig ist der Umstand, daß diese Beziehung nicht vom Neigungswinkel α des Flächenelements abhängt, sondern lediglich von den physikalischen Koeffizienten E und μ, die die Eigenschaften des Materials charakterisieren, aus dem der Balken gefertigt ist. Sie ist also der äußeren Form und ihrem physikalischen Wesen nach analog dem Hookeschen Gesetz, das durch die Gleichung

$$\sigma = E \varepsilon$$

ausgedrückt wird.

Diese Analogie verstärkt sich noch, wenn wir an Stelle des Drehwinkels β den Schubwinkel γ (Kapitel 1.5, Absatz C) einführen. Schneiden wir aus dem auf Zug beanspruchten Balken mit Hilfe von vier Ebenen ein elementares rechteckiges Prisma $m n p q$ (Bild 65) heraus, so werden gemäß dem Gesetz der Gegenseitigkeit der Tangentialspannungen (Schubspannung) (Kapitel 3.01, Absatz B) an zwei benachbarten Kanten $m n$ und $n p$ gleiche Schubspannungen τ wirken. Auf Grund von (3.10) werden sich also diese Kanten um den gleichen Winkel $\beta = \frac{1 + \mu}{E}\tau$ drehen, jedoch in verschiedenen Richtungen: die Kante $n m$ im Sinne des Uhrzeigers, aber die Kante $n p$ im Gegensinne. Der rechte Winkel $m n p$

wird sich daher um 2β vergrößern. Dies ist der Schubwinkel $\gamma = 2\beta$. Hieraus erhalten wir auf Grund von (3.10):

$$\gamma = \frac{2(1+\mu)}{E}\,\tau$$

und ferner
$$\tau = G \cdot \gamma, \tag{3.11}$$

worin
$$G = \frac{E}{2(1+\mu)} \tag{3.11a}$$

ist. Auf diese Weise gibt die Gleichung (3.11) die Abhängigkeit zwischen dem Deformationswinkel γ und der Schubspannung τ ähnlich dem Hookeschen Gesetz beim Zug ($\sigma = E\varepsilon$) an. Diese Abhängigkeit trägt die Bezeichnung Hookesches

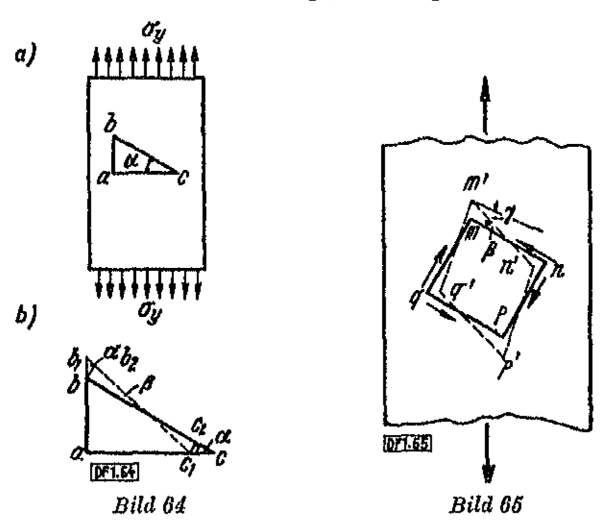


Bild 64 *Bild 65*

Gesetz *für Schub*. Der Wert G heißt *Elastizitätsmodul zweiter Art* (beim Schub) oder *Schubmodul*. Der Modul G erscheint wie auch der Modul E als physikalische Charakteristik des gegebenen Werkstoffs, dessen Größe für verschiedene Werkstoffe nicht schwer zu bestimmen ist, wenn man E und μ kennt. Nimmt man für $\mu = \frac{1}{3}$ an (dies trifft für Metalle zu), so ist $G \approx {}^3/_8 E$. In Tafel 8 (Seite 76) sind die Werte der Module E und G und der Poissonschen Zahl μ für verschiedene Werkstoffe angegeben.

B. Als Ergebnis des Studiums des einfachen Zugs und Drucks eines Balkens stellen wir fest, daß wir es hier erstens mit zwei Spannungskomponenten σ und τ zu tun haben, und zweitens, daß bei diesem äußerst einfachen Vorgang beide Komponenten der Formänderung, die lineare Formänderung ε und die Winkeländerung γ, in Erscheinung treten. Bei der Untersuchung der physikalischen Seite der Aufgabe erhielten wir sehr wichtige Beziehungen zwischen den Spannungen und Formänderungen (2.4) und (3.11):

$$\sigma = E\varepsilon, \quad \tau = G\gamma.$$

Tafel 8

Werte des Elastizitätsmoduls, des Schubmoduls und der Poissonschen Zahl[1][2]

Bezeichnung des Werkstoffs	Elastizitätsmodul $E \cdot 10^{-6}$ in kg/cm²	Schubmodul $G \cdot 10^{-5}$ in kg/cm²	Poissonsche Zahl μ
Gußeisen	1,15 ··· 1,60	4,5	0,23 ··· 0,27
Schmiedbares Gußeisen	1,55	—	—
Schmiedeeisen	1,6 ··· 2,0	7,7	0,28
Flußeisen und kohlenstoffhaltige Stähle	2,0 ··· 2,1	8,1	0,24 ··· 0,28
Chromnickelstähle	2,1	8,1	0,25 ··· 0,30
Kupfer, gewalzt	1,1	4,0	0,31 ··· 0,34
Kupfer, kalt gezogen	1,3	4,9	—
Kupfer, Guß	0,84	—	—
Phosphor-Bronze, gewalzt	1,15	4,2	0,32 ··· 0,35
Messing, kalt gezogen	0,91 ··· 0,99	3,5 ··· 3,7	0,32 ··· 0,42
Aluminium, gewalzt	0,99	2,6 ··· 2,7	0,32 ··· 0,36
Aluminium-Draht, gezogen	0,7	—	—
Duraluminium, gewalzt	0,71	2,7	—
Zink, gewalzt	0,84	3,2	0,27
Blei	0,17	0,70	0,42
Eis	0,04 ··· 0,045	0,16 ··· 0,13	0,33
Glas	0,56	2,2	0,25
Granit	0,49	—	—
Kalkstein	0,42	—	—
Marmor	0,56	—	—
Sandstein	0,18	—	—
Mauerwerk:			
aus Granit	0,09 ··· 0,1	—	—
„ Kalkstein	0,06	—	—
„ Ziegelstein	0,27 ··· 0,030	—	—
Holz, längs der Faser	0,1 ··· 0,12	0,055	—
Holz, quer zur Faser	0,05 ··· 0,01	—	—
Beton, verschiedene Gütemarken	0,14 ··· 0,5	—	0,17
Kautschuk	0,00008	—	0,47

Die Aufstellung dieser Abhängigkeiten ist, wie bereits in Kapitel 1.6 erwähnt, eine der wichtigsten Aufgaben der Theorie der Festigkeitslehre. Ferner entdeckten wir *drei physikalische Koeffizienten*

$$E, \mu, G,$$

die die elastischen Eigenschaften des Werkstoffs charakterisieren. Zwischen diesen besteht die Abhängigkeit (3.11a)

$$G = \frac{E}{2(1+\mu)},$$

die darauf hinweist, daß nur zwei von diesen Koeffizienten durch Versuch ermittelt zu werden brauchen, während der dritte nach (3.11a) berechnet werden kann.

[1] Diese Tafel ist aus dem Buch „Festigkeitslehre", 1945, vom Prof. *N. M. Beljaew* übernommen.
[2] *Anm. d. deutschen Redaktion:* Die durch deutsche Versuche gezeitigten Ergebnisse entsprechen etwa den hier angegebenen Werten. Abweichungen und Schwankungen erklären sich aus Differenzen der Werkstoffzusammensetzung.

In den folgenden Kapiteln werden wir eine kompliziertere Aufgabe über den Zug und Druck des Balkens in zwei und drei Richtungen untersuchen. Diese Aufgabe ist im Sinne des Aufbaus einer allgemeinen Theorie über den Widerstand von elastischen Körpern gegen die Einwirkung von Kräften sehr wichtig. Sie ermöglicht es, die physikalischen Beziehungen zwischen den Spannungen und Deformationen für den Fall der kompliziertesten Wirkung von Kräften auf einen elastischen Körper zu verallgemeinern. Wie kompliziert die Arbeitsbedingungen eines elastischen Körpers auch sein mögen, so werden wir im weiteren doch sehen, daß man in Gedanken in jedem Punkt desselben ein sehr kleines Element in Form eines rechtwinkligen Parallelepipeds herausschneiden kann, das lediglich in zwei oder drei Richtungen gezogen oder gedrückt wird. Dank diesem Umstand kann man den kompliziertesten Spannungszustand in der Nähe eines beliebigen Punktes des Körpers auf eine Aufgabe zurückführen, deren Untersuchung wir gleich in Angriff nehmen wollen.

3.03 Zug bzw. Druck in zwei Richtungen

A. Lösen wir eine Aufgabe, die der in Kapitel 3.01 aufgeführten ähnlich ist, für den komplizierteren Fall, daß sich der rechteckige Balken unter der Einwirkung von Kräften befindet, die ihn in zwei Richtungen auf Zug beanspruchen, wobei die entsprechenden Spannungen gleich σ_x und σ_y sind (Bild 66).

Bild 66

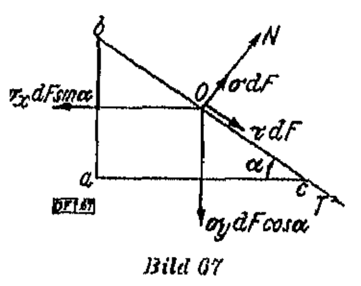


Bild 67

Wir zerschneiden den Balken mittels dreier Ebenen, entfernen alles außer lem Prisma abc, ersetzen die Wirkung der entfernten Teile durch Kräfte (Bild 67) ınd untersuchen die Gleichgewichtsbedingungen des Prismas abc.

Nehmen wir an, daß das Flächenelement $bc = dF$ ist. Dann ist das Flächenılement $ac = dF \cos\alpha$ und das Flächenelement $ba = dF \sin\alpha$. Am Flächenılement bc werden zwei Kräfte wirken: Die Normalkraft σdF und die Tangentialıraft τdF. Am Flächenelement ac wird nur eine Kraft $\sigma_y dF \cos\alpha$ und am Flächenelement ba ebenfalls nur eine Kraft $\sigma_x dF \sin\alpha$ wirken.

Gehen wir zu den Gleichgewichtsgleichungen über. Aus der Projektion aller Kräfte auf die N-Achse erhalten wir die Gleichung

$$\sigma\, dF - \sigma_y\, dF \cos^2\alpha - \sigma_x\, dF \sin^2\alpha = 0,$$

ie nach Kürzung durch dF

$$\sigma - \sigma_y \cos^2\alpha - \sigma_x \sin^2\alpha = 0 \tag{3.12a}$$

rgibt.

Die Projektion aller Kräfte auf die T-Achse liefert:

$$\tau\, dF + \sigma_y\, dF \cos\alpha \sin\alpha - \sigma_x\, dF \sin\alpha \cos\alpha = 0$$

oder nach Kürzung durch dF:

$$\tau + (\sigma_y - \sigma_x)\cos\alpha \sin\alpha = 0. \qquad (3.12\text{b})$$

Aus (3.12a) und (3.12b) finden wir die Spannungen σ und τ, die am geneigten Flächenelement bc wirken[1]):

$$\sigma = \frac{\sigma_y}{2}(1 + \cos 2\alpha) + \frac{\sigma_x}{2}(1 - \cos 2\alpha)$$

oder
$$\sigma = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \frac{(\sigma_x - \sigma_y)\cos 2\alpha}{2}, \qquad (3.13)$$

$$\tau = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\sin 2\alpha. \qquad (3.14)$$

Die Spannungen σ und τ am schrägen Flächenelement cb haben wir als Funktionen des Neigungswinkels α dieses Flächenelements erhalten. Von größtem Interesse ist es, diejenigen Flächenelemente zu finden, an denen der Wert der Spannungen σ oder τ das Maximum erreicht. Auf Grund der Gleichungen (3.13) und (3.14) führen wir dies mühelos durch.

Wenn $\sigma_y > \sigma_x$ ist, so ergibt sich σ_{max} bei $\cos 2\alpha = 1$ oder bei $2\alpha = \alpha = 0$, und dann wird $\sigma_{max} = \sigma_y$ und $\tau = 0$, da $\sin 2\alpha = \sin 0 = 0$ ist; σ_{min} ergibt sich bei $\cos 2\alpha = -1$ oder bei $2\alpha = 180°$ und $\alpha = 90°$, und dann wird

$$\sigma_{min} = \sigma_x \quad \text{und} \quad \tau = 0, \quad \text{da} \quad \sin 180° = 0 \quad \text{ist.}$$

Das gleiche Ergebnis erreichen wir, wenn wir die Ableitung von σ nach α bilden und dies gleich Null setzen.

$$\frac{d\sigma}{d\alpha} = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\sin 2\alpha \cdot 2 = (\sigma_x - \sigma_y)\sin 2\alpha = 2\tau = 0,$$

d. h. σ_{max} und σ_{min} wirken an den Flächenelementen, an denen keine Schubspannungen vorhanden sind. Diese Flächenelemente (Ebenen) heißen *Hauptflächenelemente* (*Hauptebenen*) *im gegebenen Punkt des Balkens* und die entsprechenden Spannungen σ_{max} und σ_{min} *Hauptspannungen*. Wir kommen darauf bei der Untersuchung des allgemeineren Falles zurück.

B. Gehen wir zu den Flächenelementen über, an denen sich die größten Schubspannungen ergeben. Aus der Gleichung (3.14) ersehen wir, daß sich τ_{max} bei $\sin 2\alpha = 1$, d. h. bei $2\alpha = 90°$ und $\alpha = 45°$ ergibt. Hierbei wird

$$\tau_{max} = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}. \qquad (3.15)$$

Demnach ergibt sich die größte Schubspannung beim Zug bzw. Druck in zwei Richtungen an den Flächenelementen, die zu den Hauptflächenelementen unter 45° geneigt sind, und sie gleicht der halben Differenz der Hauptspannungen.

---

[1]) Wie unter Kapitel 3,01, Punkt 1, so benutzen wir auch hier die Umformungen $\sin^2\alpha = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\alpha)$; $\cos^2\alpha = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\alpha)$; $\sin\alpha\cos\alpha = \frac{1}{2}\sin 2\alpha$.

Dieses Ergebnis ist sehr wichtig, da es beim Aufbau der Festigkeitstheorie sehr oft Verwendung findet, worüber wir später sprechen werden. Dieses Ergebnis liegt auch der optischen Methode der Spannungsuntersuchung an Modellen, die aus durchsichtigem Material gefertigt sind, zugrunde.

In Bild 67 nahmen wir an, daß die Spannungen σ_x und σ_y Zugspannungen sind. Wenn irgendeine von diesen (oder beide) sich als Druckspannung erweist, so muß gemäß der allgemeinen Regel (Kapitel 3.01, Absatz C) vor dieser das Vorzeichen in den Formeln (3.13) und (3.14) geändert werden. Danach werden die Richtungen der Spannungen σ und τ nach der gleichen Regel in Abhängigkeit von der Größe des Winkels α festgelegt.

C. Wir haben die Normalspannung σ und die Schubspannung τ am Flächenelement cb gefunden; mit anderen Worten, wir haben die Projektionen der Gesamtspannung p (Kapitel 1.4) am Flächenelement cb auf die Achsen N und T gefunden (Bild 67). Bei einer Änderung des Winkels α drehen sich diese Achsen zusammen mit dem Flächenelement cb. Manchmal ist es günstig, die

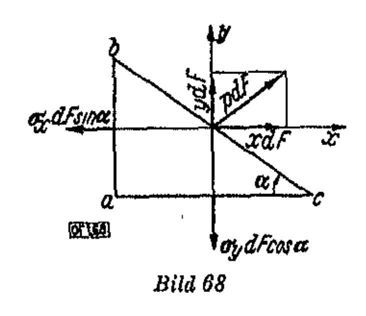


Bild 68

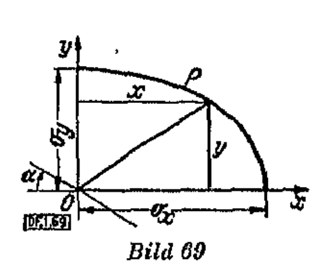


Bild 69

Projektionen der Gesamtspannung auf die unbeweglichen Achsen Ox und Oy (Bild 68), die zu den Flächenelementen ac und ab parallel sind, zu finden. Die Projektion auf die Oy-Achse gibt

$$-\sigma_y \, dF \cos\alpha + y \, dF = 0, \qquad (3.16\text{a})$$

woraus

$$y = \sigma_y \cos\alpha$$

ist, und auf die Ox-Achse

$$x \, dF - \sigma_x \, dF \sin\alpha = 0,$$

woraus

$$x = \sigma_x \sin\alpha \qquad (3.16\text{b})$$

ist. Diese Formeln sind einfacher als (3.13) und (3.14).

Die Formeln (3.13) und (3.14) oder (3.16a) und (3.16b) drücken das Gesetz der Spannungsänderung am schrägen Flächenelement in analytischer Form aus. Benutzt man diese, so kann man eine geometrische (graphische) Darstellung dieses Gesetzes geben. In den folgenden Kapiteln werden zwei Methoden einer solchen Darstellung gezeigt.

4.03 Spannungsellipse

A. Bei einer Änderung des Neigungswinkels α des Flächenelements cb ändern sich Größe und Richtung der Gesamtspannung p. Wir nehmen (Bild 69) ein rechtwinkliges Koordinatensystem Oxy an und tragen vom Ausgangspunkt 0 die Gesamtspannung in Form eines Vektors $OP = p$ auf. Die Koordinaten des Endpunktes dieses Vektors (seine Projektionen auf die Koordinatenachsen) x und y werden offenbar durch die Formeln (3.16a) und (3.16b) ausgedrückt. Bei einer Neigungswinkeländerung des Flächenelements α beschreibt das Ende P des Vektors p eine Kurve.

Die Formeln (3.16a) und (3.16b)

$$x = \sigma_x \sin\alpha, \qquad y = \sigma_y \cos\alpha \tag{3.16}$$

sind die *Parameter-Gleichungen* dieser Kurve, wobei der Winkel α als Parameter dient. Aus der Mathematik ist bekannt, daß solche Gleichungen eine Ellipse mit den Halbachsen $a = \sigma_x$ und $b = \sigma_y$ ergeben. Die übliche Gleichung erhalten wir, wenn wir aus (3.16a) und (3.16b) den Winkel α ausschließen.

$$\frac{x^2}{\sigma_x^2} + \frac{y^2}{\sigma_y^2} = 1. \tag{3.17}$$

Diese Ellipse heißt *Spannungsellipse.*

B. Um an der Ellipse gleichzeitig mit der Gesamtspannung p auch dasjenige Flächenelement zeigen zu können, an dem die Spannung wirkt, ist es erforderlich, sich an die geometrische Bedeutung des Winkels α in den Gleichungen (3.16) zu erinnern. Hier muß man zwei Fälle unterscheiden:

Erster Fall:

σ_x und σ_y haben gleiche Vorzeichen,

z. B. $\sigma_x = \sigma_1 > 0$ und $\sigma_y = \sigma_2 > 0$ (Zug). Dann ist

$$x = \sigma_1 \sin\alpha, \quad y = \sigma_2 \cos\alpha. \tag{3.18}$$

Wir konstruieren eine Ellipse mit den Halbachsen $OA = \sigma_1$ und $OB = \sigma_2$ (Bild 70) und beschreiben einen Kreis $AB'C$ mit dem Radius $OP' = \sigma_1$. Verlängert man die Ordinate des Punktes P (des Endes des Vektors p) bis zum Kreis, so erhalten wir die Gleichung

$$OQ = OP' \sin\alpha$$

oder

$$x = \sigma_1 \sin\alpha,$$

die mit der ersten der Gleichungen (3.18) übereinstimmt. Ferner ist

$$QP' = OP' \cos\alpha, \tag{3.19}$$

aus der analytischen Geometrie ist aber bekannt, daß

$$\frac{QP}{QP'} = \frac{OB}{OB'} = \frac{\sigma_2}{\sigma_1}\,^{1)}$$

oder auf Grund von (3.19)

$$y = QP' \frac{\sigma_2}{\sigma_1} = OP' \frac{\sigma_2}{\sigma_1} \cos\alpha = \sigma_2 \cos\alpha$$

---

[1]) Die Gleichung der Ellipse ABC hat tatsächlich das Aussehen von (3.17). Die Gleichung des Kreises $AB'C$ ist $x^2 + y^2 = \sigma_1^2$. Aus diesem erhalten wir bei ein und derselben Abszisse $x = OQ$ die Ordinate der Ellipse $y_{El} = QP = \frac{\sigma_2}{\sigma_1}\sqrt{\sigma_1^2 - x^2}$ und die Ordinate des Kreises $y_K = QP' = \sqrt{\sigma^2 - x^2}$. Hieraus schließen wir auch, daß ihr Verhältnis gleich $\frac{\sigma_2}{\sigma_1}$ ist.

ist, was mit der zweiten Gleichung von (3.18) übereinstimmt. Auf diese Weise haben wir erhalten, daß der Neigungswinkel des Flächenelements

$$\alpha = \sphericalangle B'OP' \text{ ist.}$$

Um die Richtung des Flächenelements zu erhalten, an dem die Spannung $p = OP$ wirkt, ist noch der Winkel α von der Achse OC aus im Sinne des Uhrzeigers gemäß Bild 70 einzutragen. Dann wird die Richtung des Flächenelements OR offenbar senkrecht zu OP' sein. Hieraus erhalten wir die Regel zum Auffinden der Gesamtspannung $p = OP$, wenn das Flächenelement OR gegeben ist und wenn $\sigma_x = \sigma_1$ und $\sigma_y = \sigma_2$ das gleiche Vorzeichen haben:

1. wir ziehen OP' senkrecht zu OR, d. h. unter dem Winkel α zur Spannung $\sigma_y = +\sigma_2$;
2. wir ziehen $P'P$ senkrecht bis zum Schnitt mit der Spannungsellipse, dann stellt OP die Größe und Richtung der Gesamtspannung dar;

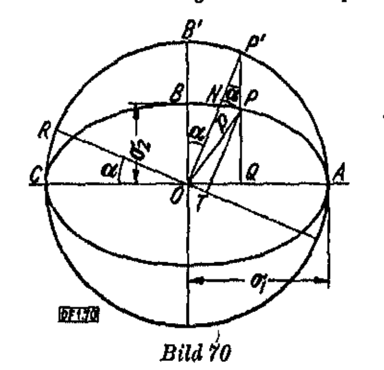


Bild 70

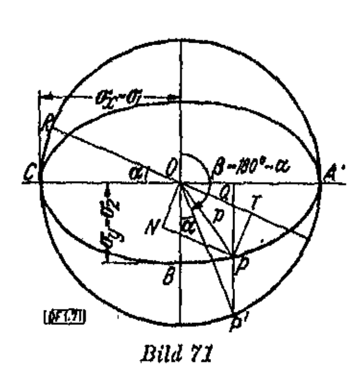


Bild 71

3. wir ziehen PN senkrecht zu OP' und PT senkrecht zu OR, dann ist die Normalspannung $ON = \sigma$ und die Schubspannung $OT = \tau$ am Flächenelement OR, die wir früher auf Grund der Formeln (3.13) und (3.14) gefunden haben.

C. *Zweiter Fall*

σ_x und σ_y haben verschiedene Vorzeichen,

$$\text{z. B. } \sigma_x = \sigma_1 > 0 \text{ und } \sigma_y = -\sigma_2 < 0.$$

Dann ist auf Grund von (3.16)

$$x = \sigma_1 \sin\alpha \text{ und } y = -\sigma_2 \cos\alpha. \tag{3.20}$$

Führen wir den Hilfswinkel

$$\beta = 180 - \alpha \text{ ein;}$$

da $\sin\alpha = \sin\beta$ und $\cos\alpha = -\cos\beta$ ist, schreiben wir die Gleichungen (3.20) in der Form

$$x = \sigma_1 \sin\beta, \quad y = \sigma_2 \cos\beta,$$

d. h. sie stimmen dem Aussehen und den Vorzeichen nach genau mit den Gleichungen (3.18) des ersten Falles überein. Die Konstruktion in Bild 70 behält ihre Gültigkeit, nur der Winkel α ist durch den Winkel $\beta = 180° - \alpha$ zu ersetzen. Die Konstruktion ist in Bild 71 dargestellt.

Die Regel zum Auffinden der Spannungen p, σ und τ bleibt die gleiche wie im ersten Fall, aber die Gerade OP' ziehen wir im Winkel α zur unteren Halbachse O_y, da $\sigma_y = -\sigma_2 < 0$ ist. Im Ergebnis der Konstruktion erhalten wir wie früher:

$$OP = p; \quad ON = \sigma; \quad OT = \tau.$$

D. Merken wir uns folgenden wesentlichen Unterschied zwischen dem ersten und zweiten Fall (d. h. wenn σ_x und σ_y gleiche oder verschiedene Vorzeichen haben). Drehen wir das Flächenelement OR im Sinne des Uhrzeigers (d. h. lassen wir den Winkel α wachsen), so ist leicht zu ersehen, daß:

im ersten Fall (Bild 70) der Winkel BOP' ebenfalls anwächst. Der Vektor der Gesamtspannung OP dreht sich auf die gleiche Seite wie das Flächenelement OR und weicht beim Drehen nur wenig von der Normalen OP' zum Flächenelement OR ab. Daher ändert sich die Normalspannung σ in geringen Grenzen (von $\sigma = \sigma_2$ bis $\sigma = \sigma_1$ bei einer Änderung α von Null bis 90°), und die Schubspannungen werden nicht groß;

im zweiten Fall (Bild 71) der Winkel $P'OB$ ebenfalls anwächst, der Vektor der Gesamtspannung OP sich aber dem Flächenelement OR entgegendreht. Hierbei ergeben sich zwei solche Lagen des Flächenelements, bei denen die Gesamtspannung in der Ebene des Flächenelements liegt. Das bedeutet, daß an solchen Flächenelementen keine Normalspannungen auftreten.

3.05 Mohrscher Kreis

A. Eine andere, von *Prof. O. Mohr* vorgeschlagene Methode der geometrischen Darstellung der Spannungsänderung ist auf den Formeln (3.13) und (3.14) (Kapitel 3.03) aufgebaut. Nehmen wir an, daß $\sigma_x > \sigma_y$ ist.

Schreiben wir die Parametergleichungen des Kreises mit dem Radius $R = CE$ (Bild 72) und dem Mittelpunkt auf der Abszissenachse in einer Entfernung $c = OC$ vom Koordinatenanfangspunkt auf:

sie lauten $$x = c - R\cos\varphi$$

und $$y = R\sin\varphi\,[1]),$$

worin φ der als Parameter angenommene Zentriwinkel ist.

Vergleicht man diese Gleichungen mit (3.13) und (3.14), so kommt man zu nachstehender Folgerung: nehmen wir an, daß

$$c = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}, \quad R = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \quad \text{und} \quad \varphi = 2\alpha \quad \text{ist,}$$

dann finden wir, daß $x = \sigma$ und $y = \tau$ wird, d. h. die Koordinaten des Punktes E des Kreises, der einem Zentriwinkel von 2α entspricht, drücken die Normal- und Schubspannung an einem Flächenelement aus, das unter dem Winkel α zur x-Achse geneigt ist. Diese Konstruktion heißt der „*Mohrsche Kreis*". Zu seiner Ausführung muß man auf der Abszissenachse die Strecken $\overline{OB} = \sigma_x$ und $\overline{OA} = \sigma_y$ auftragen und auf der Strecke $\overline{AB}$, als Durchmesser, einen Kreis schlagen.

In Bild 72 sieht man, daß

$$\sphericalangle ABE = \frac{1}{2} \sphericalangle ACE = \alpha \quad \text{ist,}$$

---

[1]) Schaltet man den Parameter φ aus, so erhalten wir die übliche Gleichung des Kreises

$$(x - c)^2 + y^2 = R^2.$$

d. h. die Gerade EB gibt die Richtung desjenigen Flächenelements an, an dem die Spannungen

$$\sigma = OD \quad \text{und} \quad \tau = DE \quad \text{wirken.}$$

Die Lösung der umgekehrten Aufgabe, d. h. die Ermittlung der Hauptspannungen aus den bekannten Normal- und Schubspannungen, die senkrecht zueinander stehen, mit Hilfe des Mohrschen Kreises wird in Kapitel 6.10 gezeigt.

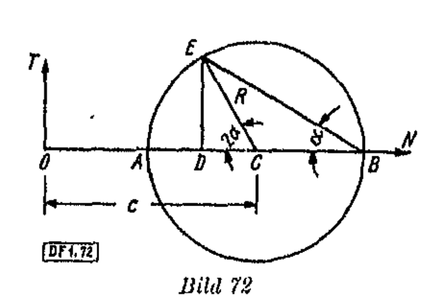


Bild 72

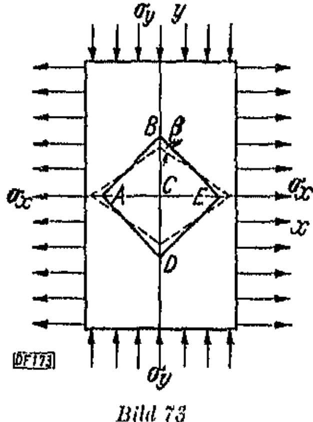


Bild 73

3.06 Reiner Schub

Sehr wichtig ist der Sonderfall (Bild 73) der unter Absatz A und B des Kapitels 3.03 untersuchten Aufgabe, wenn sich der Balken unter der Einwirkung einer Zugbeanspruchung in einer Richtung und einer gleich großen Druckbeanspruchung lotrecht dazu befindet:

$$\sigma_x = -\sigma_y = \sigma_0.$$

Die Untersuchung der Spannungen an schrägen Flächenelementen kann auf Grund der Gleichungen (3.13) und (3.14) des Kapitels 3.03 erfolgen, die geometrisch in Form des Mohrschen Kreises gedeutet werden können, wie wir dies im Kapitel 3.05 gesehen haben.

In diesem Falle ist

$$\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} = 0,$$

und der Mittelpunkt des *Mohrschen Kreises* befindet sich im Koordinatenanfangspunkt (Bild 74).

Die Gleichung

$$\tau_{max} = CE = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} = \sigma_0$$

erhält man bei einem Winkel $2\alpha = 90°$, was einem Neigungswinkel des Flächenelements $\alpha = 45°$ entspricht. An diesem Flächenelement ist die Normalspannung $\sigma = OD = 0$, wie dies aus der Konstruktion Bild 74 oder unmittelbar aus der Gleichung (3.13) zu ersehen ist.

Wenn man also aus dem untersuchten Balken (Bild 73) mit Hilfe von vier solchen Flächenschnitten ein Element mit quadratischer Grundfläche $ABED$ herausschneidet, so steht es nur unter der Einwirkung von Schubkräften, die

an seinen Seitenflächen angreifen. In einem solchen Falle sagt man, daß sich das Element $ABED$ im Zustande eines reinen Schubs befindet, da hier die Normalspannungen an den Seitenflächen des Elements entfernt sind und die Seitenflächen keine Verlängerungen erfahren. Hieraus folgt allerdings nicht, daß im Element $ABED$ nur Schubspannungen vorhanden sind. An seinen Hauptflächen AE und BD wirken nur Normalspannungen $\sigma_x = \sigma_0$ und $\sigma_y = -\sigma_0$, wie dies bei der Betrachtung des ganzen Balkens (Bild 73) offenbar wird.

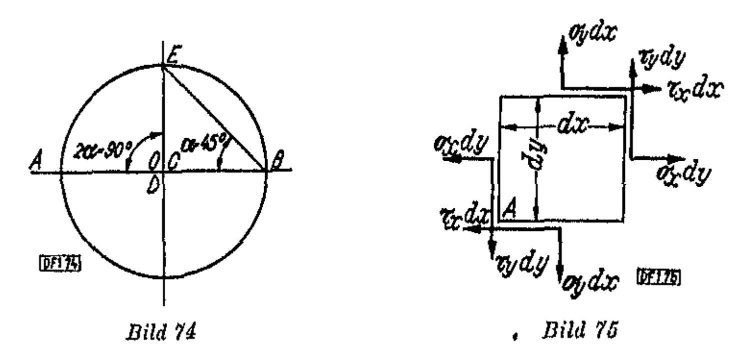


Bild 74 Bild 75

3.07 Gesetz von der Gegenseitigkeit der Schubspannungen

A. In Kapitel 3.01, Punkt C, wurde das Gesetz der Gegenseitigkeit der Schubspannungen abgeleitet. Wir wollen beweisen, daß es auch für den Fall des allgemeinen Spannungszustandes des Balkens Gültigkeit hat.

1. Wir schneiden aus dem Balken (Bild 75) in einem beliebigen Punkt mit Hilfe von zwei Paaren paralleler Ebenen ein elementares Prisma mit den Abmessungen dx und dy heraus, wobei die Abmessung senkrecht zur Zeichnungsebene gleich 1 sein soll.

2. Wir entfernen alles mit Ausnahme des Prismas.

3. Wir ersetzen die Wirkung der entfernten Teile auf das Prisma durch Kräfte, die im allgemeinsten Falle auf Normal- und Tangentialkräfte, die an den Seitenflächen wirken, zurückgeführt werden können. Wegen der unendlich kleinen Abmessungen unseres Prismas können wir damit rechnen, daß die Normal- und Schubspannungen an den gegenüberliegenden Seitenflächen gleich sind.

4. Wir stellen die Gleichgewichtsbedingung auf, indem wir das Moment aller an unserem Element angreifenden Kräfte in bezug auf irgendeinen Punkt, z. B. den Punkt A, gleich Null setzen. Wir erhalten dann die Gleichung

$$M_A = \tau_x\, dx\, dy - \tau_y\, dy\, dx = 0,$$

da alle Normalkräfte paarweise der Größe nach gleich und der Richtung nach entgegengesetzt sind und zwei der Tangentialkräfte durch den Punkt A gehen. Aus dieser Gleichgewichtsgleichung folgt, daß

$$\tau_y = \tau_x \text{ ist,}$$

d. h. die von uns früher aufgezeigte Gleichheit der Schubspannungen an zwei zueinander senkrecht stehenden Flächenelementen wird bestätigt. Aus den Gleichgewichtsbedingungen des Elements ist leicht festzustellen, wie die Schubspannungen an den Seitenflächen des Prismas miteinander kombiniert werden können. Zu dem Zwecke wird dem Leser empfohler, sich die in Bild 76 dargestellten vier schematischen Skizzen über den Angriff von Schubspannungen an den Seitenflächen des Prismas anzusehen und auf Grund der Bedingung, daß das Moment aller Kräfte in bezug auf die Eckpunkte des Elements gleich Null sein muß, zu ermitteln, welche von ihnen offenbar nicht möglich sind.

Danach können wir das Gesetz der Gegenseitigkeit der Schubspannungen endgültig formulieren:

Die Schubspannungen an zwei senkrecht zueinander stehenden unendlich kleinen Flächenelementen sind untereinander der Größe nach gleich und entweder beide zur Schnittlinie der Flächenelemente hin oder beide von der Schnittlinie der Flächenelemente weg gerichtet.

Auf Grund des Gesetzes der Gegenseitigkeit der Schubspannungen kann man sehr leicht einige Fragen beantworten, die sich auf die Feststellung der Schubspannungswerte beziehen.

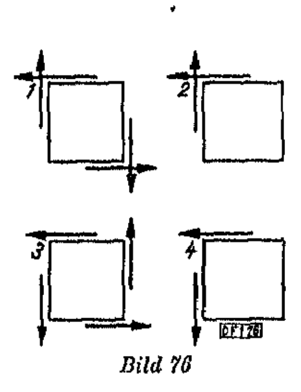


Bild 76

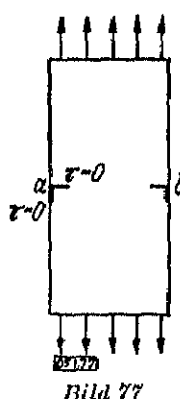


Bild 77

Beispiel 10

Es ist zu klären, wie groß die Schubspannung in einem gezogenen Balken an den äußersten Flächenelementen a und b eines zur Linie der Kraftwirkung senkrecht stehenden Schnittes ist (Bild 77).

Da die Schubspannung an der Seitenfläche des Balkens gleich Null ist, so wird sie auch an den äußersten Flächenelementen eines zu der erwähnten Seitenfläche senkrecht stehenden Schnittes, auf Grund des Gesetzes der Gegenseitigkeit der Schubspannungen, selbst bei ungleichmäßiger Verteilung der Zugspannungen an den Querschnitten des Balkens gleich Null sein.

Beispiel 11

Wie groß ist die Schubspannung an den äußersten Flächenelementen a und b eines Querschnitts eines Balkens, der durch eine gleichmäßige vertikale Last belastet ist? (Bild 78.)

Da die Schubspannung an der unteren freien Fläche des Balkens gleich Null ist, so wird auch die Schubspannung an dem äußersten Flächenelement b des zur erwähnten Fläche senkrecht stehenden Schnittes gleich Null sein. Die gleiche Folgerung machen wir auch

in bezug auf das Flächenelement a, da die an der oberen Fläche des Balkens angreifende Belastung nur einen vertikalen Druck ausübt.

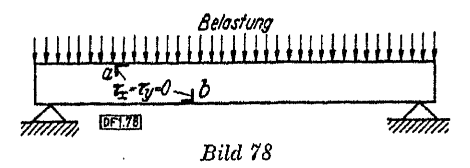


Bild 78

B. Es ist leicht nachzuweisen, daß beim Zug bzw. Druck in zwei Richtungen die gleiche Abhängigkeit zwischen der Schubspannung und dem Schubwinkel besteht, die wir im Falle eines einfachen Zuges bzw. Druckes im Kapitel 3.02 gefunden haben.

Betrachten wir zunächst den Zug in zwei Richtungen! Beim Zug eines Balkens längs der Achse x, d. h. bei einem Zug in nur einer Richtung, hat gemäß Kapitel 3.02 das Hookesche Gesetz und die Formel (3.11)

$$\tau_1 = G\gamma_1$$

Gültigkeit.

Beim Zug desselben Balkens durch Kräfte, die längs der y-Achse gerichtet sind, hat das Hookesche Gesetz ebenfalls Gültigkeit:

$$\tau_2 = G\gamma_2.$$

Beim Zug in zwei Richtungen werden die Schubspannungen an ein und demselben Flächenelement algebraisch summiert:

$$\tau = \tau_1 + \tau_2 = G(\gamma_1 + \gamma_2) = G\gamma.$$

Im Ergebnis haben wir wieder eine direkte Proportionalität zwischen der Schubspannung und dem relativen Schub erhalten. Das Hookesche Gesetz für Schubspannungen beim Zug (Druck) in zwei Richtungen hat, wie dies aus der eben abgeleiteten Formel zu ersehen ist, die gleiche Form wie beim Zug in einer Richtung. Das Hookesche Gesetz für Normalspannungen hat, wie wir dies später (Kapitel 3.08) zeigen werden, eine verschiedene Form für diese beiden Fälle des Spannungszustandes.

3.08 Zug bzw. Druck in drei Richtungen

A. Der Fall, bei dem sich ein aus einem elastischen Körper in Form eines Parallelepipeds herausgeschnittenes Element unter der Einwirkung von Druck- und Zugspannungen in Richtung aller drei Achsen befindet, ist bei Berechnungen von Bauwerken nicht selten. Mit ihm hat man es in vielen Fällen der Praxis zu tun, so z. B. bei der Berechnung massiver Teile hydrotechnischer Bauwerke.

In der Elastizitätstheorie wird bewiesen, daß man im allgemeinsten Falle eines räumlichen Spannungszustandes in jedem Punkt eines Körpers drei aufeinander senkrecht stehende Flächenelemente finden kann, an denen keine Schubspannungen vorhanden sind. Diese Flächenelemente nennt man, wie auch beim ebenen Spannungszustand (Zug bzw. Druck in zwei Richtungen), Hauptflächen-

elemente (Hauptebenen). Die Normalspannungen an diesen heißen *Hauptspannungen*. Wir bezeichnen sie durch σ_1, σ_2 und σ_3 und nehmen zu ihrer näheren Definition an, daß

$$\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3 \quad \text{ist.} \tag{3.21}$$

Man kann beweisen, daß σ_1 die größte aller Normalspannungen an den verschiedenen Flächenelementen (Ebenen), die durch einen gegebenen Punkt gehen, und σ_3 die kleinste sein werden. Wenn wir mit drei Paar Ebenen, die zu den Hauptflächenelementen parallel gerichtet sind, ein unendlich kleines Parallelepiped in der Nähe des gewählten Punktes herausschneiden, so wird sich dieses im Zustand des Zuges bzw. Druckes in drei Richtungen befinden (Bild 79). Somit können die verschiedensten Fälle eines räumlichen Spannungszustandes zu dem

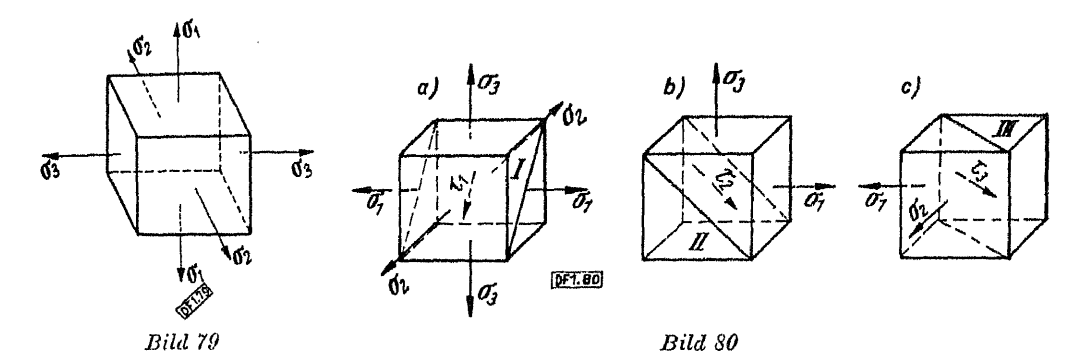


Bild 79 Bild 80

Fall eines Zuges bzw. Druckes in drei senkrecht zueinander stehenden Richtungen zurückgeführt werden. An den Seitenflächen eines so herausgeschnittenen Parallelepipeds gibt es keine Schubspannungen. An seinen schrägen Schnitten werden dagegen Schubspannungen vorhanden sein. Sie erreichen ihre größten und kleinsten Werte an Schnitten, die durch die Kanten des Parallelepipeds gehen und die von seinen Seitenflächen eingeschlossenen rechten Winkel halbieren (Bild 80a, b, c). Die Größen dieser Schubspannungen sind den halben Differenzen der Hauptspannungen gleich, die nicht zu dem betrachteten schrägen Schnitt parallel verlaufen, wie dies das nachfolgende Schema zeigt, dessen Bezeichnungen dem Bild 80 entsprechen:

$$\left.\begin{aligned}
&\text{Schnitt I} \quad \tau_1 = \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2},\\
&\text{Schnitt II} \quad \tau_2 = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2},\\
&\text{Schnitt III} \quad \tau_3 = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}.
\end{aligned}\right\} \tag{3.22}$$

Es ist wichtig, nochmals darauf hinzuweisen, daß die Hauptspannung, die parallel zu dem betrachteten schrägen Schnitt gerichtet ist, den Wert der größten Schubspannung nicht beeinflußt, und letztere ergibt sich so, wie sie im Falle des Zuges bzw. Druckes in zwei Richtungen (siehe Formel [3.15]) ist, d. h. wie beim ebenen Spannungszustand.

B. Hier müssen wir noch eine Bemerkung über den ebenen Spannungszustand machen. Wenn beide Hauptspannungen dieses Zustandes das gleiche Vorzeichen haben, z. B. wenn

$$\sigma_1 > \sigma_2 > 0$$

ist (die dritte Hauptspannung ist gemäß der Bedingung der Aufgabe $\sigma_3 = 0$), so werden die Schubspannungen gemäß dem Schema (3.22) wie folgt ausgedrückt:

$$\tau_1 = \frac{\sigma_2}{2}; \quad \tau_2 = \frac{\sigma_1}{2}; \quad \tau_3 = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}. \tag{3.22a}$$

Die größte von ihnen wird offensichtlich τ_2 sein, die am Schnitt II (Bild 80, b) wirkt.

Wenn jedoch die Hauptspannungen beim ebenen Spannungszustand verschiedene Vorzeichen haben, z. B.

$$\sigma_1 > 0; \quad \sigma_2 < 0; \quad \sigma_3 = 0$$

ist, so bemerken wir, daß die größte Schubspannung

$$\tau_3 = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}$$

sein wird, die am Schnitt III (Bild 80, c) wirkt. Hieraus folgern wir, daß die Formel (3.15) tatsächlich die größte Schubspannung im Falle des Zuges in einer und des Druckes in der anderen Richtung liefert. Wenn jedoch in beiden Richtungen Hauptspannungen mit gleichem Vorzeichen (z. B. Zug) vorhanden sind, so genügt es nicht zur Ermittlung der größten Schubspannung, nur dem Schema des ebenen Spannungszustandes zu folgen und lediglich Schnitte zu untersuchen, die senkrecht zur Ebene stehen, in welcher die Kräfte wirken. Wir hätten z. B. nicht recht, wenn wir sagen würden, daß es bei gleichem Druck in zwei Richtungen,

$$\sigma_1 = \sigma_2 < 0, \quad (\sigma_3 = 0),$$

keine Schubspannungen gäbe, und zwar mit der Begründung, daß gemäß der Formel (3.14) bei beliebigem Wert des Winkels α

$$\tau = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \sin 2\alpha = 0$$

ist. Die größten Schubspannungen wirken hier in Ebenen, die unter 45° zur Ebene der Kräftewirkung geneigt sind:

$$\tau_1 = \frac{\sigma_2}{2} = \tau_2 = \frac{\sigma_1}{2}.$$

Diese Überlegungen werden wir noch weiterhin bei der Untersuchung einiger Festigkeitstheorien anwenden.

3.09 Verallgemeinerung des Hookeschen Gesetzes

A. Wir wollen die physikalische Seite der Aufgabe des Zuges in drei Richtungen untersuchen, was uns die Möglichkeit gibt, die allgemeine Formel für die Abhängigkeit zwischen den Formänderungen und Spannungen im homogenen elastischen Körper abzuleiten.

Den Zusammenhang zwischen den Spannungen und Verlängerungen im Falle des Zuges bzw. Druckes in drei Richtungen kann man feststellen, indem man einzeln den Einfluß jeder von den Spannungen σ_x, σ_y und σ_z auf die Verlängerung in irgendeiner Richtung untersucht und die Ergebnisse summiert (Bild 81).

1. Ist $\sigma_y = \sigma_z = 0$, so ist

$$\varepsilon_x' = \frac{\sigma_x}{E}; \quad \varepsilon'_y = -\frac{\mu\sigma_x}{E} \quad \text{und} \quad \varepsilon'_z = -\frac{\mu\sigma_x}{E};$$

2. ist $\sigma_z = \sigma_x = 0$, so ist

$$\varepsilon_x'' = -\frac{\mu\sigma_y}{E}; \quad \varepsilon_y'' = \frac{\sigma_y}{E} \quad \text{und} \quad \varepsilon_z'' = -\frac{\mu\sigma_y}{E};$$

3. ist $\sigma_x = \sigma_y = 0$, so ist

$$\varepsilon_x''' = -\frac{\mu\sigma_z}{E}; \quad \varepsilon_y''' = -\frac{\mu\sigma_z}{E} \quad \text{und} \quad \varepsilon_z''' = \frac{\sigma_z}{E}.$$

Bild 81

Durch Addition erhalten wir die Summenwerte der Dehnungen in drei Richtungen:

$$\left.\begin{aligned} &1.\ \varepsilon_x = \varepsilon'_x + \varepsilon''_x + \varepsilon'''_x = \frac{1}{E}\left[\sigma_x - \mu(\sigma_y + \sigma_z)\right],\\ &2.\ \varepsilon_y = \varepsilon'_y + \varepsilon''_y + \varepsilon'''_y = \frac{1}{E}\left[\sigma_y - \mu(\sigma_z + \sigma_x)\right],\\ &3.\ \varepsilon_z = \varepsilon'_z + \varepsilon''_z + \varepsilon'''_z = \frac{1}{E}\left[\sigma_z - \mu(\sigma_x + \sigma_y)\right]. \end{aligned}\right\} \tag{3.23}$$

Die zweite und dritte Formel erhält man leicht aus der ersten, durch zyklische Vertauschung der Indizes

$$\begin{matrix} & x & \\ \nearrow & & \searrow \\ z & \leftarrow & y. \end{matrix}$$

Die erhaltenen Gleichungen, die in bezug auf die Verlängerungen ε und die Spannungen σ linear sind, drücken *die Verallgemeinerung des Hookeschen Gesetzes* aus. Sie liefern die allgemeine Abhängigkeit zwischen den Normalspannungen und Dehnungen an einem beliebigen Punkt eines homogenen und isotropen Körpers, mit gleichen elastischen Eigenschaften nach allen Richtungen.

Aus den abgeleiteten Formeln kann das Hookesche Gesetz für einfachere Fälle abgeleitet werden.

Für den einfachen Zug in nur einer Richtung, z. B. in Richtung der x-Achse, muß $\sigma_y = 0$ und $\sigma_z = 0$ gesetzt werden. Es ergibt sich dann

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E}, \quad \varepsilon_y = -\mu \frac{\sigma_x}{E} \text{ und } \varepsilon_z = -\mu \frac{\sigma_x}{E}. \tag{3.23a}$$

Für den zweiachsigen Zug in Richtung von x und y muß man σ_z gleich Null setzen. In diesem Falle ergeben sich aus der Verallgemeinerung des Hookeschen Gesetzes folgende Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E}(\sigma_x - \mu\sigma_y), \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E}(\sigma_y - \mu\sigma_x), \\ \varepsilon_z &= -\frac{1}{E}(\sigma_x + \sigma_y). \end{aligned}\right\} \tag{3.23b}$$

B. Wir erhalten die Volumenänderung für den allgemeinen Fall des Zugs in drei Richtungen, wenn wir die Differenz zwischen dem Volumen des Elements vor der Formänderung und dem Volumen nach der Formänderung nehmen. Das Volumen des Elements vor der Formänderung (Bild 81) ist:

$$V = dx \cdot dy \cdot dz.$$

Die relative Dehnung längs der x-Achse ist gleich ε_x,
" " " " " y-Achse " " ε_y,
" " " " " z-Achse " " ε_z.

Das Volumen wird nach der Formänderung:

$$V + dV = dx(1 + \varepsilon_x)\, dy(1 + \varepsilon_y)\, dz(1 + \varepsilon_z);$$

nach Auflösung der Klammern und Vernachlässigung der Glieder, die von zweiter und dritter Ordnung gegen Null gehen, erhalten wir:

$$dV = V(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z).$$

Die relative Zunahme des Volumens ist

$$\varepsilon_v = \frac{dV}{V} = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z. \tag{3.24}$$

Setzt man hier die Ausdrücke der Dehnungen aus (3.23) ein, so finden wir

$$\varepsilon_v = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = \frac{1}{E}[(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)(1 - 2\mu)].$$

Bezeichnet man $\qquad \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = \Theta,$

so erhalten wir $\qquad \varepsilon_v = \dfrac{1 - 2\mu}{E}\Theta. \qquad (3.25)$

Die Gleichung (3.25) zeigt, daß im allgemeinen Fall *die relative Zunahme des Volumens (Volumendeformation) proportional der Summe der drei Hauptnormal-*

nnungen ist. Die Gleichung (3.25) gibt das *Hookesche Volumengesetz* in der gemeinen Form an. Der Proportionalitätskoeffizient

$$1 : \frac{1-2\mu}{E} = \frac{E}{1-2\mu} = E_v$$

ßt Volumenelastizitätsmodul, und da in seinem Nenner ein Wert steht, der iner als 1 ist, so ist der Volumenelastizitätsmodul zahlenmäßig größer als der ngenelastizitätsmodul:

$$\frac{E}{1-2\mu} > E.$$

r Körper, bei denen $\mu = 0$ (z. B. für Kork) ist, ergibt sich

$$E_v = E.$$

ıen anderen Grenzfall erhalten wir bei $\mu = \frac{1}{2}$; dann zeigt die Gleichung (3.25),
3

$$\varepsilon_v = 0$$

d. h. daß es bei beliebigen Werten σ_x, σ_y und σ_z, also bei beliebigem Wert Θ ne Volumenverformung gibt. Dies bedeutet, daß wir es in diesem Grenzfall t einem nicht zusammendrückbaren festen Körper zu tun haben.

:. Der Fall des zweiseitigen Zuges (Druckes) ist als spezieller Fall des eben tersuchten Volumenspannungszustandes anzusehen. Beim Zug in zwei Richıgen muß in den von uns abgeleiteten Formeln $\sigma_z = 0$ gesetzt werden. Die ative Zunahme des Volumens wird in diesem Falle durch die Formel (3.25)

$$\varepsilon_v = \frac{1-2\mu}{E}\,\Theta$$

ıgedrückt, in der

$$\Theta = \sigma_x + \sigma_y$$

Der Volumenelastizitätsmodul bleibt derselbe wie auch für den Fall des ges in drei Richtungen:

$$E_v = \frac{E}{1-2\mu}. \tag{3.26}$$

ınn der einfache Zug in einer Richtung in Frage kommt, so ist

$$\Theta = \sigma_x = \sigma; \quad \sigma_y = \sigma_z = 0$$

l

$$\varepsilon_v = \frac{1-2\mu}{E}\,\sigma. \tag{3.25a}$$

Jntersuchen wir noch den speziellen Fall, daß auf einen Körper ein allseitiger ichmäßiger Druck p kg/cm² einwirkt. Einen derartigen Fall erhalten wir z. B., ın wir den Körper in eine Flüssigkeit hinreichend tief unter ihre Oberfläche ngen, wo man den Druck auf den oberen und unteren Teil des Körpers als

genähert gleich ansehen kann. Dies ist der Fall der allseitigen Zusammen-ickung oder des hydrostatischen Drucks. Offensichtlich ist dann

$$\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = p \quad \text{und} \quad \Theta = 3p.$$

s (3.25) erhalten wir

$$\varepsilon_v = \frac{3(1 - 2\mu)}{E}\, p. \tag{3.25b}$$

0 Praktische Berechnungen auf Schub — Nietverbindungen

1. Oben wurde gezeigt, daß in einem Balken, sowohl beim einfachen Zug bzw. uck als auch bei der komplizierteren Erscheinung des Zugs bzw. Drucks in zwei chtungen, beide Spannungsarten, Normal- und Schubspannungen, vorhanden d. Letztere treten an Schnitten auf, die zur Achse des Balkens geneigt sind. Studiert man ferner die Biegung, die Drehung und kompliziertere Arten eines annungszustandes des Balkens, so werden wir sehen, daß Normal- und Schub-annungen im allgemeinen immer einander begleiten. Hierbei taucht die Frage f, welche von diesen Spannungen oder welche Kombination derselben als iterium der Balkenfestigkeit anzusehen ist, d. h. durch welche bei der Zu-hme der Belastung der Anfang der Zerstörung oder die Erreichung der Fließ-enze, die als Grenze des haltbaren Widerstandes plastischer Werkstoffe an-sehen wird, bedingt ist. Diese Frage erweist sich als sehr verwickelt und bildet n Gegenstand der sogenannten Festigkeitstheorie. Mit der Zeit brachte die schichtliche Entwicklung eine Reihe von Festigkeitstheorien, deren neueste n experimentellen Ergebnissen genügend genau entsprechen (siehe Teil II). e Untersuchung zeigt, daß man bei einer Anzahl von Fällen der praktischen rechnung sich mit der Ermittlung der größten Normalspannung im Balken gnügen kann und auf Grund der Größe dieser Spannung über die Festigkeit teilen kann. Dieser Art sind z. B. die oben (Kapitel 2.11) aufgeführten ein-chsten Berechnungen auf Zug bzw. Druck, bei denen die Schubspannungen rhältnismäßig gering bleiben $\left(\tau_{max} = \frac{1}{2}\,\sigma_{max}\right)$.

Es kommen jedoch auch Fälle vor, bei denen sich die Schubspannungen als ır groß erweisen und die Zerstörung letzten Endes in Form eines Schubes r Balkenteile, d. h. einer gegenseitigen Verschiebung derselben in der Ebene ies gewissen Schnittes, vor sich geht. In der Praxis wird die Berechnung in sen Fällen unter Zugrundelegung der größten gegenseitigen Schubspannung rchgeführt. Ähnliche Berechnungen kommen in der Hauptsache für ver-iedenartige Verbindungselemente in Frage, die der gegenseitigen Befestigung n Balken oder Stäben von Ingenieurkonstruktionen sowie auch von Maschinen-len dienen (Niete, Bolzen, Schweißnähte, Keile, Kerben usw.).

Vom theoretischen Gesichtspunkt aus sind diese Berechnungen als sehr grob d unvollkommen anzusehen, da sie sich auf eine Reihe angenäherter An-hmen stützen. Zur Zahl derartiger Annahmen gehört in vorderster Reihe die raussetzung über die gleichmäßige Verteilung der Schubspannungen an der elle, an der sich das Verbindungselement befindet. Nichtsdestoweniger zeigt vieljährige Lebensdauer verschiedener Bauwerke (z. B. der genieteten Stahl-nstruktionen), daß eine solche Berechnung, abgesehen von ihrem bedingten arakter, voll und ganz die Haltbarkeit von Konstruktionen, bei entsprechender

Wahl der zulässigen Spannungen, gewährleistet. Durch diesen Umstand, in Verbindung mit der außerordentlichen Einfachheit angenäherter Berechnungen, ist ihre weite Verbreitung in der Praxis bedingt.

Die Größe der zulässigen Schubspannung τ_{zul} setzt man für solche Berechnungen fest, wenn man unmittelbar von den Versuchen „auf Abscheren" (für Metalle) oder „auf Spalten" (für Holz) ausgeht. Auf dem Versuchswege wird die zur Zerstörung führende Schubspannung festgestellt und eine entsprechende Sicherheit gewählt.

B. Die Niete dienen zur Verbindung der Elemente von Stahlkonstruktionen. Die Nietlöcher werden in die zu verbindenden Teile gebohrt und bei weniger bedeutungsvollen Konstruktionen auch gestanzt. Im letzteren Falle werden die zulässigen Nietspannungen heruntergesetzt. In allen Fällen wird der Lochdurchmesser um 0,5 bis 1,0 mm größer als der Schaftdurchmesser des Rohnietes hergestellt. Der Niet, der an einem Ende einen Setzkopf hat, wird bis zur Hellrotglut[1]) erhitzt und in das vorbereitete Loch eingesetzt. Der Kopf wird durch den Setzkopfhalter gestützt, und aus dem auf der anderen Seite herausragenden Schaftende wird durch Schläge eines pneumatischen Niethammers oder durch Druck einer Nietmaschine der Schließkopf geformt (Bild 82). Unter der Einwirkung der Schläge oder des Druckes wird der Schaft gestaucht, füllt das Loch dicht aus und zieht nach dem Erkalten die zu verbindenden Teile stark zusammen. Auf diese Weise ist als Berechnungsdurchmesser des Niets der Durchmesser des vorbereiteten Loches anzusehen. In Nietverbindungen werden die Reibungskräfte, die an der Berührungsfläche der durch die Niete dicht zusammengedrückten Bleche entstehen, bei der Berechnung nicht berücksichtigt, und es wird angenommen, daß nur der Widerstand der Niete auf Abscheren ein gegenseitiges Gleiten der Bleche verhindert[2]).

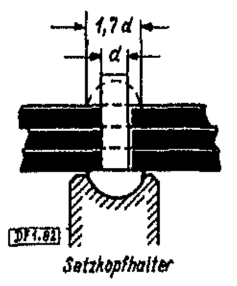


Bild 82

Auf Bild 83, a und b ist eine Verbindung zweier Flacheisen durch Überlappung dargestellt. Die Kräfte N sind bestrebt, jeden Niet in der Schnittebene $a-b$ abzuscheren und rufen eine Pressung (Leibungsdruck) zwischen halbzylinderförmiger Lochwandung und Nietschaft hervor.

Die Verbindung von Stahlbauelementen wird immer durch mindestens zwei Niete bewerkstelligt. In den Berechnungen nimmt man an, daß die von der Verbindung zu übertragende Kraft sich zu gleichen Teilen (bei gleichen Durchmessern) auf die Niete verteilt. Bei einer solchen Annahme wird die berechnete Teilkraft, die auf einen Niet entfällt, gleich $\frac{N}{m}$ sein, worin m die Anzahl der Verbindungsniete ist[3]).

---

[1]) Niete von geringem Durchmesser (bis 12 mm) werden meist kalt eingesetzt.

[2]) Diese Annahme entspricht der tatsächlichen Arbeit der Verbindung in dem Falle, daß die Kraft infolge der äußeren Belastung die Reibungskraft übersteigt.

[3]) Versuche haben gezeigt, daß im elastischen Arbeitsstadium die Verbindungsniete bei weitem nicht gleichmäßig belastet sind. Mit der Vergrößerung der Kraft N erreicht jedoch die Spannung im Material der am stärksten beanspruchten Niete die Fließgrenze, und die Arbeit dieser Niete geht in das plastische Stadium über, bei dem die vom Niet übertragene Kraft nicht mehr anwächst. Der Überschuß der Kraft verteilt sich auf die übrigen Niete. Im Augenblick der Zerstörung, der der Erreichung der Fließgrenze in allen Nieten entspricht, gleichen sich die Kräfte in ihnen aus (vgl. oben Punkt *B*, Kapitel 2.11).

Das Gesetz der Verteilung der Schubspannungen beim Abscheren am Schnitt —b des Niets ist recht kompliziert. In der Praxis nimmt man angenähert eine leichmäßige Verteilung der Spannungen an. Hierdurch vereinfacht sich die erechnung stark, und *die Festigkeitsbedingung des Niets auf Abscheren* nimmt ine Form an, die der Berechnungsformel (2.18) auf Zug ähnlich ist:

$$\tau = \frac{N}{m \frac{\pi d^2}{4}} \leqq \tau_{a_{zul}}, \tag{3.27}$$

vorin $\tau_{a_{zul}}$ die zulässige Abscherspannung ist.

Die größte Druckspannung (Leibungsspannung) an der zylindrischen Fläche les Nietschafts muß sich offenbar im Punkt C des Nietquerschnitts ergeben Bild 83, b). Den Wert der größten Spannung kann man mit genügend großer

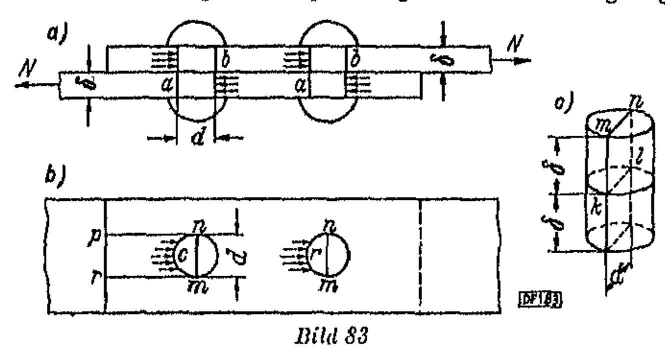


Bild 83

Genauigkeit ermitteln, wenn man eine gleichmäßige Verteilung der Spannungen in der diametralen Ebene $k\,m\,n\,l$ des Niets annimmt (Bild 83, c).

Auf diese Weise nimmt man bedingt als die die Druckkraft $\frac{N}{m}$ aufnehmende Fläche die Fläche des Rechtecks $kmnl$ gleich $d \cdot \delta$[1]) an. Die *Festigkeitsbedingung des Niets auf Lochleibungsdruck* nimmt die Form

$$\sigma_l = \frac{N}{m d \delta} \leq \sigma_{l_{zul}} \tag{3.28}$$

an, worin $\sigma_{l_{zul}}$ die zulässige Lochleibungsspannung ist. Bei ungleicher Stärke δ der zu vernietenden Teile muß man natürlich die geringere Stärke in die Berechnung einführen.

Aus den Bedingungen (3.27) und (3.28) ist es leicht, die Formeln zur Ermittlung der erforderlichen Anzahl der Niete für die Verbindung zu erhalten. Gemäß der Festigkeitsbedingung beim Abscheren ist

$$m \geqq \frac{N}{\frac{\pi d^2}{4} \cdot \tau_{a_{zul}}}; \tag{3.29}$$

[1]) *Anm. d. deutschen Redaktion:* Nach den deutschen Bestimmungen über die Verwendung von Zeichen bei Festigkeitsberechnungen setzt man für die Blechstärken t an Stelle von δ.

und auf Grund der Festigkeitsbedingung beim Lochleibungsdruck ist

$$m \geqq \frac{N}{d\,\delta\,\sigma_{l_{zul}}}. \tag{3.30}$$

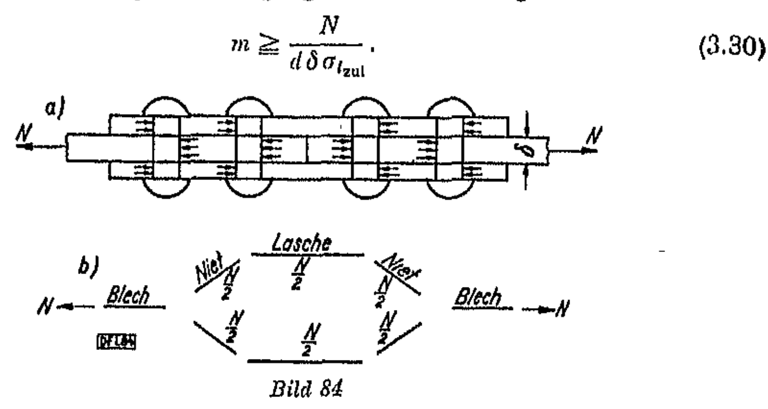


Bild 84

Die Nenner der Formeln (3.29) und (3.30) drücken die auf einen Niet entfallende zulässige Kraft aus. Die Niete der auf Bild 83 dargestellten Verbindung erleiden Scherspannungen an *einem* Querschnitt und heißen daher *einschnittige* Niete. Eine Verbindung durch Überlappung hat den Nachteil, daß die durch die Verbindung zu übertragenden Kräfte N ein Kräftepaar bilden, so daß die Verbindung eine zusätzliche Biegung erleidet und das Bestreben hat, sich zu krümmen. Zweckmäßiger ist der Stumpfstoß der Bleche mit Laschen (Bild 84, a), bei dem jeder Niet Scherspannungen in zwei Querschnitten erleidet. Solche Niete heißen *zweischnittige.*

Zur Ermittlung der erforderlichen Anzahl zweischnittiger Niete für die Verbindung muß man in der Formel (3.29) den Nenner verdoppeln, da ein zweischnittiger Niet eine doppelt so große Scherkraft aufnehmen kann. Bei der Berechnung auf Lochleibungsdruck behält die Formel (3.30) ihre Gültigkeit, in die man die Stärke δ des (gestoßenen) Mittelbleches einsetzen muß.

Die Kraft in jeder Lasche an der Stelle der Stoßfuge ist $\frac{N}{2}$. Hieraus geht klar hervor, daß die Stärke der Lasche nicht geringer als $\delta/2$ sein darf, da andernfalls die Haltbarkeit des Stoßes auf Zug nicht gewährleistet ist. Die Stärke der Lasche wird jedoch meist praktisch ein wenig größer als die halbe Stärke des Mittelbleches gewählt, und daher wird die Lochleibungsspannung im (gestoßenen) Mittelblech größer als in den Laschen sein.

In Bild 84, b ist das Arbeitsschema eines Stoßes mit Laschen dargestellt, aus dem zu ersehen ist, daß die Nietgruppe links vom Stoß die gesamte Kraft N vom linken Blech auf die Laschen überträgt, die das Blech im Stoß ersetzen. Die Nietgruppe rechts vom Stoß überträgt die gleiche Kraft N von den Laschen auf das rechte Blech. Die nach der Berechnung erforderliche Nietanzahl muß folglich auf jeder Seite des Stoßes angeordnet werden.

Bei der Berechnung der Nietverbindungen muß zunächst der Durchmesser der Niete in Abhängigkeit von den Abmessungen und der Blechdicke der zu vernietenden Teile gewählt werden. Hierbei ist man bemüht, in der ganzen Konstruktion Niete vom gleichen Durchmesser oder im äußersten Falle von nicht mehr als zwei verschiedenen Durchmessern anzuwenden. Die Nietdurchmesser

sind in der UdSSR genormt[1]). In leichten Konstruktionen verwendet man Niete mit Durchmessern von 14 und 17 mm, in mittelschweren Konstruktionen von 20 und 23 mm und in sehr schweren Konstruktionen von 26 und 29 mm[2]).

Bei der Verteilung der Niete an der Verbindungsstelle muß man folgende *minimalen* Abstände[3]) zwischen den Nietrißlinien und von der Nietrißlinie bis zum Blechrande, die in Vielfachen von Nietdurchmessern angegeben werden, beachten:

1. der Abstand zwischen den Nietachsen (die Nietteilung)[4]) bei einer nicht versetzten Anordnung der Niete ist $e \geqq 3d$ (Bild 85);
2. der Abstand von der Achse des äußersten Niets bis zum Blechrande in Kraftrichtung ist $e_1 \geqq 2d$ (Bild 85 und 86);

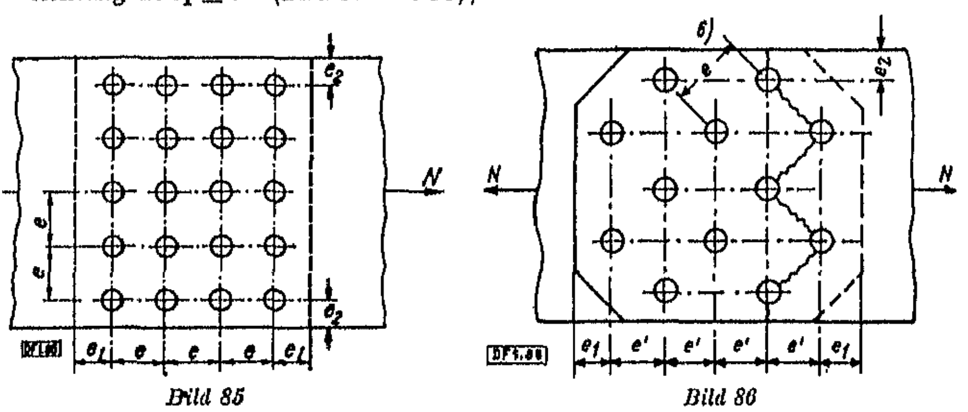


Bild 85 *Bild 86*

3. desgleichen senkrecht zur Kraftrichtung ist $e_2 \geqq 1{,}5d$ (Bild 85 und 86);
4. bei versetzter Anordnung der Niete wird der kleinste Abstand e' zwischen den Achsen benachbarter lotrechter Reihen gemäß der Bedingung festgelegt, daß die Nettofläche des Zickzacklinienschnittes (Bild 86) nicht kleiner sein darf als die Nettofläche des durch eine lotrechte Nietreihe geführten Querschnittes.

Die angegebenen minimalen Abstände gewährleisten eine entsprechende Sicherheit gegen eine Zerstörung der Verbindung infolge einer Abscherung der Bleche durch die Niete (z. B. infolge einer Ausscherung eines Streifens durch den äußersten Niet in den Ebenen $p-n$ und $r-m$ auf Bild 83, b)), wenn die zulässige Lochleibungsspannung beachtet ist.

Für die Herstellung von Nieten verwendet man gewöhnlich Cт. 2[5]), der eine große Plastizität besitzt.

---

[1]) *Anm. d. deutschen Redaktion:* In Deutschland sind die Niete gleichfalls genormt. Es gelten die Normen DIN 124, Bl. 1—4, DIN 302 und DIN 303. Die Durchmesserstaffelung ist $d = 11, 17, 13, 21, 23, 25, 28, 31$ und 37 mm, dazu die Größen 15, 19 und 34 mm.

[2]) Hier sind die Lochdurchmesser angegeben, die man der Kürze wegen Nietdurchmesser nennt. Der Nietschaft hat vor seinem Einsetzen an Ort und Stelle, wie oben erwähnt, einen etwas geringeren Durchmesser.

[3]) *Anm. d. deutschen Redaktion:* In Deutschland gelten die Nietabstände nach DIN 998, Bl. 1 bis 3, und DIN 999, Bl. 1 und 2. Bei dem Wort e werden in Deutschland Unterschiede zwischen Hochbau ($e = 3d$) und Brückenbau ($e = 3{,}5 \cdot d$) gemacht.

[4]) *Anm. d. deutschen Redaktion:* Nietteilung. Das Maß e gilt *in* Kraftrichtung und *quer* dazu.

[5]) *Anm. d. deutschen Redaktion:* In Deutschland Niete meist aus St. 34.13 und St. 44.

[6]) *Anm. d. deutschen Redaktion:* e nach deutschen Bestimmungen.

Die zulässigen Spannungen auf Abscheren und Lochleibungsdruck der Niete werden in Abhängigkeit von der Herstellungsart der Nietlöcher festgelegt. Außerdem hängt die zulässige Lochleibungsspannung auch vom Material der Konstruktion ab. In Tafel 9 sind die zulässigen Spannungen für Nietverbindungen gemäß den Berechnungsnormen für Stahlkonstruktionen vom Jahre 1946 aufgeführt (in kg/cm²). Bei solchen Verhältnissen von $\tau_{a_{zul}}$ und $\sigma_{l_{zul}}$ erweist sich eine Berechnung von einschnittigen Nieten auf Lochleibung fast immer als unnötig.

Der zweischnittige Niet kann die doppelte Scherbeanspruchung übertragen, und daher ist die Berechnung der zweischnittigen Nieten auf Lochleibungsdruck erforderlich.

Tafel 9

Zulässige Spannungen für Nietverbindungen

Herstellungsart der Löcher	Spannungsart	Material der Konstruktion	
		Ct. Oc. u. Ct. 2	Ct. 3
Bohren	$\tau_{a\,zul}$	1400	1400
	$\sigma_{l\,zul}$	2800	3200
Stanzen	$\tau_{a\,zul}$	1000	1000
	$\sigma_{l\,zul}$	2400	2800

Tafel 9 nach deutschen amtlichen Vorschriften (Stahl im Hochbau):[1]
Zulässige Spannungen in kg/cm²

Herstellungsart der Löcher	Spannungsart	Werkstoff der Konstruktion			
		St 00.12	Handelsbaustahl	St 37.12	St 52
Bohren	$\tau_{a\,zul}$	1200	1400	1400	2100
Bohren	$\sigma_{l\,zul}$	2400	2800	2800	4200

[1]) *Anm. d. deutschen Redaktion:* Die Spannungen sind für den Belastungsfall 1 angegeben. Werkstoff der Niete: St 44 für Konstruktionsglieder aus St 52; in den anderen Fällen St 34.13.

Beispiel 12

Die Strebe eines Fachwerks erleidet eine Zugbeanspruchung von $N = 29$ t (Bild 87). Es ist der Querschnitt der Strebe aus zwei gleichschenkligen Winkeln zu wählen und die erforderliche Anzahl Niete, Durchmesser $d = 23$ mm, für die Verbindung der Strebe mit dem Knotenblech, das eine Dicke von $\delta = 1{,}2$ cm hat, zu ermitteln. Das Material ist Cт 2, die Nietlöcher werden gebohrt.

Die erforderliche Querschnittsfläche der Strebe gemäß der Festigkeitsbedingung auf Zug ist

$$F_{\text{netto}} = \frac{N}{\sigma_{z\,zul}} = \frac{29000}{1400} = 20{,}7 \text{ cm}^2.$$

Der Querschnitt ist durch zwei Nietlöcher geschwächt. Nimmt man die zunächst unbekannte Schenkeldicke der Winkel δ_1 zu 0,8 cm an, so finden wir den Bruttoquerschnitt

$$F_{\text{brutto}} = F_{\text{netto}} + 2d\delta_1 = 20{,}7 + 2 \cdot 2{,}3 \cdot 0{,}8 \approx 24{,}4 \text{ cm}^2.$$

Vir benutzen die Profiltafel und wählen den Querschnitt aus zwei gleichschenkligen Vinkeln L 80.80.8.

Die Querschnittsfläche ist

$$F_{\text{brutto}} = 12{,}3 \cdot 2 = 24{,}6 \text{ cm}^2,$$

ie recht genau der erforderlichen entspricht.

Gemäß den Bedingungen für die Anordnung der Niete muß die freie Schenkelbreite des Vinkels $b - \delta_1 \geqq 3d$ sein, worin d der Durchmesser des Niets ist. Der gewählte Querchnitt entspricht dieser Bedingung.

Ferner suchen wir die erforderliche Anzahl der Niete nach den Formeln (3.29) und .30). Gemäß der Festigkeitsbedingung auf Abscheren (die Niete sind zweischnittig) muß

$$m \geqq \frac{29000}{2 \cdot \frac{3{,}14 \cdot 2{,}3^2}{4} \cdot 1400} = 2{,}5 \text{ sein.}$$

Gemäß der Festigkeitsbedingung auf Lochleibungsdruck muß

$$m \geqq \frac{29000}{2{,}3 \cdot 1{,}2 \cdot 2800} \approx 3{,}8 \text{ sein.}$$

Wir wählen also vier Niete.

Entscheidend ist im vorliegenden Falle der Lochleibungsdruck, da man sich nach der erechnung nur auf Abscheren mit drei Nieten hätte begnügen können. In der Berechung auf Lochleibungsdruck ist in die Formel (3.30) die Dicke des Knotenblechs $\delta = 1{,}2$ cm eingesetzt worden, da die Summe der Dicke der zwei Winkelschenkel des Winkeleisens $2\delta_1 = 1{,}6$ cm beträgt und damit folglich die Lochleibungsspannung im Blech größer als in den Winkeleisen ist.

In Bild 87 ist die Übertragung der Kraft von der Strebe auf das Knotenblech mittels der Niete graphisch dargestellt. Jeder Niet überträgt die Kraft $N/4$. Der gefährdete Querschnitt der Strebe wird offenbar der Schnitt $A-B$ sein, der durch die Achse des ersten Niets geht. Die Schnitte, die durch die Achsen der übrigen Niete geführt sind, erleiden bei gleicher Querschnittsfläche nur eine geringere Zugkraft, wie dies aus der graphischen Darstellung zu ersehen ist. Die graphische Darstellung illustriert das Berechnungsschema der Verbindung und ist als ebenso bedingt richtig anzusehen, wie die Berechnung selbst.

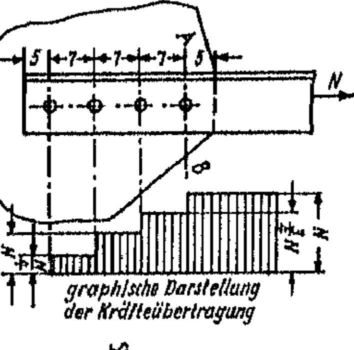




Bild 87

Beispiel 13

Zu berechnen ist der Zugstoß eines Bleches von der Breite 24 cm und der Dicke 1,4 cm mit Doppelschen (Bild 88, a und b) unter Zugrundelegung der größten Kraft, die durch den Stoß bertragen werden kann. Das Material ist Ct. Oc, der Durchmesser der Niete $d = 20$ mm, e Löcher sind gestanzt. Indem wir eine nicht versetzte Anordnung der Niete annehmen, ermitteln wir zunächst die Arbeitsfläche des Blechquerschnitts. Bei einer Breite desselben von cm kann man in einer lotrechten Reihe drei Niete unterbringen, wenn man die minimalen

Abstände zwischen den Nietrißlinien, auf die im Punkt B hingewiesen wurde, beachtet. I Querschnitt wird durch drei Löcher geschwächt:

$$F_{\text{netto}} = 24 \cdot 1{,}4 - 2 \cdot 1{,}4 \cdot 3 = 25{,}2 \text{ cm}^2.$$

Die zulässige Zugkraft ist

$$N = 25{,}2 \cdot 1400 = 35\,300 \text{ kg}.$$

Die erforderliche Anzahl der auf Abscheren beanspruchten Niete (die Niete sind zw schnittig) ist

$$m \geqq \frac{35\,300}{2 \cdot \frac{3{,}14 \cdot 2^2}{4} \cdot 1000} = 5{,}6$$

und auf Lochleibungsspannung beansprucht

$$m \geqq \frac{35300}{2 \cdot 1{,}4 \cdot 2400} = 5{,}3.$$

Wir wählen sechs Niete auf jeder Seite des Stoßes und ordnen sie in zwei lotrecht Reihen an. Die Abstände zwischen den Nietrißlinien sind auf Bild 88, a in Millimete

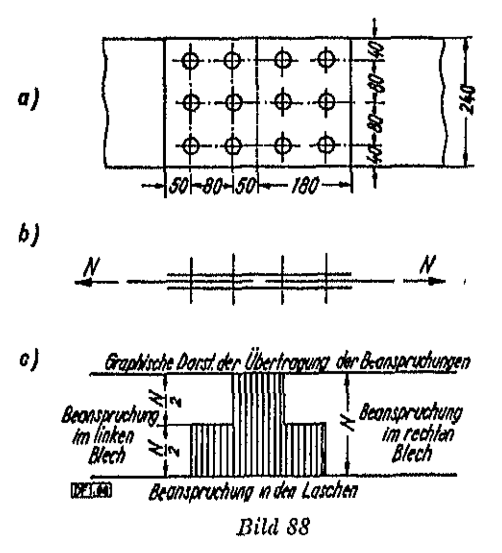


Bild 88

angegeben. Die Kraftübertragung ist auf Bild 88, c graphisch dargestellt. Aus der Da stellung ist zu ersehen, daß zwischen den dem Stoß nächstliegenden Nietreihen die Kra in den Blechen gleich Null ist und die Zugkraft N völlig von den Laschen aufgenomme wird (siehe das Arbeitsschema des Stoßes auf Bild 84, b).

Beispiel 14

Es ist die Anzahl der Niete vom Durchmesser $d = 23$ mm am Stoß zweier gleichschenk liger Winkelstähle L 100.100.10 zu ermitteln, der durch einen gleichen Winkelstahl über lascht ist (Bild 89). Das Material ist Cr. 3. Die Löcher sind gebohrt. Wir ordnen die Niet in den beiden Winkelschenkeln versetzt an. Wenn die Nietteilung in jedem Schenkel ge

nügend groß (etwa 8 *d*) angenommen wird, so braucht man die Schwächung des Winkels durch nur einen Niet zu berücksichtigen[1]). Dann wird die Arbeitsfläche des Querschnitts

$$F_{netto} = 19{,}2 - 2{,}3 \cdot 1{,}0 = 16{,}9 \text{ cm}^2 \text{ sein.}$$

Die zulässige Kraft im Stoß ist

$$N = 16{,}9 \cdot 1600 = 27000 \text{ kg}.$$

Die Niete sind einschnittig. Ihre erforderliche Zahl (auf jeder Seite des Stoßes) ermitteln wir nach der Formel (3.29):

$$m \geq \frac{27000}{\frac{3{,}14 \cdot 2{,}3^2}{4} \cdot 1400} = 4{,}7.$$

Wir wählen fünf Niete.

Es ist nicht schwer, sich davon zu überzeugen, daß die Berechnung auf Quetschung (Lochleibungsdruck) sich als unnötig erweist. Die Verteilung der Niete ist auf Bild 89 gezeigt.

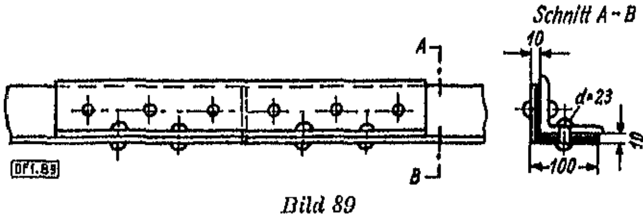


Bild 89

3.11 Berechnung von geschweißten Verbindungen

A. Zur Verbindung von Konstruktionsteilen aus Stahl wird außer den Nieten weitgehend die Lichtbogenschweißung angewendet, die im Jahre 1890 von dem russischen Ingenieur *Slawjanow* erfunden wurde.

Bei der Elektroschweißung wird ein Leitungsdraht von der Starkstromquelle mit dem zu verschweißenden Einzelelement verbunden, und der andere Leitungsdraht endet an einem Halter mit der in ihn eingesetzten Elektrode in Form eines dünnen Stahlstabes. Beim Annähern des Elektrodenendes an den Stoß entsteht zwischen ihnen ein Lichtbogen, das Ende der Elektrode schmilzt und bildet bei allmählicher Verschiebung längs des Stoßes eine Schweißnaht. Infolge der starken örtlichen Erhitzung am Stoß schmilzt die Stahlkante der zu verbindenden Teile und schmilzt mit dem von der Elektrode abtropfender Stahl zusammen, wodurch eine feste Verbindung entsteht.

Die *Schweißverbindungen* weisen gegenüber den Nietverbindungen wesentliche Vorteile auf, und zwar:

1. Ersparnis an Stahl (und somit auch Gewichtverringerung der Konstruktionen), da infolge des Fehlens einer Querschnittsschwächung durch Nietlöcher geringere Abmessungen der Laschen und anderer Stoßteile gewählt werden können.
2. Vereinfachung und wesentlich geringere Herstellungsschwierigkeiten.
3. Leichte Anpassungsfähigkeit an eine beliebige Verbindungsart.

---

[1]) Bei einer engeren Anordnung der Niete muß man die Winkel auf Zerreißen in einem in einer Zickzacklinie geführten Schnitt überprüfen. In diesem Falle wird eine zusätzliche Schwächung des Winkels berücksichtigt. Einzelheiten einer solchen Berechnung werden in den Lehrgängen für Brücken- und Stahlkonstruktionen angegeben.

Zu den Nachteilen der Schweißverbindungen gehören die Vorspannungen (Schrumpfspannungen) als Ergebnis einer sehr starken örtlichen Erhitzung und auch die sehr große Abhängigkeit der Festigkeit von der Güte der Schweißung, deren Überprüfung ziemlich schwierig ist. Außerdem weisen Schweißnähte vor der Zerstörung geringere plastische Verformungen auf als Niete, so daß sich die Schweißverbindungen bei wechselnder Belastung weniger günstig verhalten. Die Vervollkommnungen des Schweißprozesses (z. B. die Anwendung der automatischen Schweißung u. a.) führen jedoch zur Erweiterung des Anwendungsgebietes der Schweißung, die in vielen Fällen die Nietverbindungen bereits verdrängt hat. Etwa 80% aller Stahlkonstruktionen sollen in der UdSSR am Schluß des ersten Stalinschen Nachkriegs-Fünfjahrplans als Schweißkonstruktionen ausgeführt werden.

Am meisten angewandt werden folgende Grundformen von Schweißverbindungen:

1. Stumpfstoßverbindung,
2. Kehlnahtverbindung und
3. Verbindung durch Kehlnähte in Schlitzen (Schlitznähte).

Die *Stumpfstoßverbindung* wird angewendet, wenn die zu verbindenden Bleche in einer Ebene liegen. Die Stumpfnaht füllt den Spalt zwischen den Stirnflächen. Bei einer Blechdicke $\delta \leqq 8$ mm werden die Blechkanten nicht bearbeitet (Bild 90, a). Bei $\delta = 8 \cdots 20$ mm werden die Kanten abgeschrägt, und die Verschweißung wird von einer Seite ausgeführt (V-Naht, Bild 90, b). Bei $\delta > 20$ mm werden die Kanten an beiden Seiten abgeschrägt (X-Naht, Bild 90, c). Die Stumpfnähte arbeiten und werden berechnet wie die entsprechenden Schnitte des ganzen Bleches. Die Berechnungsdicke der Naht wird gleich der Dicke δ des Blechs angenommen, wobei die Wölbung der Schweißraupe nicht berücksichtigt wird.

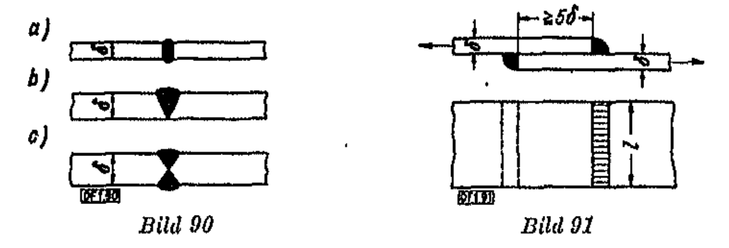


Bild 90 *Bild 91*

Verbindungen mit Hilfe von Kehlnähten werden ausgeführt, wenn die zu verbindenden Bleche parallel oder senkrecht zueinander verlaufen. Hierher gehören Verbindungen durch *Überlappung*, die *Laschen-* und die *T-Verbindungen.* Wenn die Kehlnaht senkrecht zur Kraftwirkung gerichtet ist, so wird sie *Stirnkehlnaht* genannt. Parallel zur Kraft gerichtete Nähte tragen die Bezeichnung *Flankenkehlnähte.* Es kommen auch schräge Nähte zur Anwendung, die unter einem Winkel zur Kraft verlaufen.

Auf Bild 91 ist eine Blechverbindung durch Überlappung mittels Stirnkehlnähten, auf Bild 92 eine Verbindung mit Laschen, die durch Flankenkehlnähte angeschweißt sind, und auf Bild 93 eine T-Verbindung, die hauptsächlich zur Herstellung von geschweißten I-Trägern angewandt wird, gezeigt.

Die Wölbung der Naht wird in die Berechnung nicht eingeführt. Im Schnitt hat die Kehlnaht ohne Wölbung die Form eines gleichschenkligen Dreiecks. Als Berechnungsdicke der Kehlnaht nimmt man die Länge m der auf die Hypotenuse gefällten Höhe an (Bild 94, a), demnach

$$m^{1)} = h \cos 45° \approx 0{,}7\,h,$$

worin h die volle Höhe der Naht, d. h. die Länge der Kathete des Dreiecks ist. Dies ist durch Versuche begründet, die gezeigt haben, daß die Zerstörung der

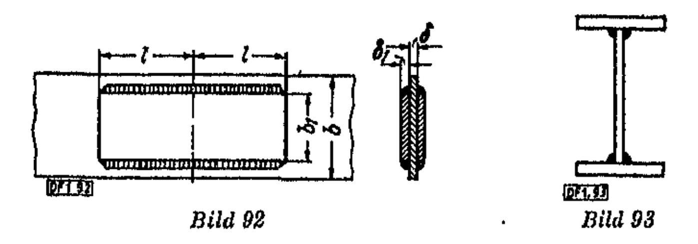


Bild 92 *Bild 93*

Kehlnähte hauptsächlich in der Ebene $ABCD$ (Bild 94, b) auftritt. Die Berechnungsfläche des Nahtquerschnitts wird daher $F = ml = 0{,}7\,hl$, worin l die Berechnungslänge der Naht ist.

Die *Schlitznähte* befinden sich in einem schmalen Schlitz eines der aufeinandergelegten Bleche. Der Schlitz wird parallel zur Kraftwirkung angeordnet. Auf dem Bild 95 ist der Anschluß eines ⊏-Eisens mit einem Knotenblech durch Flankenkehlnähte und Schlitznähte gezeigt. Die Berechnungsfläche der Schlitznaht ist $F = ld$, worin d die untere Breite des Schlitzes ist (Bild 95, b).

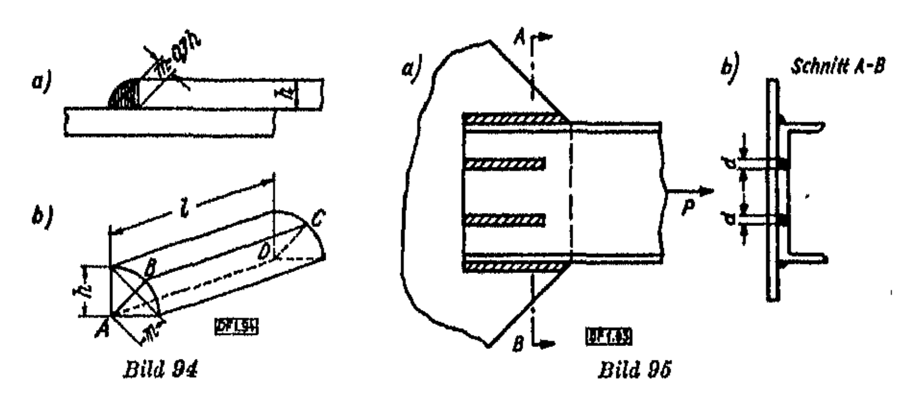


Bild 94 *Bild 95*

In allen Fällen wird die Berechnungslänge der Naht um 1 cm kürzer als die tatsächliche Länge angenommen, da am Anfang und am Ende der Naht ihre Festigkeit sich als unzureichend erwiesen hat (Kraterbildung infolge der Zündung und Löschung des Lichtbogens)[2].

[1]) *Anm. d. deutschen Redaktion:* Nach den deutschen Vorschriften wird für „m" die Bezeichnung „a" verwendet.

[2]) *Anm. d. deutschen Redaktion:* Sogenannte „Endkrater".

Die Zerstörung der Stirnkehlnähte trägt den Charakter, der einem spröden Werkstoff eigen ist: Die plastischen Verformungen vor der Zerstörung sind gering. Daher werden Stirnkehlnähte in der Regel in Konstruktionen in der Kombination mit Flankenkehlnähten, deren Zerstörung mit wesentlichen plastischen Verformungen vor sich geht, angewandt, oder sie werden durch schräge Nähte ersetzt.

Sämtliche Kehlnähte werden unabhängig von ihrer Richtung zur Kraft auf Abscheren berechnet.

Die zulässigen Spannungen für Schweißnähte werden von der Art und Qualität der angewandten Elektroden bestimmt. Zum Schutz des abschmelzenden Elektrodenmetalls vor Oxydation und Verbrennung wertvoller Zusätze, die Kohlenstoffstählen beim metallurgischen Prozeß der Stahlverhüttung beigegeben werden, sind die Elektroden mit einer besonderen Hülle umgeben. Für Elektroden mit sogenanntem dünnem Mantel (Kreide in Wasserglas aufbereitet) sind folgende zulässige Spannungen (Normen vom Jahre 1946) festgelegt:

$$\sigma_{z\,zul} = 1000\ \text{kg/cm}^2, \quad \sigma_{l\,zul} = 1100\ \text{kg/cm}^2 \quad \text{und} \quad \tau_{a\,zul} = 800\ \text{kg/cm}^2.$$

Außerdem kommen Elektroden mit dickem Mantel von besonderer Zusammensetzung zur Anwendung, der es ermöglicht, diese Spannungen wegen der besseren mechanischen Eigenschaften der sich ergebenden Schweißnaht wesentlich zu erhöhen. Die angegebenen Spannungen beziehen sich auf die Wirkung einer statischen Belastung. Bei wechselnder und schwellender Belastung werden die zulässigen Spannungen herabgesetzt.

Beispiel 15

Zu berechnen ist der Zugstoß eines Stahlbleches ▭ 200.14, der beiderseitig durch Laschen gedeckt ist, wobei die Festigkeit des Stoßes gleich der Festigkeit auf Zug des Bleches sein soll. Das Material ist Ст. 0с, die Elektroden haben eine dünne Ummantelung, und die Laschen sollen am ganzen Umfang verschweißt sein (Bild 96). Indem wir von der Festig-

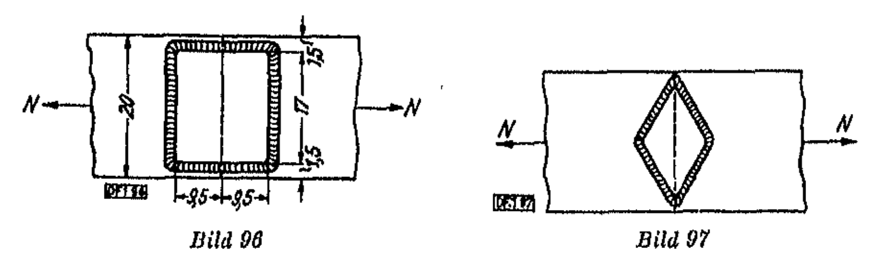


Bild 96 *Bild 97*

keit des ganzen Bleches ausgehen, ermitteln wir die größte Kraft N, die der Stoß aufnehmen kann. Die Querschnittsfläche des Blechs ist $1{,}4 \cdot 20 = 28\ \text{cm}^2$.

Die Rechnung ergibt $N = 1400 \cdot 28 = 39\,200$ kg. Nehmen wir eine Laschendicke von 10 mm und eine gleiche Nahtdicke in Richtung der Kathete an. Die Berechnungsdicke der Naht wird damit gleich 0,7 cm. Die erforderliche Gesamtlänge der Nähte wird $\sum l_{erf} = \frac{39\,200}{0{,}7 \cdot 800} = 70$ cm oder 35 cm an jeder *Laschenhälfte* sein. Rückt man von den Blechrändern um 1,5 cm zur Unterbringung von Flankenkehlnähten (Bild 96) ab, so erhalten

vir eine Stirnkehlnahtlänge von $l_{erf} = 17$ cm. Dann wird die Länge der Flankenkehlnähte $\frac{5 - 17}{2} = 9$ cm sein. Wir fügen 1 cm für das Zünden und Löschen des Lichtbogens hinzu ınd wählen Flankenkehlnähte von der Gesamtlänge gleich 19 cm.

Den gleichen Stoß kann man mit Hilfe von rhombenförmigen Laschen und schrägen Vähten, wie auf Bild 97 gezeigt, ausführen, wenn man die oben gefundene Gesamtlänge ler Nähte beibehält. Eine solche Lösung ist als zweckmäßiger anzusehen, da die Nähte ;leichmäßiger arbeiten und die Übertragung durch diese gleichmäßiger vor sich geht.

Beispiel 16

Zu berechnen ist der Querschnitt einer auf Zug beanspruchten Fachwerkstrebe aus ,wei gleichschenkligen Winkeln. Gleichzeitig sind die geschweißten Flankenkehlnähte zu berechnen, die die Winkeleisen mit dem Knotenblech verbinden (Bild 98). Das Material ist aus Ст. 2, die Elektroden haben eine dünne Ummantelung. Die Kraft in der Strebe ist $N = 29$ t.

Die erforderliche Querschnittsfläche der Strebe ist

$$F = \frac{29000}{1400} = 20{,}7 \text{ cm}^2.$$

Wir wählen einen Querschnitt aus zwei Winkeln L 75 · 75 · 8 mit einer Querschnittsfläche 11,5 · 2 = 23 cm².

Die Arbeitsfläche der geschweißten Flankenkehlnähte ist je Winkel

$$F_{\text{Naht}} = \frac{14500}{800} = 18{,}1 \text{ cm}^2.$$

Diese Fläche verteilen wir auf die oberen und unteren Nähte in Übereinstimmung mit der auf jede Naht entfallenden Kraft. Die Kräfte werden umgekehrt proportional den Abständen der Nähte bis zur Wirkungslinie der Kraft N sein, die durch den Schwerpunkt des Querschnitts geht, dessen Koordinaten in der Tafel der Winkelprofile angegeben sind (Bild 98):

Bild 98

$$F_0 = \frac{18{,}1 \cdot 5{,}4}{7{,}5} = 13{,}0 \text{ cm}^2, \quad F_u = \frac{18{,}1 \cdot 2{,}1}{7{,}5} = 5{,}1 \text{ cm}^2.$$

Die Dicke der unteren Naht ist durch die Dicke des Winkelschenkels beschränkt und ;leich 0,8 cm; die Dicke der oberen Naht wählen wir 1,2 cm. Die Nahtlängen werden zu

$$l_0 = \frac{13{,}0}{0{,}7 \cdot 1{,}2} = 15{,}5 \text{ cm} \quad \text{und} \quad l_u = \frac{5{,}1}{0{,}7 \cdot 0{,}8} = 9{,}1 \text{ cm}.$$

Wir wählen Nähte von 16 und 10 cm Länge (Bild 98). Es haben sich leichtere Winkel ınd eine viel geringere Länge der Verbindung ergeben als im Beispiel 12 des Kapitels 3.10, vo für die gleiche Kraft eine Nietverbindung konstruiert wurde (vgl. Bild 87).

3.12 Berechnung von Versätzen

Bei der Berechnung der Verbindungen von Holzbalken durch Stirnversätze werden die Druck- und Scherspannungen über die Druck- und Scherflächen gleichmäßig verteilt angenommen. Die zulässige Spannung für Kiefernholz auf Abscheren längs der Faser wird zu $\tau_{zul} = 10 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}$ angenommen. Die zulässige Druckspannung hängt von der Richtung der wirkenden Kraft zu den Fasern

ab und ändert sich von 100 kg/cm² (Druck längs der Faser) bis 25 kg/cm² (Pressung [Druck] quer zur Faser)[1]).

Beispiel 17

Es soll der Stirnversatz der Strebe mit Untergurt eines aus Kantholzbalken konstruierten Dachstuhls berechnet werden. Der Querschnitt der Strebe und des Untergurtes ist 14 × 18 cm. Die Druckkraft in der Strebe ist $N = 5300$ kg. Der Neigungswinkel der Dachstrebe ist $\alpha = 20°$ (Bild 99). Das Material ist Kiefernholz. Das Ende der Strebe ist senkrecht zu ihrer Achse geschnitten[2]).

Wir zerlegen die Kraft N in die vertikale und horizontale Komponente. Die erste wird durch den Auflagerdruck V und die zweite durch die Kraft im Untergurt ausgeglichen. Die horizontale Komponente, die gleich $H = N \cos \alpha = 5300 \cdot 0{,}94 = 4980$ kg ist, wird bestrebt sein, das hinauslaufende Ende des Untergurts in der Ebene $b-c$ abzuscheren. Außerdem ruft die Kraft N eine Pressung am Flächenelement $a-b$ hervor, das senkrecht zur Richtung der Kraft N steht und folglich unter dem Winkel α zur Vertikalen geneigt ist.

Aus der Festigkeitsbedingung auf Druck ermitteln wir die erforderliche Einschnittiefe h_1 der Strebe in den Untergurt. Der Druck wirkt am Flächenelement längs der Faser der

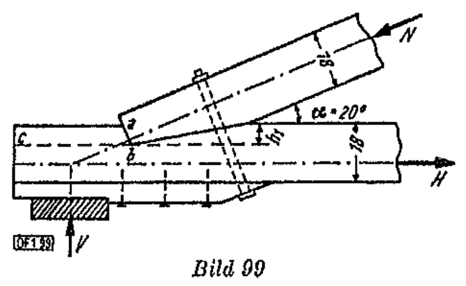


Bild 99

Strebe und unter dem Winkel von 20° zu den Fasern des Untergurtes. Für den letzteren Fall wird die zulässige Druckspannung gemäß den Angaben der Berechnungsnormen für Holzkonstruktionen zu 89 kg/cm² angenommen.

---

[1]) *Anm. d. deutschen Redaktion:* Deutsche entsprechende zulässige Spannungen (DIN 1052): $\tau_{zul} = 9$ kg/cm², σ_d zwischen 85 und 20 (25) kg/cm².

[2]) *Anm. d. deutschen Redaktion:* In Deutschland wird ein Stirnversatz so ausgebildet, daß die Druckfläche des Schrägstreben-Endes auf der Winkelhalbierenden des stumpfen Winkels liegt, der von der Oberkante der Schwelle und der Parallelen zur Oberkante der Schrägstreben durch den Schnittpunkt auf der Winkelhalbierenden gebildet wird. Es wird damit eine optimale Ausnutzung der Druckspannungen an der Berührungsfläche zwischen Versatzeinschnitt und Schrägstrebenende erreicht. Die Übertragungskraft, die normal zu dieser Berührungsfläche steht, bildet dann nämlich mit der Faserrichtung der Schwellen und der Streben einen Winkel von nur $\frac{\alpha}{2} = 10°$. Die zulässige Spannung $\sigma_{d \sphericalangle}$ wird damit höher.

Nach DIN 1052, §29, ist die zulässige Einschnittiefe $1/4 \cdot h$ bei der Strebenneigung zwischen 0° und 50° und $1/6 \cdot h$ bei der Strebenneigung über 60°. Zwischen 50° und 60° ist geradlinig einzuschalten. Es ist üblich geworden, bei unter (oder über) den Schwellen angeordneten Längshölzern diese Werte in bestimmten Grenzen zu überschreiten. Bei dieser Art der Versatzausbildung ist die Strebenkraft N in zwei Komponenten N' und N'' zu zerlegen. Die Kraft N steht auf der obengenannten Berührungsfläche senkrecht und ruft infolge der Abweichung der Kraftrichtung der Schrägstrebenkraft ein zusätzliches, unbeabsichtigtes Biegemoment im Untergurt hervor. Die Übertragung der Seitenkraft N'' erfolgt, wie durch viele Versuche bewiesen, nicht auf der langen Versatzfläche, sondern durch Reibung auf der Stirnfläche (Druckfläche). Diese durch Tatsachen erhärtete Kraftübertragung resultiert aus dem sogenannten „Unterstechen" der langen Versatzfläche; die Reibung entsteht in ausreichendem Maße durch das scharfe Aufeinanderpressen der Faserenden in der Berührungsfläche. Es ist somit $N' = N \cdot \cos \frac{\alpha}{2}$ und $N'' = N \cdot \sin \frac{\alpha}{2}$.

e ist: $$F_{Dr} = \frac{14\,h_1}{\cos 20^\circ} = 14{,}9\,h_1.$$

bedingung lautet: $\frac{N}{F_{Dr}} = \frac{5300}{14{,}9\,h_1} \leqq 89\,\mathrm{kg/cm^2}$,

cm ist (gemäß den Normen ist es erlaubt, die Einschnittiefe bis zu $^1/_3$ der
e zu führen).

es Gurtvorholzes $bc = l_v$ ermitteln wir auf Grund der Festigkeitsbedingung
längs der Faser bei einer zulässigen Spannung $\tau_{zul} = 10\,\mathrm{kg/cm^2}$.

fläche ist:

$$F_{sch} = 14\,l_v.$$

itsbedingung lautet:

$$\frac{H}{F_{sch}} = \frac{4980}{14\,l_v} \leqq 10\,\mathrm{kg/cm^2},$$

$\geqq 35{,}5$ cm ergibt; wir wählen $l_v = 36$ cm.
1 99 dargestellte Bolzen wird in der Berechnung nicht berücksichtigt.

4 Trägheitsmomente ebener Figuren

4.01 Begriffsbestimmungen

In der Theorie des einfachen Zuges bzw. Druckes (Abschnitt 2) sind die Abmessungen und die Form des Querschnitts eines Balkens durch die einfachste geometrische Charakteristik, durch die Fläche des Querschnitts wiedergegeben. In der Theorie der Biegung und Verdrehung, die wir in den nächsten Kapiteln darlegen werden, treten kompliziertere, geometrische Charakteristiken des Querschnitts auf, die Trägheitsmomente heißen und zu deren Betrachtung wir nun übergehen[1]).

Nehmen wir eine beliebige, auf die Koordinatenachsen x und y bezogene Figur (Querschnitt) (Bild 100).

Die Ausdrücke

$$S_x = \int_F y\,dF \quad \text{und} \quad S_y = \int_F x\,dF \tag{4.1}$$

nennt man die statischen Flächenmomente der Figur in bezug auf die Achsen x und y oder die Momente ersten Grades. Der Index F am Integralzeichen weist darauf hin, daß sich das Integrieren über die ganze Fläche der Figur erstreckt. Auf Grund des Lehrsatzes über das Moment der Resultierenden (Momentensatz) kann man die Gleichungen:

$$\int_F y\,dF = F\,y_s; \quad \int_F x\,dF = F\,x_s$$

anwenden, in denen F die Fläche der Figur und x_s und y_s die Koordinaten des Schwerpunkts bedeuten. Hieraus erhalten wir zur Bestimmung der Koordinaten des Schwerpunkts folgende Formeln:

Bild 100

$$x_s = \frac{S_y}{F}; \quad y_s = \frac{S_x}{F}. \tag{4.2}$$

Wenn eine Achse durch den Schwerpunkt der Figur geht, so ist das entsprechende statische Moment gleich Null, wie dies aus (4.2) leicht zu ersehen ist.

Erhöht man in den Formeln (4.1) unter dem Integral die Potenz der Koordinaten x und y des Flächenelements dF, so erhalten wir Flächenmomente zweiten, dritten und höheren Grades in bezug auf die Achsen x und y[2]).

---

[1]) Für das Studium der Theorie der einfachen Biegung und Verdrehung genügt es, wenn der Leser die grundlegenden Eigenschaften der Trägheitsmomente, die in den Kapiteln 4.01 bis 4.05 dieses Abschnitts dargelegt sind, kennenlernt. Die übrigen Kapitel muß man vor dem Lesen des Abschnitts 10 (zusammengesetzte Beanspruchung des Balkens) studieren.

[2]) Flächenmomente dritten und höheren Grades kommen z. B. bei der Untersuchung einer gekrümmten Achse des Balkens vor. Der Lehrsatz über das Moment der Resultierenden, auf Grund dessen die Formeln (4.2) abgeleitet wurden, ist selbstverständlich in bezug auf die Momente zweiten und höheren Grades nicht anwendbar.

lächenmomente zweiten Grades

$$J_x = \int_F y^2 \, dF; \qquad J_y = \int_F x^2 \, dF \tag{4.3}$$

en *äquatoriale* oder *axiale Trägheitsmomente* in bezug auf die Achsen Ox Oy.

as Integral der Produkte der elementaren Flächenelemente mit den beiden rdinaten

$$J_{xy} = \int_F xy \, dF \tag{4.4}$$

t die Bezeichnung *Zentrifugalträgheitsmoment* der Fläche der Figur.

enn jedes elementare Flächenelement dF mit dem Quadrat seines Radius-ors r, der aus irgendeinem bestimmten Punkt, z. B. aus dem Anfang der rdinaten geführt ist, multipliziert wird, so nennt man das Integral *polares heitsmoment* der Figur in bezug auf den gewählten Punkt (Pol):

$$J_p = \int_F r^2 \, dF. \tag{4.5}$$

as polare Trägheitsmoment ist immer gleich der Summe der äquatorialen J_x J_y für ein beliebiges Paar senkrecht zueinander stehender Achsen x und y, urch den Pol O gehen (Bild 100). Zum Beweis setzen wir den Wert $r^2 = x^2 + y^2$ e Formel (4.5) ein:

$$J_p = \int_F r^2 \, dF = \int_F (x^2 + y^2) \, dF = \int_F x^2 \, dF + \int_F y^2 \, dF = J_y + J_x. \tag{4.6}$$

s den Formeln (4.3), (4.4) und (4.5) geht hervor, daß die äquatorialen und en Trägheitsmomente immer positiv sind. Das Zentrifugalmoment kann v und negativ sowie im Sonderfall gleich Null sein, da die elementaren ukte xy für verschiedene Flächenelemente dF verschiedene Vorzeichen n können. Die Trägheitsmomente der Flächen sind Werte rein geometrischen ukters, die die Dimension (Länge)^4 haben. Gewöhnlich werden sie in cm^4 drückt. Die Achsen x und y, die durch den Schwerpunkt der Figur gehen, n zentrale Trägheitsachsen der Figur.

rägheitsmomente in bezug auf parallele Achsen

mmen wir an, daß eine Figur von beliebiger Form auf die Zentralachsen x bezogen ist (Bild 101). Gehen wir zu den parallelen Achsen x_1 und y_1 über, Abstand a und b von den vorherigen Achsen verlaufen. Die Abhängigkeit on den Koordinaten eines beliebigen elementaren Flächenelements dF gur in bezug auf die neuen und früheren Achsen drückt sich wie folgt aus:

$$x_1 = x + a,$$

$$y_1 = y + b.$$

Setzen wir diese Werte x_1 und y_1 in die allgemeinen Formeln (4.3) und (4.4) der Trägheitsmomente in bezug auf die neuen Achsen ein, dann erhalten wir:

$$J_{x_1} = \int_F y_1^2\,dF = \int_F (y+b)^2\,dF = \int_F y^2\,dF + 2b\int_F y\,dF + b^2\int_F dF;$$

$$J_{y_1} = \int_F x_1^2\,dF = \int_F (x+a)^2\,dF = \int_F x^2\,dF + 2a\int_F x\,dF + a^2\int_F dF;$$

$$J_{x_1 y_1} = \int_F x_1 y_1\,dF = \int_F (x+a)\,(y+b)\,dF =$$

$$= \int_F xy\,dF + a\int_F y\,dF + b\int_F x\,dF + ab\int_F dF.$$

Wir merken uns, daß $\int_F x\,dF = \int_F y\,dF = 0$ ist, weil dies die statischen Momente in bezug auf die Zentralachsen sind, daß $\int_F dF = F$ ist, also gleich der Fläche der ganzen Figur, daß $\int_F y^2\,dF = J_x$, $\int_F x^2\,dF = J_y$ und $\int_F xy\,dF = J_{xy}$ sind, und schreiben die vorhergehenden Gleichungen auf folgende Weise um:

$$J_{x_1} = J_x + b^2F, \qquad J_{y_1} = J_y + a^2F \tag{4.7}$$ [1]

und

$$J_{x_1 y_1} = J_{xy} + abF. \tag{4.8}$$

Die Formeln (4.7) zeigen, daß beim Übergang von der Zentralachse zu einer ihr parallelen anderen Achse das äquatoriale Trägheitsmoment um einen Wert gleich dem Produkt der Fläche der Figur mit dem Quadrat des Abstandes zwischen den Achsen anwächst. Hieraus folgt, daß von allen untereinander parallelen Achsen die Zentralachse das kleinste Trägheitsmoment besitzt, da die Werte a^2F und b^2F stets positiv sind. Aus der Formel (4.8) ist zu ersehen, daß bei der parallelen Übertragung der beiden Zentralachsen das Zentrifugalmoment eine Zunahme (eine positive oder negative) erfährt, die gleich dem Produkt der Querschnittsfläche mit den Koordinaten ihres Schwerpunkts im neuen Achsensystem ist. Bei der Übertragung nur einer von den Zentralachsen, d. h., wenn $a = 0$ oder $b = 0$ ist, ändert sich das Zentrifugalmoment nicht.

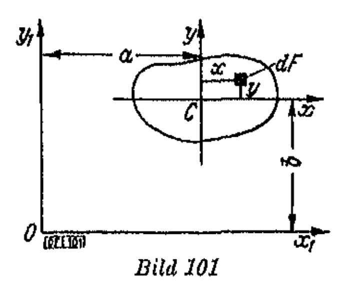


Bild 101

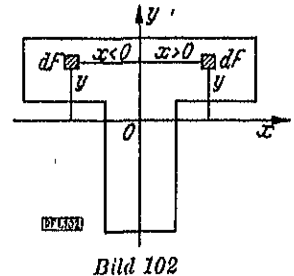


Bild 102

4.03 Begriff der Hauptträgheitsachsen

Beweisen wir, daß es für jede ebene Figur mindestens ein Paar senkrecht zueinander stehender Achsen mit dem Anfang in einem ganz bestimmten Punkt gibt, bei dem das Zentrifugalmoment gleich Null ist. Solche Achsen heißen *Hauptträgheitsachsen* der Figur.

---

[1]) *Anm. d. deutschen Redaktion:* Sogenannter „Steinerscher Satz".

Wählen wir beliebige aufeinander senkrechte Achsen x und y, die durch einen willkürlichen Punkt O gehen (Bild 100). Gemäß der Begriffsbestimmung des Zentrifugalmoments in bezug auf diese Achsen ist $J_{xy} = \int_F x\,y\,dF$. Drehen wir jetzt die Achsen um den Anfangspunkt der Koordinaten um 90° im Gegensinn des Uhrzeigers und bezeichnen die neuen Richtungen mit x' und y', dann werden die neuen Koordinaten eines beliebigen elementaren Flächenelements dF durch die früheren Koordinaten wie folgt ausgedrückt:

$$x' = y; \quad y' = -x.$$

Das Zentrifugalmoment in bezug auf die gedrehten Achsen wird

$$J_{x'y'} = \int x'\,y'\;dF = \int y(-x)\,dF = -J_{xy}.$$

Demnach ändert das Zentrifugalmoment bei einer Drehung der Achsen um 90° das Vorzeichen.

Bei allmählicher Drehung der Achsen ändern sich die Koordinaten der elementaren Flächenelemente und folglich auch das Zentrifugalmoment kontinuierlich. Daher wird bei einem gewissen Drehwinkel, der kleiner als 90° ist, das Zentrifugalmoment seinen Nullwert überschreiten, wobei die Achsen, die dieser Richtung entsprechen, die Hauptachsen der Figur sein werden. In der Festigkeitslehre hat man es fast immer mit den Zentralachsen zu tun, so daß man die Hauptzentralachsen des Querschnitts einfach die *Hauptachsen* nennt und hierbei den Anfang der Koordinaten im Schwerpunkt des Querschnitts annimmt. Zwei Ebenen, die durch die Längsachse des Balkens und die Hauptachsen seiner Querschnitte gehen, heißen *Hauptträgheitsebenen* des Balkens.

Eine beliebige Symmetrieachse der Figur ist eine der Hauptzentralträgheitsachsen. Nehmen wir z. B. an, daß der auf Bild 102 dargestellte Querschnitt in bezug auf die y-Achse symmetrisch ist, dann entspricht jedem elementaren Flächenelement dF rechts von der y-Achse ein gleiches Flächenelement links davon, und zwar der Größe nach mit denselben Koordinaten, von denen x das umgekehrte Vorzeichen hat. Alle elementaren Produkte $x\,y\,dF$ erweisen sich als paarweise gleich und mit umgekehrten Vorzeichen, so daß sich ihr Integral, d. h. das Zentrifugalmoment, in Null verwandelt. Die andere Hauptachse des Querschnitts wird natürlich senkrecht zu der Symmetrieachse stehen. Auf diese Weise bietet das Auffinden der Hauptzentralachsen von Figuren (Querschnitten), wenn sie auch nur eine Symmetrieachse besitzen, keinerlei Schwierigkeiten. Die Ermittlung der Hauptachsen von unsymmetrischen Figuren ist im Kapitel 4.07 dargelegt.

4.04 Trägheitsmomente einfachster Figuren

A. *Rechteck mit der Basis b und der Höhe h*

Zur Berechnung des Trägheitsmomentes eines Rechtecks in bezug auf die Hauptzentralachse x ist zu empfehlen, die Fläche desselben durch zur x-Achse parallele Linien in unendlich schmale Streifen aufzuteilen (Bild 103). Die Fläche eines der Streifen (auf der Zeichnung schraffiert) ist

$$dF = b\,dy.$$

Die Ordinate des Streifenschwerpunktes ist gleich y und das Trägheitsmoment des Rechtecks in bezug auf die x-Achse

$$J_x = \int_F y^2\, dF = \int_F y^2 b\, dy\,.$$

Wir führen die Integration durch, indem wir zur Ausdehnung des Integrals über die ganze Fläche des Rechtecks y in den Grenzen von $-\frac{h}{2}$ bis $+\frac{h}{2}$ ändern:

$$J_x = b \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} y^2\, dy = \frac{b h^3}{12}\,. \tag{4.9}$$

Für die x_1-Achse, die mit der Basis des Rechtecks zusammenfällt, ermittelt sich das Trägheitsmoment leicht nach der Formel (4.7):

$$J_{x_1} = J_x + \left(\frac{h}{2}\right)^2 F = \frac{b h^3}{12} + \frac{h^2}{4}\, b h = \frac{b h^3}{3}\,. \tag{4.10}$$

Es ist zweckmäßig, die Formeln (4.9) und (4.10) wegen ihrer häufigen Anwendung im Gedächtnis zu behalten.

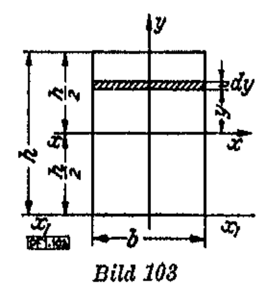


Bild 103

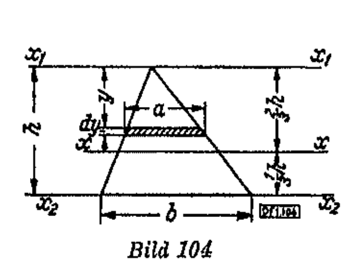


Bild 104

B. *Dreieck mit der Basis b und der Höhe h* (Bild 104)

Wir berechnen das Trägheitsmoment des Dreiecks in bezug auf die Achse x_1, die durch den Scheitelpunkt parallel zur Basis geht, indem wir die Fläche des Dreiecks durch parallel zur Basis geführte Linien in unendlich schmale Streifen aufteilen. Die Fläche eines Streifens berechnet man als Fläche eines Rechtecks mit der Basis a und der Höhe dy. Für den Streifen, der sich im Abstand y von der Achse befindet, ist

$$a = \frac{b y}{h}\,.$$

Die Fläche des Streifens ist

$$dF = \frac{b}{h}\, y\, dy\,.$$

Hieraus ermittelt sich das Trägheitsmoment

$$J_{x_1} = \int_0^h y^2 \frac{b}{h}\, y\, dy = \frac{b h^3}{4}\,. \tag{4.11}$$

Zur Ermittlung des Trägheitsmomentes in bezug auf die x_2-Achse, die mit er Basis zusammenfällt, müssen wir zunächst auf die Zentralachse x übergehen nd von dieser auf die x_2-Achse, indem wir zweimal die Formel (4.7) anwenden:

$$J_x = J_{x_1} - \left(\frac{2h}{3}\right)^2 F = \frac{bh^3}{36},$$

$$J_{x_2} = J_x + \left(\frac{h}{3}\right)^2 F = \frac{bh^3}{36} + \frac{h^2}{9} \cdot \frac{bh}{2} = \frac{bh^3}{12}. \tag{4.12}$$

C. *Kreis*

Auf Grund der Symmetrie folgern wir, daß alle Zentralachsen des Kreises auptachsen sind und die gleichen Trägheitsmomente besitzen. Daher ist unter ugrundelegung von (4.6):

$$J_p = J_x + J_y = 2J_x.$$

Durch unmittelbare Integration ist es einfacher, das polare Trägheitsmoment ı ermitteln. Zu diesem Zweck teilen wir den Kreis in Sektoren mit unendlich kleinem Zentriwinkel $d\varphi$ auf (Bild 105). Wegen der unendlichen Kleinheit des Bogens ds sehen wir die Sektoren als Dreiecke mit der Basis $ds = r\,d\varphi$ und der Höhe r an, wobei r der Radius des Kreises ist. Das Trägheitsmoment des elementaren Dreiecks ermitteln wir auf Grund der Formel (4.11)[1]:

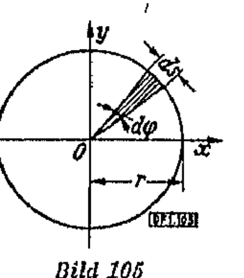


Bild 105

$$dJ_p = \frac{ds\,r^3}{4} = \frac{r^4\,d\varphi}{4}. \tag{4.13}$$

Das polare Trägheitsmoment des Kreises findet man durch Integration der Gleichung (4.13) nach der Veränderlichen φ in den Grenzen von Null bis 2π:

$$J_p = \frac{r^4}{4}\int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{\pi r^4}{2}. \tag{4.14}$$

e äquatorialen Trägheitsmomente des Kreises sind

$$J_x = J_y = \frac{J_p}{2} = \frac{\pi r^4}{4}. \tag{4.15}$$

wird empfohlen, die Formeln (4.14) und (4.15) im Gedächtnis zu behalten.

05 Trägheitsmomente zusammengesetzter symmetrischer Querschnitte

Wenn ein zusammengesetzter Querschnitt in Einzelteile unterteilt werden nn, die die Form von Rechtecken, Dreiecken usw. haben, so kann man das ägheitsmoment des Querschnitts als Summe der Trägheitsmomente der Einzelle finden[2]).

---

[1]) Wegen der unendlichen Kleinheit der Basis ds des Dreiecks erweisen sich seine Trägheitsmomente, mlich das polare in bezug auf den Scheitelpunkt und das äquatoriale für die durch den Scheitelpunkt allel zur Basis geführte Achse, als gleich, was aus ihrer Begriffsbestimmung selbst folgt.

[2]) Dies folgt unmittelbar aus der Grundeigenschaft des Integrals der Summe.

Man ermittelt zunächst auf die übliche Weise den Schwerpunkt des zusammengesetzten Querschnitts. Bei Vorhandensein zweier Achsen einer geraden oder schrägen Symmetrie liegt der Schwerpunkt selbstverständlich im Schnittpunkt derselben.

Es soll z. B. das Trägheitsmoment eines trogähnlichen (U-förmigen) Querschnitts in bezug auf die x-Achse gefunden werden. Die Abmessungen in cm sind auf Bild 106 angegeben. Unterteilen wir den Querschnitt in drei Rechtecke I, II und III, so finden wir das Trägheitsmoment des Rechtecks I auf Grund der Formel (4.9):

$$J_x^I = \frac{1 \cdot 23^3}{12} = 1014 \text{ cm}^4.$$

Die Trägheitsmomente der Rechtecke II und III sind symmetriegleich. Zu ihrer Berechnung wenden wir die Formeln (4.9) und (4.7) an, d. h. zuerst berechnen wir das Trägheitsmoment in bezug auf die Zentralachsen der Rechtecke II und III, die zur x-Achse parallel laufen, und gehen alsdann zur x-Achse über:

$$J_x^{II} = J_x^{III} = \frac{9 \cdot 1{,}5^3}{12} + 9 \cdot 1{,}5 \cdot 12{,}25^2 = 2027 \text{ cm}^3.$$

Das gesamte Trägheitsmoment des Querschnitts ist

$$J_x = 1014 + 2 \cdot 2027 = 5068 \text{ cm}^4.$$

Die Werte der Trägheitsmomente für Querschnitte von gewalzten Stahlprofilen (I, L, [u. a. Stählen) sind in den Tafeln „Гост" angegeben[1]). Die Benutzung

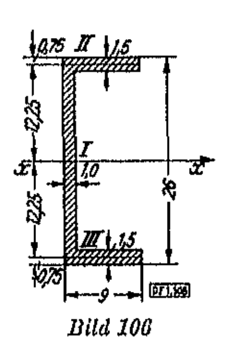


Bild 106

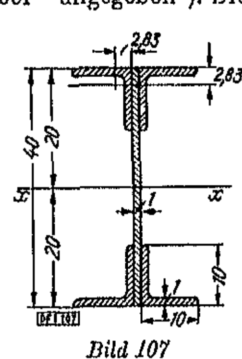


Bild 107

der Tafeln erleichtert sehr die Berechnung der Trägheitsmomente von Querschnitten, die aus gewalzten Blechen und Profilstäben zusammengesetzt sind (zusammengenietet oder verschweißt).

Als Beispiel wollen wir bei Benutzung der Tafeln „Гост" das Trägheitsmoment J_x eines Querschnitts ermitteln, der aus einem senkrechten Stegblech ▭ 400 · 10 mm und vier gleichschenkligen Winkeln L 100.100.10 zusammen-

---

[1]) *Anm. d. deutschen Redaktion:* Die Tafeln „Гост" sind sowjetische Normen. Die wichtigsten deutschen Normen sind: DIN 1025 (I-Stahl), DIN 1026 ([-Stahl), DIN 1028 und DIN 1029 (L-Stahl) u. a.

setzt ist. Die Abmessungen in cm sind auf Bild 107 angegeben. Das Trägheits-
oment des vertikalen Stegblechs ermitteln wir nach der Formel (4.9):

$$J_1 = \frac{1 \cdot 40^3}{12} = 5333\ \text{cm}^4.$$

ır die Winkel finden wir in der Tafel „ГОСТ" den Abstand des Schwer-
nkts von den äußeren Schenkelkanten $z_0 = 2{,}83$ cm, die Querschnittsfläche
$= 19{,}2\ \text{cm}^2$ und das Trägheitsmoment $J_x = 179\ \text{cm}^4$ in bezug auf die den
henkeln parallelen Zentralachsen des Winkels. Unter Benutzung dieser Daten
rechnen wir das Trägheitsmoment eines Winkels in bezug auf die x-Achse
ch der Formel (4.7):

$$J_2 = 179 + 19{,}2 \cdot 17{,}17^2 = 5839\ \text{cm}^4.$$

ıs gesamte Trägheitsmoment des Querschnitts ist somit

$$J_x = 5333 + 4 \cdot 5839 = 28689\ \text{cm}^4.$$

ıf ähnliche Weise finden wir das Trägheitsmoment J_y in bezug auf die vertikale
ntralachse:

$$J_y = \frac{40 \cdot 1^3}{12} + 4\,(179 + 19{,}2 \cdot 3{,}33^2) = 1571\ \text{cm}^4.$$

der Praxis kann man sich mit der Genauigkeit begnügen, die der Rechen-
ıieber liefert.

)6 Änderung der Trägheitsmomente bei einer Drehung der Koordinatenachsen

In allen Fällen der Berechnung von Balken auf Biegung muß man die Richtung
r Hauptzentralträgheitsachsen des Querschnitts und die Größe der ent-
rechenden (Haupt-)Trägheitsmomente kennen. Daher muß man zusätzlich zu
dem im Kapitel 4.03 Dargelegten die Verfahren
zur Auffindung der Hauptachsen eines unsym-
metrischen Querschnitts kennenlernen.

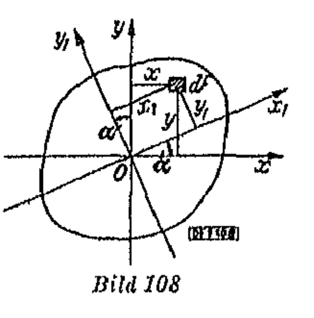


Bild 108

Nehmen wir einen Querschnitt von beliebiger
Form (Bild 108), der auf beliebige Zentralachsen x
und y bezogen ist, und betrachten wir die Ände-
rung der Trägheitsmomente bei einer Drehung der
Achsen[1]). Kombiniert man die im Abschnitt 4.02
durchgenommene parallele Übertragung der
Achsen mit ihrer Drehung, so haben wir den all-
gemeinsten Fall der Veränderung der Koordinaten.
Nehmen wir an, daß uns die Äquatorial- und
entrifugalträgheitsmomente des Querschnitts in bezug auf die gewählten Achsen
und y bekannt sind[2]):

$$J_x = \int_F y^2\,dF, \qquad J_y = \int_F x^2\,dF, \qquad J_{xy} = \int_F x\,y\,dF.$$

[1]) Alle folgenden Überlegungen und Berechnungen in diesem Abschnitt behalten ihre Gültigkeit
ı Annahme des Anfangspunktes der Koordinaten in einem beliebigen Punkt, jedoch sind in der
stigkeitslehre nur die Zentralachsen von praktischem Interesse.
[2]) Die grundlegenden Verfahren zur Berechnung der äquatorialen Trägheitsmomente sind im Ka-
ıel 4.05 dargelegt. Über die Berechnung des Zentrifugalmoments siehe Kapitel 4.09.

Drehen wir beide Achsen um einen gewissen Winkel im Gegensinne des Uh zeigers, wobei vorausgesetzt wird, diese Richtung als positiv anzusehen, und e mitteln wir die Trägheitsmomente J_{x_1}, J_{y_1} und $J_{x_1 y_1}$ in bezug auf die neue Achsen x_1 und y_1 (Bild 108), so erhalten wir:

$$J_{x_1} = \int_F y_1^2 \, dF, \qquad J_{y_1} = \int_F x_1^2 \, dF, \qquad J_{x_1 y_1} = \int_F x_1 y_1 \, dF. \qquad (4.1$$

Für das gedrehte Achsensystem werden die Koordinaten x_1 und y_1 eines b liebigen elementaren Flächenelements dF des Querschnitts durch seine frühere Koordinaten auf folgende Weise ausgedrückt[1]):

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= x \cos\alpha + y \sin\alpha, \\ y_1 &= y \cos\alpha - x \sin\alpha. \end{aligned}\right\} \qquad (4.1$$

Setzen wir diese Werte der Koordinaten in die erste und letzte der Gleichunge (4.16) ein:

$$\left.\begin{aligned} J_{x_1} &= \int_F y_1^2 \, dF = \int_F (y \cos\alpha - x \sin\alpha)^2 \, dF, \\ J_{x_1 y_1} &= \int_F x_1 y_1 \, dF = \int_F (x \cos\alpha + y \sin\alpha)(y \cos\alpha - x \sin\alpha) \, dF. \end{aligned}\right\} \qquad (4.1$$

Löst man die Klammern unter den Integralen auf, so erhalten wir nach de Ordnen:

$$\left.\begin{aligned} J_{x_1} &= \cos^2\alpha \int_F y^2 \, dF + \sin^2\alpha \int_F x^2 \, dF - 2 \sin\alpha \cos\alpha \int_F x y \, dF, \\ J_{x_1 y_1} &= \sin\alpha \cos\alpha \left[\int_F y^2 \, dF - \int_F x^2 \, dF\right] + (\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) \int_F x y \, dF. \end{aligned}\right\} \qquad (4.1$$

Wir stellen fest, daß die Integrale der rechten Teile der Gleichungen (4.19) di Trägheitsmomente in bezug auf die ursprünglichen Achsen x und y darstelle und schreiben diese Gleichungen in folgende Form um:

$$J_{x_1} = J_x \cos^2\alpha + J_{xy}\, 2 \sin\alpha \cos\alpha,\text{[2]}) \qquad (4.2$$

$$J_{x_1 y_1} = \frac{J_x - J_y}{2}\, 2 \sin\alpha \cos\alpha + J_{xy} (\cos^2\alpha - \sin^2\alpha). \qquad (4.2$$

Das Trägheitsmoment J_{y_1} finden wir aus (4.20), indem wir in dieser Gleichun α durch $\alpha + \frac{\pi}{2}$ ersetzen:

$$J_{y_1} = J_x \sin^2\alpha + J_y \cos^2\alpha + J_{xy}\, 2 \sin\alpha \cos\alpha. \qquad (4.2$$

Die erhaltenen Formeln bestimmen alle drei Trägheitsmomente in bezug auf di gedrehten Achsen. Addiert man die Glieder von (4.20) und (4.22), so erhalten wi

$$J_x + J_y = J_{x_1} + J_{y_1}. \qquad (4.2$$

Bei der Drehung der Achsen bleibt folglich die Summe der äquatorialen Träg heitsmomente konstant, wie dies auch sein muß, da gemäß dem Beweis im Ka

[1]) Die Beziehungen (4.17) erhält man, wenn man die Strecken x und y auf die neuen Achse richtungen projiziert.

[2]) *Anm. d. deutschen Redaktion:* Oder auch geschrieben: $J_{x_1} = J_x \cdot \cos^2\alpha + J_y \cdot \sin^2\alpha - J_{xy} \cdot \sin 2$ Dies gilt entsprechend für (4.22).

pitel 4.01 diese Summe gleich dem polaren Trägheitsmoment J_p ist, das ni von der Richtung der Koordinatenachsen abhängig ist.
Ferner ist es zweckmäßig, die Formeln (4.20) bis (4.22) durch Funktionen Winkels 2α auszudrücken, so daß wir nach dem Ordnen der Glieder das Ergeb erhalten[1]):

$$\left.\begin{aligned} J_{x_1} &= \frac{J_x + J_y}{2} + \frac{J_x - J_y}{2}\cos 2\alpha - J_{xy}\sin 2\alpha, \\ J_{y_1} &= \frac{J_x + J_y}{2} - \frac{J_x - J_y}{2}\cos 2\alpha + J_{xy}\sin 2\alpha, \\ J_{x_1 y_1} &= \frac{J_x - J_y}{2}\sin 2\alpha + J_{xy}\cos 2\alpha. \end{aligned}\right\} \qquad (4.$$

4.07 Hauptträgheitsmomente — Richtung der Hauptachsen

Zur weiteren Untersuchung wollen wir uns mit der ersten und dritten Gleichungen (4.24) befassen, da der Wert J_{y_1} immer leicht aus der ersten Gl chung, indem man α durch $\alpha + \frac{\pi}{2}$ ersetzt, erhalten werden kann. Zur Verkürzu der Aufzeichnungen führen wir zeitweilige Bezeichnungen für die konstant Werte ein:

$$\frac{J_x + J_y}{2} = A, \quad \frac{J_x - J_y}{2} = B \quad \text{und} \quad J_{xy} = C. \qquad (4.$$

Dann erhalten wir:

$$\left.\begin{aligned} J_{x_1} - A &= B\cos 2\alpha - C\sin 2\alpha \\ J_{x_1 y_1} &= B\sin 2\alpha + C\cos 2\alpha. \end{aligned}\right\} \qquad (4.$$

Wir erheben die Gleichungen (4.26) ins Quadrat und eliminieren aus ihnen dur Addition den Parameter α und erhalten eine Abhängigkeit zwischen den Träghei momenten J_{x_1} und $J_{x_1 y_1}$:

$$(J_{x_1} - A)^2 + J_{x_1 y_1}^2 = B^2 + C^2. \qquad (4.$$

Die Gleichung (4.27) ist die Gleichung eines Kreises, dessen Radius $R = \sqrt{B^2}$ ist und dessen Mittelpunkt auf der Abszissenachse im Abstand A vom Anfa der Koordinaten liegt. Führen wir die Konstruktion des Kreises durch, ind wir die Koordinatenachsen parallel zu den anfänglich gewählten Achsen x und des Querschnitts führen. Hierbei nehmen wir zur näheren Bestimmtheit daß $J_x > J_y$ und $J_{xy} > 0$ ist. Wir tragen auf der Abszissenachse ON und $OP = J_y$ (Bild 109) ab und finden, indem wir die Strecke PN halbier den Mittelpunkt O_1 des Kreises, dessen Abszisse $\frac{J_x + J_y}{2} = A$ ist. Wir trag

[1]) *Anm. d. deutschen Redaktion:* Als Beispiel die Ableitung bzw. Umformung von J_{x_1}:

$$\begin{aligned} J_{x_1} &= J_x\cos^2\alpha + J_y\sin^2\alpha - J_{xy}2\sin\alpha\cos\alpha \qquad (4. \\ &= \frac{J_x}{2}2\cos^2\alpha + \frac{J_y}{2}2\sin^2\alpha - J_{xy}\sin 2\alpha \\ &= \frac{J_x}{2}(1 + \cos 2\alpha) + \frac{J_y}{2}(1 - \cos 2\alpha) - J_{xy}\sin 2\alpha \\ &= \frac{J_x}{2} + \frac{J_x}{2}\cos 2\alpha + \frac{J_y}{2} - \frac{J_y}{2}\cos 2\alpha - J_{xy}\sin 2\alpha \\ &= \frac{J_x + J_y}{2} + \frac{J_x - J_y}{2}\cos 2\alpha - J_{xy}\sin 2\alpha. \qquad (4. \end{aligned}$$

ferner aus dem Punkt P nach oben die Strecke $PK = J_{xy} = C$ ab und finden, da $PO_1 = \frac{J_x - J_y}{2} = B$ ist, den Radius des Kreises $O_1K = \sqrt{B^2 + C^2} = R$. Ein beliebiger Punkt M des mit diesem Radius geschlagenen Kreises wird gemäß (4.27) die Abszisse $OL = J_{x_1}$ und die Ordinate $LM = J_{x_1 y_1}$ haben[1]).

Nachfolgend soll bewiesen werden, daß die Linie KM hierbei die Richtung der x_1-Achse bestimmt, d. h., daß der $\sphericalangle\, MKS$ gleich dem Drehwinkel α der Achsen ist (Bild 108). Aus Bild 109 finden wir:

$$\operatorname{tg}(MKS) = \frac{ML - SL}{KS} = \frac{J_{x_1 y_1} - J_{xy}}{J_{x_1} - J_y}.$$

Setzt man aus (4.24) die Werte J_{x_1} und $J_{x_1 y_1}$ ein und benutzt man die früheren Abkürzungen, so erhalten wir:

$$\operatorname{tg}(MKS) = \frac{B \sin 2\alpha + C \cos 2\alpha - C}{A + B \cos 2\alpha - C \sin 2\alpha - J_y}.$$

Aus (4.25) findet man, daß $A - J_y = B$ ist. Geht man nun zu den Funktionen des Einzelwinkels über, so ergibt sich, daß

$$\operatorname{tg}(MKS) = \frac{2\,B \sin\alpha \cos\alpha - 2C \sin^2\alpha}{2B \cos^2\alpha - 2C \sin\alpha \cos\alpha} = \frac{\sin\alpha\,(B\cos\alpha - C\sin\alpha)}{\cos\alpha\,(B\cos\alpha - C\sin\alpha)} = \operatorname{tg}\alpha$$

ist, was auch zu beweisen war. Demnach ist

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{J_{x_1 y_1} - J_{xy}}{J_{x_1} - J_y}. \tag{4.28}$$

Jetzt ist es leicht, auf geometrischem Wege die Richtung der Hauptachsen und die ihnen entsprechenden Trägheitsmomente zu ermitteln. Aus Bild 109 ist zu

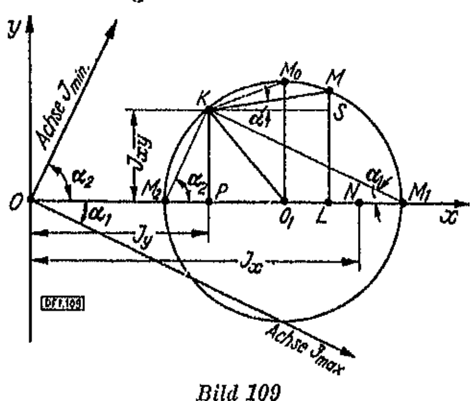


Bild 109

ersehen, daß das Zentrifugalmoment $J_{x_1 y_1}$ gleich Null wird, wenn der Punkt M die Lagen M_1 und M_2 einnimmt. Im ersten Falle erreicht das Trägheitsmoment J_{x_1} den größten Wert $J_{max} = OO_1 + O_1M_1 = A + R$, und der Winkel α_1, der

[1]) Es ist zu erkennen, daß dies der gleiche Mohrsche Kreis ist, der schon im Kapitel 3.05 zur Untersuchung der Spannung angewandt wurde.

eigungswinkel der x_1-Achse, wird durch die Linie KM_1 bestimmt. Auf analy-
ischem Wege wird dieser Winkel aus (4.28) ermittelt, indem man in dieser
leichung $J_{x_1 y_1} = O$ und $J_{x_1} = J_{max}$ annimmt, d. h.

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{J_{xy}}{J_y - J_{max}}.$$

n zweiten Fall wird das Trägheitsmoment J_{x_1} am kleinsten sein:

$$J_{min} = OO_1 - O_1M_2 = A - R.$$

ie entsprechende Achse wird parallel KM_2 sein, und ihr Neigungswinkel er-
ittelt sich auf analytischem Wege wie folgt:

$$\operatorname{tg} \alpha_2 = \frac{J_{xy}}{J_y - J_{min}}.$$

Aus der Zeichnung geht klar hervor, daß der Winkel M_2KM_1 ein rechter ist,
h. die Hauptachsen stehen senkrecht zueinander. Die Trägheitsmomente J_{max}
nd J_{min} heißen *Hauptträgheitsmomente.* Fassen wir die erhaltenen Ergebnisse
zwei Formeln zusammen, die die Hauptträgheitsmomente und die Richtungen
er Hauptachsen bestimmen:

$$J_{\substack{max \\ min}} = \frac{J_x + J_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{J_x - J_y}{2}\right)^2 + J_{xy}^2}, \qquad (4.29)$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{J_{xy}}{J_y - J_{\substack{max \\ min}}}. \qquad (4.30)$$

Bei Benutzung der Formel (4.30) zur Ermittlung des Winkels α_1 der Achse des
rößten Trägheitsmomentes muß man auf der rechten Seite J_{max} einsetzen, zur
rmittlung des Winkels α_2 aber entsprechend J_{min}. Auf diese Weise weist die
ormel (4.30) darauf hin, welche von den beiden Hauptachsen J_{max} und welche
$_{min}$ entspricht. Auf die letztere kann man leicht auf Grund der Querschnitts-
rm unmittelbar aus der Zeichnung schließen; es gibt aber auch solche Fälle,
i denen es schwierig ist, sofort die J_{max}-und J_{min}-Achsen zu unterscheiden.

Bei der Konstruktion des Kreises hatten wir $J_x > J_y$ und $J_{xy} > 0$ ange-
ommen. Bei $J_x < J_y$ und bei beliebigem Wert J_{xy} behalten jedoch sowohl der
ang der Konstruktion als auch die Formel (4.30) ihre Gültigkeit. Es muß nur
aran gedacht werden, daß die Ordinate $PK = J_{xy}$ immer vom Ende der Strecke
$P = J_y$ in Übereinstimmung mit dem Vorzeichen von J_{xy} nach oben oder
ach unten abgetragen wird. Bei der analytischen Berechnung wird stets einer
on den Winkeln α_1 oder α_2 negativ sein, und er muß von der x-Achse im Sinne
es Uhrzeigers abgetragen werden.

Wenn für den Querschnitt die Hauptachsen und die Hauptträgheitsmomente
$_x = J_{max}$ und $J_y = J_{min}$ bekannt sind und es verlangt wird, zu den Achsen
berzugehen, die in bezug auf die Hauptachsen um den beliebigen Winkel α
edreht sind, so ändert sich die Konstruktion und wird auf die gleiche Weise
urchgeführt, wie dies im Kapitel 3.05 für die Spannungen aufgezeigt ist.

Man kann auch solche Achsen ermitteln, denen das größte Zentrifugalmoment
ntspricht und die die *Achsen der größten Trägheitsasymmetrie* genannt werden.

Aus Bild 109 ersieht man, daß

$$\max J_{xy} = O_1M_0 = R = \sqrt{\left(\frac{J_x - J_y}{2}\right)^2 + J^2_{xy}} \quad \text{ist};$$

hierbei ist

$$J_{x_1} = J_{y_1} = A = \frac{J_x + J_y}{2}.$$

Die Richtung der Achse x_1 wird durch die Linie KM_0 bestimmt, wobei der Winkel M_0KM_1, der sich auf den Viertelkreis stützt, gleich 45° ist. Folglich sind die Achsen der größten Trägheitsasymmetrie die Halbierenden der von den Hauptachsen eingeschlossenen rechten Winkel.

Bemerken wir noch, daß $\frac{\max}{\min} J_{xy} = \pm R = \pm \frac{J_{\max} - J_{\min}}{2}$ ist, d. h., daß das größte Zentrifugalmoment gleich der halben Differenz der Hauptträgheitsmomente ist.

Die Formeln (4.24) zeigen, daß bei einer Drehung der Achsen sich die Trägheitsmomente J_{x_1}, J_{y_1} und $J_{x_1y_1}$ nach dem Sinusgesetz ändern. In Bild 110 ist eine

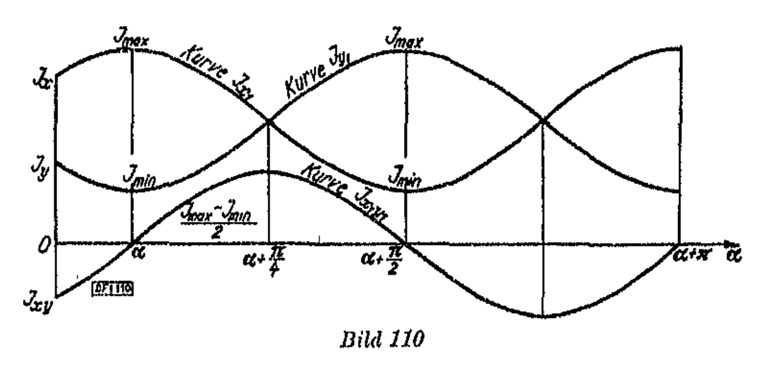


Bild 110

entsprechende graphische Darstellung abgebildet. Auf der Abszissenachse sind die Drehwinkel α und auf der Ordinatenachse die Trägheitsmomente abgetragen.

Der Koordinatenanfang ($\alpha = 0$) entspricht den willkürlichen anfänglichen Achsen x und y (Bild 108), für welche bedingungsgemäß J_x, J_y und J_{xy} bekannt sind. Die graphische Darstellung veranschaulicht die in diesem Kapitel abgeleiteten analytischen Abhängigkeiten.

4.08 Trägheitsradius — Trägheitsellipse

Den Ausdruck für das Trägheitsmoment des Querschnitts in bezug auf eine beliebige Achse x kann man auf Grund des mittleren Integralwertes stets in der Form

$$J_x = \int_F y^2\,dF = i_x^2 \int_F dF = i_x^2 F \quad \text{darstellen,} \tag{4.31}$$

worin F die Fläche des Querschnitts und i_x die Ordinate eines gewissen mittleren Punktes des Querschnitts ist. Diese mittlere Ordinate trägt die Bezeichnung

rägheitsradius des Querschnitts in bezug auf die x-Achse und wird nach der 'ormel

$$i_x = \sqrt{\frac{J_x}{F}} \tag{4.32}$$

erechnet.

Der Trägheitsradius erweist sich als eine sehr geeignete geometrische Charak-eristik des Querschnitts nicht nur für theoretische Ableitungen, sondern auch ür praktische Berechnungen. Daher werden in den Tafeln eines normalen Sorti-nents von Stahlwalzprofilen neben den Trägheitsmomenten auch die ent-prechenden Trägheitsradien angegeben. Die Trägheitsradien i_{max} und i_{min}, die en Hauptachsen entsprechen, heißen *Hauptträgheitsradien.*

Benutzt man den Trägheitsradius, so kann man die Änderung der Trägheits-nomente bei einer Drehung der Achsen durch die Konstruktion der sogenannten 'rägheitsellipse geometrisch darstellen. Nehmen wir an, daß die Richtungen der Hauptzentralachsen x und y und die Hauptträgheitsmomente $J_x = J_{max}$ und $_y = J_{min}$ des Querschnitts bekannt sind. Tragen wir vom Koordinatenanfang O Bild 111) die Werte der Hauptträgheitsradien $OA = i_x = \sqrt{\frac{J_x}{F}}$ und $OB = i_y = \sqrt{\frac{J_y}{F}}$ senkrecht zu den entsprechenden Achsen ab. Wir drehen darauf die x-Achse um einen beliebigen Winkel α in die Lage Ox_1 und tragen, nachdem wir den Trägheitsradius i_{x_1} für die neue Achse ermittelt haben, $h = i_{x_1}$ senkrecht zur neuen Achse ab. Durch den Endpunkt C der Strecke h führen wir eine Gerade CD parallel zur Ox_1-Achse. Gibt man dem Winkel α verschiedene Größen und führt man jedesmal die erwähnte Konstruktion durch, so erhalten wir eine Schar von Geraden CD. Alle diese Geraden sind, wie wir dies gleich beweisen werden, Tangenten einer Ellipse, deren Achsen mit den Hauptachsen des Querschnitts zusammenfallen und deren Achsenhälften der Größe nach gleich den Hauptträgheitsradien sind: $a = i_y$ und $b = i_x$. Eine solche Ellipse trägt die Bezeichnung *Trägheitsellipse.*

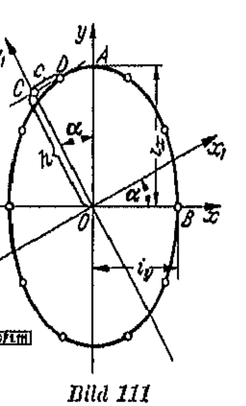


Bild 111

Bei der Beweisführung werden wir den Weg der umgekehrten Methode gehen, d. h. wir nehmen an, daß die Trägheitsellipse bereits konstruiert worden ist Bild 111), ziehen zu dieser eine Tangente parallel zur Ox_1-Achse und beweisen, aß ihr Abstand h bis zur Ox_1-Achse die Größe des dieser Achse entsprechenden rägheitsradius i_{x1} angibt[1]). Schreiben wir die auf die Hauptachsen x und y ezogene Gleichung der Geraden CD in der normalen Form auf:

$$x \sin \alpha + y \cos \alpha - h = 0. \tag{4.33}$$

[1]) Man kann auch direkt beweisen, daß die Umhüllungskurve der Schar der Geraden CD eine llipse $\frac{x^2}{i_y^2} + \frac{y^2}{i_x^2} = 1$ ist, aber dieser Beweis ist mit sehr umfangreichen Berechnungen verbunden d wird daher hier nicht angeführt.

Da diese Gerade die Tangente der Ellipse

$$\frac{x^2}{i_y^2} + \frac{y^2}{i_x^2} = 1$$

ist, so kann man ihre Gleichung auch in der Form

$$\frac{x\,x_0}{i_y^2} + \frac{y\,y_0}{i_x^2} = 1 \tag{4.34}$$

darstellen, worin x_0 und y_0 die Koordinaten des Berührungspunktes D sind.

Bringen wir beide Gleichungen (4.33) und (4.34) in die übliche Form der Gleichung einer Geraden, ausgedrückt durch Strecken auf den Achsen:

$$\frac{x}{\left(\frac{h}{\sin\alpha}\right)} + \frac{y}{\left(\frac{h}{\cos\alpha}\right)} = 1\,, \tag{4.33a}$$

$$\frac{x}{\left(\frac{i_y^2}{x_0}\right)} + \frac{y}{\left(\frac{i_x^2}{y_0}\right)} = 1\,. \tag{4.34a}$$

Setzt man die entsprechenden Strecken, die sich auf den Achsen x und y durch den Schnitt der Geraden ergeben, einander gleich, so kann man die Koordinaten x_0 und y_0 des Berührungspunktes ermitteln:

$$\begin{aligned} x_0 &= \frac{i_y^2 \sin\alpha}{h}\,, \\ y_0 &= \frac{i_x^2 \cos\alpha}{h}\,. \end{aligned} \tag{4.35}$$

Diese Koordinaten müssen offenbar der Gleichung (4.33) genügen, die nach dem Einsetzen ihrer Werte folgende Form annimmt:

$$i_x^2 \cos^2\alpha + i_y^2 \sin^2\alpha = h^2\,. \tag{4.36}$$

Drücken wir jetzt den Trägheitsradius i_{x_1} durch die Hauptradien i_x und i_y aus. Gemäß der Formel (4.20) erhalten wir bei $J_{xy} = 0$

$$J_{x_1} = J_x \cos^2\alpha + J_y \sin^2\alpha$$

und nach dem Ersetzen von

$$J_{x_1} = i_{x_1}^2 F\,, \quad J_x = i_x^2 F \quad \text{und} \quad J_y = i_y^2 F$$

sowie nach Kürzung durch F

$$i_{x_1}^2 = i_x^2 \cos^2\alpha + i_y^2 \sin^2\alpha\,. \tag{4.37}$$

Vergleicht man (4.37) mit (4.36), so sieht man, daß $h = i_{x1}$ ist, was auch zu beweisen war. Das Trägheitsmoment in bezug auf die andere gedrehte Achse y_1 ermittelt sich leicht aus der Gleichung (4.23):

$$J_{y_1} = J_x + J_y - J_{x_1}\,.$$

Außerdem gibt die Strecke c der Tangente an die Ellipse zwischen dem Berührungspunkt D und der Achse y_1 nach ihrer Multiplikation mit hF den Wert des Zentrifugalmoments $J_{x_1 y_1}$ in bezug auf die gedrehten Achsen an[1]). In der Tat ist die Strecke c die Koordinate x_1 des Punktes D im Achsensystem x_1 und y_1, und daher wird sein durch die Koordinaten x_0 und y_0 ausgedrückter Wert folgender sein [gemäß den Formeln zur Umbildung der Koordinaten (4.17)]:

$$c = x_0 \cos\alpha + y_0 \sin\alpha .$$

Setzen wir in diesen die Werte x_0 und y_0 (4.35) ein, so erhalten wir

$$c = \frac{i_y^2 \sin\alpha\cos\alpha}{h} + \frac{i_x^2 \cos\alpha\sin\alpha}{h} = \frac{(i_x^2 - i_y^2)\sin 2\alpha}{2h} = \frac{\frac{1}{2}(J_x - J_y)\sin 2\alpha}{hF} .$$

Auf Grund der dritten Gleichung (4.24) ist

$$\frac{1}{2}(J_x - J_y)\sin 2\alpha = J_{x_1 y_1}$$

und folglich

$$J_{x_1 y_1} = chF. \tag{4.38}$$

Auf diese Weise werden die Trägheitsmomente in bezug auf ein beliebiges Paar von Zentralachsen x_1 und y_1 durch die Koordinaten $h = y_1$ und $c = x_1$ des auf diese Achsen bezogenen Berührungspunktes D bestimmt.

4.09 Berechnung des Zentrifugalmomentes — Beispiele

Das Zentrifugalmoment spielt in den praktischen Berechnungen eine reine Hilfsrolle. Mit seiner Ermittlung haben wir es nur bei der Berechnung von Balken mit unsymmetrischem Querschnitt zu tun, wenn es erforderlich ist, vorher die Hauptachsen zu finden. Das Zentrifugalmoment kann man in einigen Fällen ohne besondere Schwierigkeit durch unmittelbare Berechnung des Integrals $\int_F xy\,dF$ bestimmen. Man kann auch J_{xy} mit Hilfe der äquatorialen Trägheitsmomente in bezug auf die drei Achsen x, y und x_1 ermitteln, von denen zwei (x und y) senkrecht zueinander stehen, während die dritte (x_1) mit der x-Achse einen bestimmten Winkel α bildet. Dann erhalten wir aus der ersten Gleichung (4.24)

$$J_{xy} = \frac{1}{\sin 2\alpha}\left(\frac{J_x + J_y}{2} + \frac{J_x - J_y}{2}\cos 2\alpha - J_{x_1}\right). \tag{4.39}$$

Dies ist ein sehr geeignetes Verfahren, wenn man den Winkel $\alpha = 45°$ annimmt. Dann wird

$$J_{xy} = \frac{1}{2}(J_x + J_y) - J_{45°}. \tag{4.40}$$

Das Zentrifugalmoment ermittelt sich besonders leicht, wenn man den Querschnitt in solche Teile aufteilen kann, deren Hauptzentralachsen parallel zu den Zentralachsen des ganzen Querschnitts gerichtet sind. Wendet man in diesem

[1]) Die Ableitung stammt von Prof. L. D. Proskurjakow.

Falle für jeden Teil des Querschnitts die Formel (4.8) zur parallelen Übertragung der Achsen an und beachtet, daß das erste Glied auf der rechten Seite dieser Gleichung bedingungsgemäß gleich Null ist, so erhalten wir für das Zentrifugalmoment des ganzen Querschnitts die Formel

$$J_{xy} = \sum_{i=1}^{i=n} F_i a_i b_i. \tag{4.41}$$

worin F_i die Querschnitte der einzelnen Teile und a_i und b_i die Koordinaten ihrer Schwerpunkte sind.

Beispiel 18

Es ist durch Integration das Zentrifugalmoment eines rechtwinkligen Dreiecks (Bild 112) in bezug auf die mit den Katheten zusammenfallenden Achsen x und y und alsdann in bezug auf die den Katheten parallelen Zentralachsen x_0 und y_0 zu ermitteln.

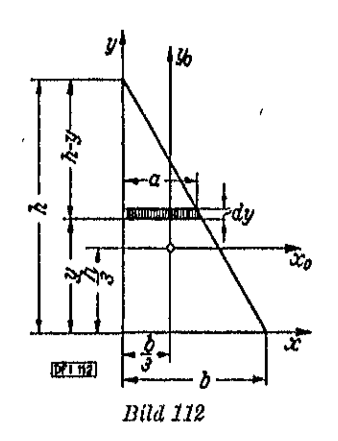


Bild 112

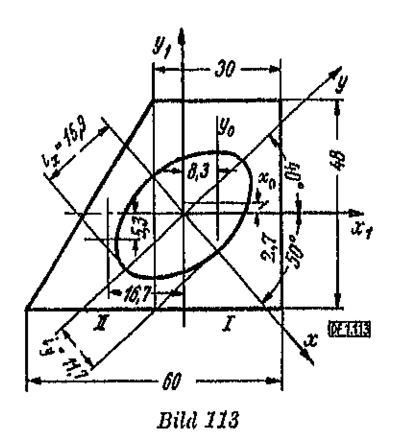


Bild 113

Teilen wir den Querschnitt durch parallel zur Basis verlaufende Linien in elementare Streifen von der Höhe dy und der Breite a auf. Die Fläche des Streifens ist

$$dF = a\,dy.$$

Da aber

$$a = \frac{b(h-y)}{h}$$

ist, wird folglich

$$dF = \frac{b(h-y)\,dy}{h}.$$

Die horizontale Koordinate des Schwerpunkts eines jeden Streifens ist

$$x = \frac{a}{2} = \frac{b(h-y)}{2h}.$$

Setzen wir die Werte dF und x in die Formel des Zentrifugalmoments in bezug auf die Katheten ein, so folgt

$$J_{xy} = \int_F xy\,dF = \int_0^h \frac{b(h-y)}{2h}\, y\, \frac{b(h-y)}{h}\, dy = \frac{b^2}{2h^2}\int_0^h (h-y)^2 y\,dy$$

$$= \frac{b^2}{2h^2}\left[h^2\int_0^h y\,dy - 2h\int_0^h y^2\,dy + \int_0^h y^3\,dy\right]$$

$$= \frac{b^2}{2h^2}\left(\frac{h^4}{2} - \frac{2h^4}{3} + \frac{h^4}{4}\right) = \frac{b^2h^2}{24}. \qquad (4.42)$$

Gehen wir zu den Zentralachsen x_0 und y_0 über, indem wir die Formel (4.8) benutzen:

$$J_{x_0 y_0} = J_{xy} - Fab = \frac{b^2h^2}{24} - \frac{bh}{2}\,\frac{b}{3}\,\frac{h}{3} = -\frac{b^2h^2}{72}. \qquad (4.43)$$

Bei Änderung der positiven Richtung einer von den Achsen ändert sich das Vorzeichen des Zentrifugalmomentes in das umgekehrte.

Beispiel 19

Es sollen die Hauptzentralachsen gefunden und die Trägheitsellipse des Querschnitts von der Form eines Trapezes (Bild 113) konstruiert werden.

Zu diesem Zweck wird das Trapez in ein Rechteck und ein Dreieck aufgeteilt und ihre Flächen berechnet:

$$F_I = 30 \cdot 48 = 1440 \text{ cm}^2,$$

$$F_{II} = \frac{30 \cdot 48}{2} = 720 \text{ cm}^2,$$

$$F = 720 + 1440 = 2160 \text{ cm}^2.$$

Nun ermittelt man die Koordinaten des Schwerpunkts des Trapezes in bezug auf die Achsen x_0 und y_0, die durch den Schwerpunkt des Rechtecks gehen:

$$y_0 = \frac{S x_0}{F} = -\frac{720 \cdot 8}{2160} = -2{,}7 \text{ cm},$$

$$x_0 = \frac{S y_0}{F} = -\frac{720 \cdot 25}{2160} = -8{,}3 \text{ cm}.$$

Es werden danach die Achsen x_1 und y_1 durch den Gesamtschwerpunkt geführt und in bezug auf diese mit Hilfe der üblichen Verfahren die äquatorialen Trägheitsmomente berechnet, wobei wir zu dem bequemeren Maß in dm übergehen:

$$J_{x_1} = \frac{3 \cdot 4{,}8^3}{12} + 14{,}4 \cdot 0{,}27^2 + \frac{3 \cdot 4{,}8^3}{36} + 7{,}2 \cdot 0{,}53^2 = 39{,}94 \text{ dm}^4;$$

$$J_{y_1} = \frac{4{,}8 \cdot 3^3}{12} + 14{,}4 \cdot 0{,}83^2 + \frac{4{,}8 \cdot 3^3}{36} + 7{,}2 \cdot 1{,}67^2 = 44{,}43 \text{ dm}^4.$$

Das Zentrifugalmoment berechnen wir mit Hilfe der Formeln (4.8) und (4.43):

$$J_{x_1 y_1} = 14{,}4 \cdot 0{,}83 \cdot 0{,}27 + \frac{3^2 \cdot 4{,}8^2}{72} + 7{,}2 \cdot 0{,}53 \cdot 1{,}67 = 12{,}48 \text{ dm}^4.$$

Die Hauptträgheitsmomente sind:

$$J_x = J_{\max} = \frac{39{,}94 + 44{,}43}{2} + \sqrt{\left(\frac{39{,}94 - 44{,}43}{2}\right)^2 + 12{,}48^2}$$

$$= 42{,}18 + 12{,}68 = 54{,}86 \text{ dm}^4;$$

$$J_y = J_{\min} = 42{,}18 - 12{,}68 = 29{,}5 \text{ dm}^4;$$

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{12{,}48}{44{,}43 - 54{,}86} = -1{,}193; \; \alpha_1 \approx -50°;$$

$$\operatorname{tg} \alpha_2 = \frac{12{,}48}{44{,}43 - 29{,}50} = 0{,}836; \; \alpha_2 = 40°.$$

Die Hauptträgheitsradien sind:

$$i_{\max} = i_x = \sqrt{\frac{54{,}86}{21{,}6}} = 1{,}59 \text{ dm} = 15{,}9 \text{ cm};$$

$$i_{\min} = i_y = \sqrt{\frac{29{,}5}{21{,}6}} = 1{,}17 \text{ dm} = 11{,}7 \text{ cm}.$$

Die Konstruktion der Trägheitsellipse ist aus Bild 113 zu ersehen.

4.10 Angenäherte analytische und graphische Ermittlung der Trägheitsmomente

Wenn der Querschnitt komplizierte krummlinige oder andere Umrisse aufweist, so wird die genaue Berechnung der Trägheitsmomente auf Grund der oben angeführten Methoden sehr schwierig. In derartigen Fällen kann man die Trägheitsmomente trotzdem mit ausreichender Genauigkeit ermitteln. Nehmen wir z. B. an, daß das Trägheitsmoment des in Bild 114 dargestellten Querschnitts in bezug auf die vertikale Achse y_1 ermittelt werden soll. Zunächst teilen wir den Querschnitt durch parallel zur y_1-Achse verlaufende Linien in Streifen auf und bezeichnen die Flächen der Streifen mit ΔF_1, ΔF_2, ΔF_3, ... und die Abstände ihrer Schwerpunkte von der Achse mit x_1, x_2, x_3, ... Bei der Berechnung der Flächen kann man die krummlinigen Seiten der Streifen durch Sehnen ersetzen, falls die Breite der Streifen nicht groß ist. Das Trägheitsmoment J_{y_1} kann dann angenähert nach der Formel

$$J_{y_1} = \Delta F_1 x_1^2 + \Delta F_2 x_2^2 + \Delta F_3 x_3^2 + \ldots = \sum \Delta F_i x_i^2 \tag{4.44}$$

berechnet werden.

Neben der geradlinigen Ausrichtung der krummlinigen Seiten der Streifen besteht die Annäherung noch darin, daß wir das Trägheitsmoment des Streifens als Produkt $\Delta F x^2$ ermitteln und das Trägheitsmoment des Streifens in bezug auf seine Zentralachse vernachlässigen. Es ist offensichtlich, daß bei unendlicher Verringerung der Breite der Streifen die Summe auf der rechten Seite der Gleichung (4.44) ihren Grenzwert $\int x^2 \, dF$ haben wird, d. h. den genauen Wert des Trägheitsmomentes.

Die angenäherte Berechnung nach der Formel (4.44) kann durch eine von *O. Mohr* vorgeschlagene graphische Konstruktion ersetzt werden. Nehmen wir die Flächen der Streifen als Vektoren an, die parallel zur y_1-Achse in den Schwerpunkten angreifen, und zeichnen wir für diese ein Kräfte- und Seilpolygon (Bild 114). Der Polabstand H des Kräftepolygons hat dabei die gleiche Dimension (Länge)² wie die Vektoren ΔF. Verlängern wir alle Seilstrahlen des Seilpolygons

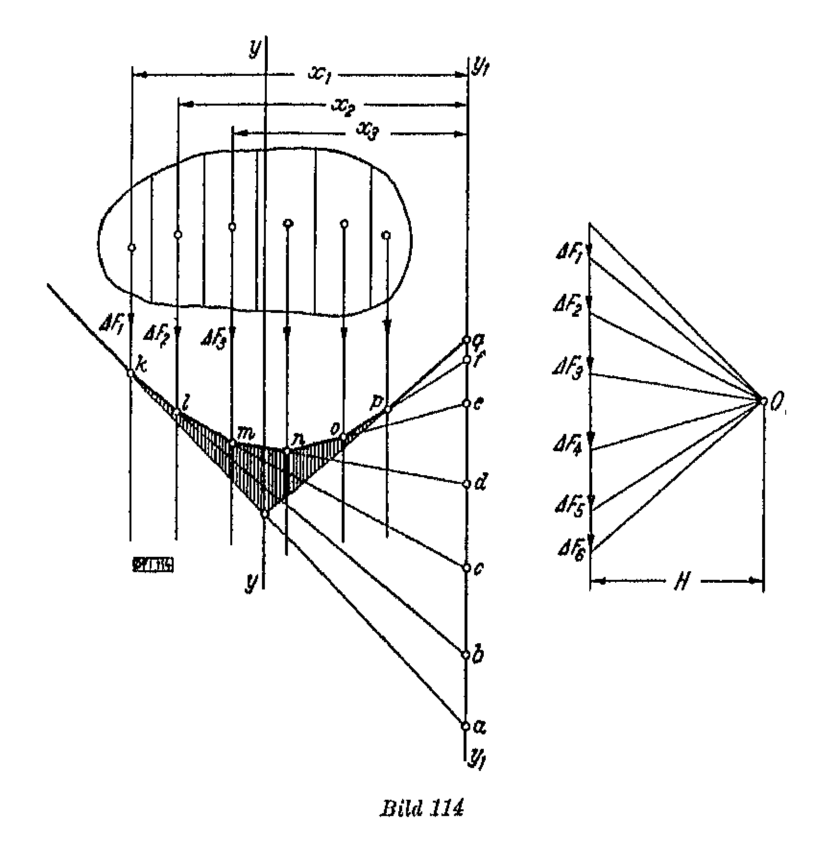


Bild 114

bis zum Schnitt mit der y_1-Achse in den Punkten $a, b, c, d, \ldots, g$, dann erhalten wir in der Zeichnung eine Reihe von Dreiecken kab, lbc, $\ldots$, pfg. Untersuchen wir, welche Werte die Flächen dieser Dreiecke haben.

Eine betrachtete Fläche sei $kab = \dfrac{\overline{ab} \cdot x_1}{2}$; da aber das Produkt $\overline{ab}$ mit dem Polabstand H gleich dem statischen Moment des Vektors ΔF_1 in bezug auf die Achse y_1 (siehe Kap. 5.9) und demnach $\overline{ab} \cdot H = \Delta F_1 \cdot x_1$ ist, so ist folglich die Fläche

$$kab = \frac{\Delta F_1 x_1^2}{2H}.$$

Analoge Werte erhalten wir für die Flächen aller übrigen Dreiecke: also Fläche $lbc = \frac{\Delta F_2 x_2^2}{2H}$, Fläche $mcd = \frac{\Delta F_3 x_3^2}{2H}$ usw.

Die Summe der Dreiecksflächen ergibt die Fläche *klmopqak*, die durch das Seilpolygon mit den verlängerten äußersten Seiten und der y_1-Achse begrenzt ist. Bezeichnen wir diese Fläche mit ω, so daß

$$\omega = \frac{1}{2H}(\Delta F_1 x_1^2 + \Delta F_2 x_2^2 + \Delta F_3 x_3^2 + \ldots) = \frac{\sum \Delta F_i x_i^2}{2H}$$

oder auf Grund der Gleichung (4.44)

$$\omega = \frac{J_{y_1}}{2H} \text{ ist,}$$

woraus

$$J_{y_1} = 2H\omega \qquad (4.45)$$

wird, d. h. der angenäherte Wert des Trägheitsmomentes ist gleich dem Produkt des doppelten Polabstandes mit der Fläche, die durch die Trägheitsachse und das Seilpolygon mit den verlängerten äußersten Seiten begrenzt ist. Zeichnet man an Stelle des Seilpolygons die Grenzkurve, die sich bei beliebiger Vermehrung der Anzahl der Querschnittsstreifen ergibt, so kann man auf graphischem Wege auch den genauen Wert des Trägheitsmomentes ermitteln. Wenn die Ermittlung des Trägheitsmomentes in bezug auf die Zentralachse y des Querschnitts gefordert wird, so ergibt sich die Lage des Schwerpunkts durch den Schnittpunkt der verlängerten äußersten Seiten des Seilpolygons, und das Trägheitsmoment J_y wird gleich $2H\omega'$, worin ω' die im Bild 114 schraffierte Fläche ist. Zur graphischen Ermittlung des Trägheitsmomentes in bezug auf die horizontale Achse muß man die Aufteilung des Querschnitts entsprechend ändern, d. h. indem man ihn durch horizontale Linien in Streifen zerlegt.

5 Biegung des geraden Balkens. Äußere Kräfte und Kräfte an der Schnittfläche des Balkens

5.1 Auflagerbefestigungsarten von Balken

A. Im Abschnitt 2 sind die Formänderungen und Spannungen untersucht worden, die sich im Balken unter der Einwirkung von längs seiner Achse gerichteter äußerer Kräfte ergeben. Jetzt gehen wir zu dem Studium der Wirkung von senkrecht zur Balkenachse gerichteten Kräften über. Darauf wird man sich mit der Wirkung von Kräften, die die Balkenachse unter einem beliebigen Winkel schneiden, befassen können, indem man jede Kraft in Komponenten längs der Balkenachse und senkrecht zu ihr zerlegt.

Ein gerader Balken, der der Wirkung von Kräften ausgesetzt ist, die sich im Gleichgewicht befinden und seine Achse unter einem rechten Winkel schneiden, erleidet die Erscheinung der *Biegung*, die darin besteht, daß sich die anfänglich gerade Balkenachse krümmt. Dabei werden sich, wie wir das weiter sehen werden, die Fasern an der konvexen Seite des Balkens verlängern und an der konkaven Seite verkürzen. Die Ermittlung der erwähnten Formänderungen und der mit ihnen verbundenen Spannungen sowie der Verschiebungen der Punkte der Balkenachse, die die Form der gebogenen Achse bestimmen, stellt die Aufgabe der Biegungstheorie dar.

Am leichtesten kann die Aufgabe für den Fall einer *einfachen ebenen Biegung* gelöst werden, die im Balken vor sich geht, wenn alle äußeren Kräfte in einer Ebene liegen, die durch die Balkenachse geht, und wenn die Querschnitte des Balkens zu dieser Fläche symmetrisch sind. Hierbei stellt die gebogene Balkenachse eine ebene Kurve dar, die infolge Symmetrie in der Wirkungsebene der Kräfte liegt. Eine ebene Biegung erleiden die Balken, d. h. horizontale Balken, die auf irgendwelchen Lagern ruhen und der Wirkung einer vertikalen Belastung ausgesetzt sind. Zu den äußeren Kräften, die auf den Balken wirken, gehören auch die Auflagerreaktionen, mit deren Ermittlung gewöhnlich die Berechnung des Balkens beginnt[1]).

Da in der Praxis sehr geringe Krümmungen (Durchbiegungen) der Balken zugelassen werden, so werden wir eine durch diese hervorgerufene Änderung der gegenseitigen Lage der äußeren Kräfte vernachlässigen, d. h. beim Studium der statischen Seite der Biegung werden wir den Balken als absolut starr ansehen. Außerdem werden wir wie auch früher annehmen, daß die Querabmessungen des Balkens im Vergleich zu seiner Länge nicht groß sind und daß die in ihm sich ergebenden Spannungen die Proportionalitätsgrenze nicht übersteigen.

Es wäre zu bemerken, daß in der Biegungstheorie die statische Seite sehr entwickelt ist; das vorliegende Kapitel ist ihr daher gewidmet.

---

[1]) Ein anderer Gang der Berechnung kommt in bezug auf statisch unbestimmte Balken vor, deren Auflagerreaktionen nicht unmittelbar aus den Gleichgewichtsbedingungen ermittelt werden können.

B. Bei der Berechnung der Balken unterscheidet man folgende hauptsächliche Auflagerbefestigungsarten:

a) *das feste zylindrische Gelenklager* (Bild 115). Das Balkenende ist mittels eines zylindrischen Gelenks A mit dem Lagerbock D verbunden, der unbeweglich auf der Lagerebene $m-n$ befestigt ist. Die Auflagerreaktion geht durch das Gelenk, und folglich ist ihre Lage bekannt. Ihr Moment in bezug auf den Punkt A ist gleich Null, d. h. $M_A = O$. Unbekannt bleiben ihre Größe und Richtung, die voll und ganz durch die Komponenten X_A und Y_A der Kraft A bestimmt werden. Das durch das Gelenk befestigte Balkenende kann weder eine vertikale noch eine horizontale Verschiebung erleiden, aber der Balken (wenn er keine anderen Auflager hat) kann sich frei um das Gelenk drehen, wobei angenommen wird, daß eine Reibung nicht vorhanden ist.

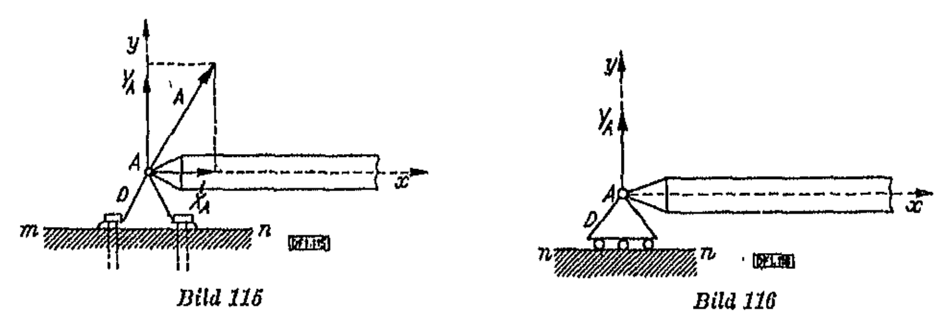


Bild 115 *Bild 116*

b) *Das bewegliche zylindrische Gelenklager* (Bild 116) unterscheidet sich von dem vorherigen dadurch, daß der Lagerbock D auf zylindrischen Walzen[1]) angeordnet ist, so daß der Balken außer Drehungen um das Gelenk A auch Verschiebungen parallel zur Lagerebene $m-n$ erleiden kann. Vernachlässigt man die Reibung der Walzen, so kann man sagen, daß das Lager der erwähnten Verschiebung (in unserem Falle einer horizontalen Verschiebung) keinen Widerstand entgegensetzen kann, d. h. die horizontale Komponente der Reaktion ist $X_A = O$. Die Richtung der Reaktion ist folglich bekannt, denn sie ist immer senkrecht zur Ebene $m-n$ gerichtet, und als Unbekannte verbleibt lediglich die Größe Y_A der Reaktion.

Die in Bild 116 gezeigte Konstruktion kann ein Abheben des Balkenendes nicht verhindern. Wird die Möglichkeit eines derartigen Abhebens befürchtet, so müssen zusätzliche konstruktive Maßnahmen getroffen werden, die dies verhindern. Wir nehmen im weiteren an, daß das bewegliche Lager fähig ist, sowohl eine positive als auch eine negative Reaktion zu liefern (als positiv sehen wir eine Kraft an, die in Übereinstimmung mit der gewählten Richtung der y-Achse nach oben gerichtet ist).

c) *Das feste Klemmlager* oder die sogenannte starre Einspannung des Balkens (Bild 117). Eine Befestigung wird so genannt, bei der der Abschnitt AA' der Balkenachse $A\,x$ an der Befestigungsstelle bei beliebigen Formänderungen unverschiebbar bleibt und sich nicht dreht. Nimmt man den Balken als absolut starr an,

---

[1]) *Anm. d. deutschen Redaktion:* Die Erzielung eines längsbeweglichen (gleitenden) Lagers ist nicht nur auf zylindrische Walzen beschränkt. Allerdings haben diese Art Lager wohl den geringsten Gleitwiderstand.

so gewährleistet offenbar die Befestigung des Endes eine vollständige Unbeweglichkeit des Balkens.

Die an den Berührungsebenen ac, cd und db des Balkens mit dem Auflager verteilten Reaktionskräfte können zu einer Resultierenden A zusammengefaßt werden, deren Größe, Richtung und Lage unbekannt sind. Um die Lage der Kraft A festzulegen, ersetzen wir die Einspannung durch ein festes Gelenklager mit dem Gelenk im Punkt A (Bild 117). Wir übertragen die Kraft A in das Gelenk und fügen nach den Regeln der Statik ein angreifendes Kräftepaar M_A hinzu, das die Drehmöglichkeit des Balkens um das Gelenk ausschließt (Bild 118). Es ist ganz offensichtlich, daß das Reaktionsmoment M_A gleich und entgegengesetzt dem Moment aller übrigen auf den Balken wirkenden Kräfte in bezug auf das Gelenk sein muß. Auf diese Weise ist die Reaktion einer festen Einspannung des Balkenendes durch drei unbekannte Werte X_A, Y_A und M_A charakterisiert.

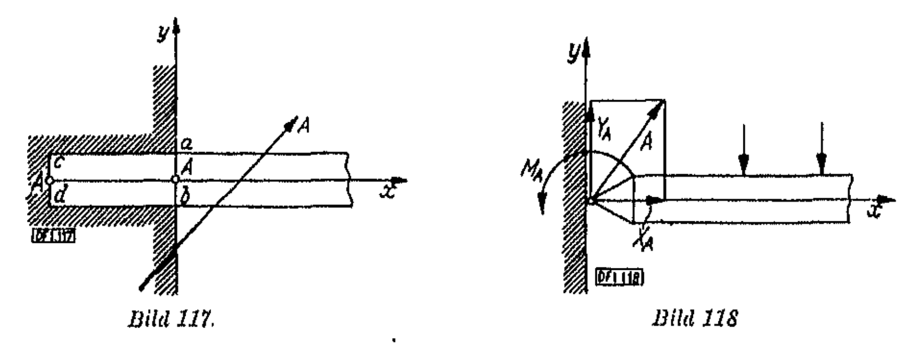


Bild 117. Bild 118

C. Es ist üblich, die Auflagerbefestigungen der Balken mit Hilfe sogenannter Auflagerstäbe, die mittels Idealgelenken (ohne Reibung) mit dem Balken und Auflager verbunden sind, darzustellen. Das feste Gelenklager (Bild 119, a) wird dabei durch zwei Stäbe Ac und Ad dargestellt; der erste von diesen läßt keine horizontalen und der zweite keine vertikalen Verschiebungen zu, wobei sie eine Drehung um das Gelenk A zulassen.

Die gleichen Befestigungsbedingungen werden erfüllt, wenn man die Stäbe, wie in Bild 119, b gezeigt, anordnet. In beiden Fällen setzt sich die Reaktion aus zwei

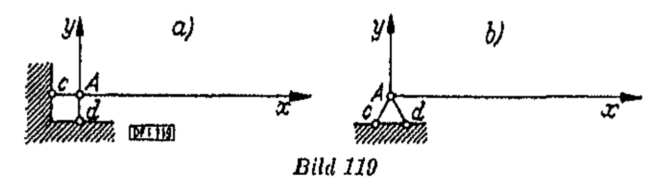


Bild 119

Komponenten zusammen, die als Kräfte in den Auflagerstäben erscheinen und offensichtlich längs der Stäbe gerichtet sind. Aber dies hindert uns nicht, sich auch im Falle des Bildes 119, b wie früher mit der vertikalen und horizontalen Projektion X_A und Y_A der Kraft A zu befassen.

Das bewegliche Gelenklager (Bild 120) wird durch einen senkrecht zur Auflagerebene $m-n$ gerichteten Stab dargestellt. Indem dieser Stab sich um das

Gelenk d dreht, läßt er parallel zur Auflagerebene gerichtete Verschiebungen des Balkenendes zu. Die Richtung der Reaktion fällt immer mit der Richtung des Stabes zusammen. Die Verschiebungen des Gelenks, die im Ergebnis der Formänderungen des Balkens erscheinen, sind sehr gering, so daß man ein gewisses Absenken des Balkenendes bei einer Drehung des Stabes Ad als einen Kleinstwert zweiter Ordnung sowie auch eine Abweichung der Reaktion Y_A von der Vertikalen vernachlässigen kann. Manchmal wird die Auflagerebene schräg angeordnet, wobei der Stab Ad zu dieser stets senkrecht verbleibt (Bild 120, b).

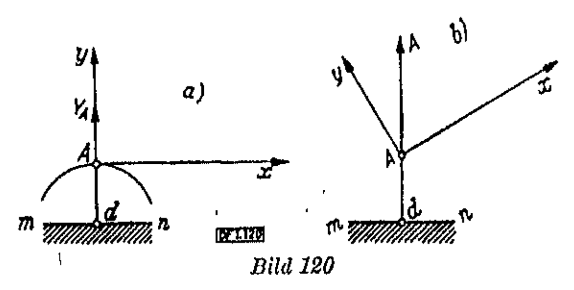


Bild 120

Das feste Klemmlager des Balkens wird durch Hinzufügung eines dritten Stabes ef zu dem Schema auf Bild 119, der eine Drehung des Balkenendes um das Gelenk A (Bild 121, a) nicht zuläßt, dargestellt. Es wird aber auch eine vereinfachte Darstellung der Einspannung gemäß Bild 121, b angewandt, bei der man an das Vorhandensein von drei Stäben an der Auflagerbefestigung denken muß.

Bild 121

Der Vorteil der Stabschemen für die Auflager besteht außer der Übersichtlichkeit darin, daß die Anzahl der unbekannten Größen (der Koordinaten), die die Auflagerreaktion bestimmen, immer gleich der Anzahl der Auflagerstäbe ist. Dies ermöglicht es, die Frage über die statische Bestimmtheit des Balkens durch einfaches Zählen der Gesamtzahl der Stäbe an allen Auflagern und durch einen Vergleich mit der Anzahl der Gleichgewichtsgleichungen (-bedingungen) leicht zu entscheiden.

Wenn alle auf den Balken wirkenden Kräfte in einer Ebene liegen, die durch die Balkenachse geht, so liefert die Statik zur Bestimmung der Auflagerreaktionen die Gleichgewichtsgleichungen (-bedingungen) $\sum X = 0$, $\sum Y = 0$ und $\sum M = 0$.

Der Balken ist statisch bestimmt, wenn die Anzahl der unbekannten Koordinaten, die die Auflagerreaktionen bestimmen, gleich der Anzahl der Gleichungen ist, d. h. auf drei Werte zurückgeführt werden kann. Folglich muß die Befestigung des Balkens mittels dreier Stäbe verwirklicht sein. Bei einer größeren Anzahl

derselben ist der Balken statisch unbestimmt. Wenn aber die Zahl der Auflagerstäbe kleiner als drei ist, so gewährleistet die Befestigung nicht die Unbeweglichkeit des Balkens. Betrachtet man tatsächlich einen freien Balken als starren Körper (Scheibe), so kann er in der Wirkungsebene der Kräfte drei Arten von Verschiebungen aufweisen: fortschreitende Verschiebungen, parallel zu den Koordinatenachsen x und y und eine Drehung um irgendeinen Punkt der Ebene. Eine beliebige Verschiebung kann in diese drei Komponenten zerlegt werden. Der Balken hat, anders ausgedrückt, in der Wirkungsebene der Kräfte drei Freiheitsgrade. Aus dem Vorhergehenden ist leicht zu ersehen, daß jeder Auf-

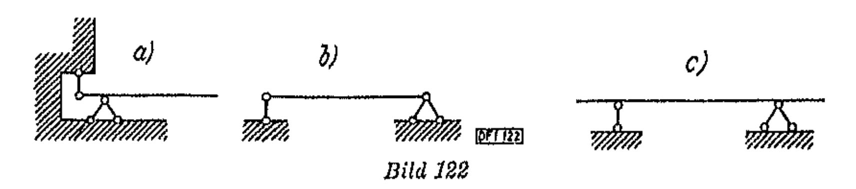


Bild 122

lagerstab einen der Freiheitsgrade aufhebt; folglich gewährleistet eine Befestigung des Balkens durch drei Stäbe die geometrische Unveränderlichkeit seiner Lage[1]).

Den Abstand zwischen den Auflagern nennt man die *Stützweite des Balkens.* Es können offenbar nur zwei Arten von statisch bestimmten Balken mit *einer* Öffnung vorkommen.

1. Balken mit einem eingespannten und dem anderen freien Ende (Bild 122, a) und 2. Balken mit einem festen und dem anderen beweglichen Gelenklager (Bild 122, b und c). Im letzten Falle heißen die überragenden Enden des Balkens Konsolen und der Balken selbst Konsolbalken (Konsolträger).

D. Die tatsächliche Ausführung der Lager der Balken entspricht bei weitem nicht immer den auf Bild 115, 116 und 117 gezeigten Konstruktionsschemen. In der Praxis werden nur für schwere Balken großer Stützweiten Einrichtungen für die Beweglichkeit eines der Auflager (Walzen) vorgesehen. Im größten Teil der Fälle setzt man jedoch die Balkenenden auf unbewegliche Lager. Wenn hierbei die Stützung der Enden gelenkig angeordnet ist, d. h. die Drehung der Balken-

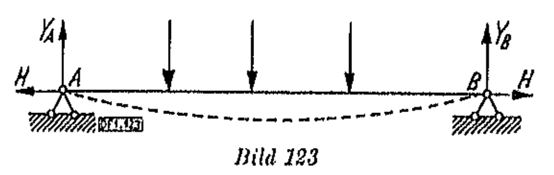


Bild 123

enden um den Mittelpunkt des Lagers nicht verhindert wird, so wird sie durch das in Bild 123 gezeigte Schema dargestellt. Bei einer vertikalen Belastung eines solchen Balkens entstehen außer den vertikalen Reaktionen Y_A und Y_B auch horizontale Reaktionen H, die ein Nähern der Balkenenden bei der Durchbiegung verhindern. Hier haben wir, streng genommen, einen statisch unbe-

[1]) Vorausgesetzt, daß die Richtungen aller Stäbe nicht parallel sind und sich nicht in einem Punkte schneiden.

stimmten Fall, da die Gleichung $\sum X = 0$ nicht die Möglichkeit gibt, die Kräfte H zu ermitteln, sondern nur darauf hinweist, daß sie gleich und entgegengesetzt gerichtet sind. In der Praxis kann man einen solchen Balken jedoch mit ausreichender Genauigkeit wie einen statisch bestimmten Balken nach dem Schema des Bildes 122, b berechnen, d. h. man kann ein Auflager als beweglich ansehen. Dieses ist dadurch begründet, weil bei geringen Durchbiegungen des Balkens die Spannungen infolge Zug durch die Kräfte H im Vergleich mit den Biegungsspannungen gering sind, so daß sie nicht berücksichtigt zu werden brauchen.

Beginnt man die Berechnung eines Balkens, so muß man in erster Linie klären, mit welchem von den auf den Bildern 119, 120 und 121 veranschaulichten drei Grundtypen der tatsächliche Charakter der Befestigung der Enden die größte Ähnlichkeit hat, und ein entsprechendes Berechnungsschema annehmen.

Es wird angenommen, daß der Balken auf zylindrisch gewölbten Stützen ruht[1]) (Bild 124, a). Hier sind beide Auflager unbeweglich, aber die freie Drehung der Balkenenden bei der Durchbiegung ist gewährleistet. Es kann daher auf Grund des oben Gesagten die Berechnung nach dem Schema 122, b durchgeführt werden, indem man als Spannweite l den Abstand der Stützpunkte annimmt.

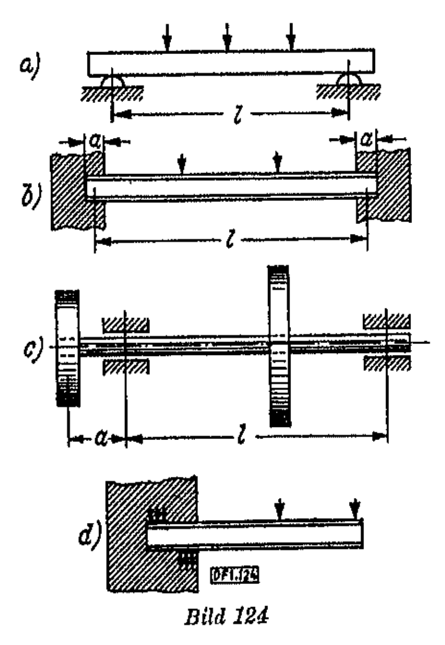


Bild 124

Betrachten wir einen anderen Fall: ein Träger aus Stahl ist mit seinen Enden in das Mauerwerk einer Wand verlegt (Bild 124, b). Wenn die Länge des Auflagerteils a nicht groß ist, so ist infolge der lockeren Einspannung und des Zusammendrückens des Mauerwerks immer eine geringe Drehung der Balkenenden möglich. Dies gestattet uns, beide Auflager als gelenkig anzusehen. Als

[1]) *Anm. d. deutschen Redaktion:* Sogenanntes *Wälzlager.*

Berechnungsspannweite l kann man in diesem Falle die Entfernung zwischen den mittleren Punkten der Auflagerstrecken des Balkens annehmen. Auf Grund gleicher Überlegungen kann man bei der Biegungsberechnung einer mittels zweier Lager gestützten Welle (Bild 124, c) als Berechnungsspannweite den Abstand der Lagerachsen annehmen.

Bei einem in einer Wand eingespannten Konsolträger (Bild 124, d) beeinflußt eine geringfügige Drehung am Auflager die Arbeit des Balkens praktisch nicht, und das Schema auf Bild 122, a entspricht daher diesem Falle voll und ganz. Hierbei muß das Mauerwerk der Wand an der Einspannungsstelle gegen Zerstörungen unter den Druckeinwirkungen des Balkenendes gesichert werden, was z. B. durch eine tiefe Einmauerung, durch Unterlegen von Stahlplatten, die den Druck auf eine größere Fläche verteilen, usw. erreicht werden kann.

5.2 Ermittlung der Auflagerreaktionen

A. Wir wollen an Beispielen den Gang der Berechnung zur Ermittlung der Auflagerreaktionen infolge einer Belastung durch Einzelkräfte aufzeigen.

Beispiel 20

Ein Balken auf zwei Auflagern (Stützen) ist durch eine Kraft P belastet, die unter dem Winkel α zur Balkenachse geneigt ist (Bild 125). Die Auflagerreaktionen sind zu ermitteln.

Wir zerlegen die Kraft P in eine vertikale und eine horizontale Komponente V und H:

$$H = P\cos\alpha, \qquad V = P\sin\alpha.$$

Die Auflagerreaktionen werden auf drei unbekannte Kräfte X_A, Y_A und Y_B zurückgeführt. Nachdem man diese aus den Gleichgewichtsbedingungen bestimmt hat, kann

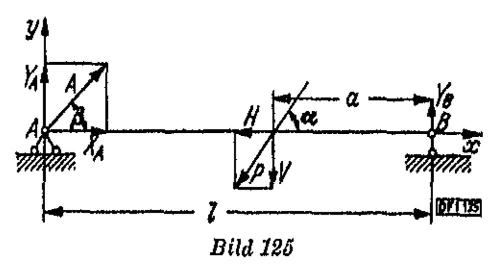


Bild 125

man leicht (wenn dies notwendig ist) die volle Reaktion A und ihren Neigungswinkel zur Waagerechten finden. Indem wir den Koordinatenachsen x und y die in Bild 125 angedeutete Richtung geben, nehmen wir an, daß alle drei Reaktionskräfte positiv, d. h. auf die positive Seite der Achsen x und y gerichtet sind[1]). Wir stellen dann die drei Gleichgewichtsgleichungen auf, wobei wir als Momentendrehpunkt den Punkt B wählen:

$$\sum M = Y_A l - Va = 0;\; Y_A = \frac{Va}{l};$$

$$\sum Y = Y_A + Y_B - V = \frac{Va}{l} + Y_B - V = 0;\; Y_B = V\left(1 - \frac{a}{l}\right);$$

$$\sum X = -H + X_A = 0;\quad X_A = H.$$

[1]) Bringt man am Balken die Reaktionskräfte an, so muß man die ihnen entsprechenden Auflagerstäbe selbstverständlich als entfernt ansehen.

Die positiven Vorzeichen in den Resultaten weisen darauf hin, daß die auf der Zeichnung angenommenen Richtungen der Reaktionskräfte richtig gewählt waren. Im Falle eines negativen Vorzeichens des Ergebnisses hätte die betreffende angenommene Richtung in die umgekehrte geändert werden mussen.

Beispiel 21

Es sind die Auflagerreaktionen eines Balkens zu ermitteln, der an einem Ende eingespannt und durch die vertikalen Lasten P_1 und P_2 belastet ist (Bild 126). Die Reaktionen eines solchen Balkens werden durch die drei Werte X_A, Y_A und M_A ausgedrückt.

Aus der Bedingung $\Sigma X = 0$ finden wir $X_A = 0$, da die Projektionen der vertikalen Kräfte P_1, P_2, Y_A und des Momentes (des Paares) M_A auf die horizontale Achse den Wert Null ergeben. Nimmt man an, daß das Reaktionsmoment M_A (Einspannmoment) im Gegensinne des Uhrzeigers eine Drehung ausübt und die Reaktion Y_A nach oben gerichtet ist, so ermitteln wir diese aus der Gleichgewichtsbedingung $\Sigma Y = 0$ und $\Sigma M = 0$, indem wir als Momentendrehpunkt den Punkt A wählen:

$$- M_A + P_1 a_1 + P_2 a_2 = 0;$$
$$M_A = P_1 a_1 + P_2 a_2;$$
$$Y_A - P_1 - P_2 = 0;$$
$$Y_A = P_1 + P_2.$$

Die positiven Ergebnisse weiser auf die Richtigkeit der gewählten Richtung für Y_A und M_A hin.

Es ist zu ersehen, daß bei einer vertikalen Belastung des Balkens die horizontalen Komponenten der Auflagerreaktionen immer gleich Null sind, und daß daher die Reaktionen

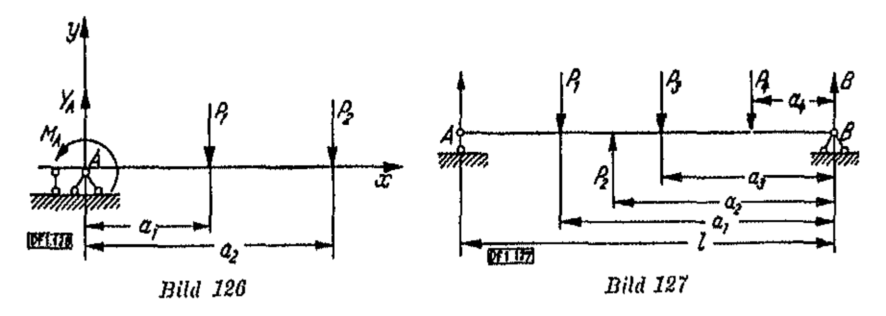


Bild 126 *Bild 127*

auf nur zwei unbekannte Kräfte zurückgeführt werden (Y_A und Y_B bei einem Balken auf zwei Stützen und Y_A und M_A bei einem Balken mit einem eingespannten und einem freien Ende), zu deren Ermittlung wir zwei Gleichungen haben:

$$\Sigma M = 0 \text{ und } \Sigma Y = 0.$$

B. Leiten wir hier einmal allgemeine Formeln für die Auflagerreaktionen eines Balkens auf zwei Stützen bei vertikaler Belastung ab (Bild 127), wozu wir vereinbaren, im folgenden die Werte der linken und rechten Reaktion durch A und B zu bezeichnen, und stellen nun die Momentengleichungen in bezug auf die beiden Auflagergelenke auf:

$$A l - P_1 a_1 + P_2 a_2 - P_3 a_3 - P_4 A_4 = 0,$$
$$- B l + P_1 (l - a_1) - P_2 (l - a_2) + P_3 (l - a_3) + P_4 (l - a_4) = 0$$

etzt man zur Abkürzung:

$$-P_1a_1 + P_2a_2 - P_3a_3 - P_4a_4 = \sum M_B,$$

$$P_1(l-a_1) - P_2(l-a_2) + P_3(l-a_3) + P_4(l-a_4) = \sum M_A,$$

) erhalten wir $\quad Al + \sum M_B = 0$ und $-Bl + \sum M_A = 0$

nd hieraus

$$\left.\begin{aligned} A &= -\frac{\sum M_B}{l}, \\ B &= \frac{\sum M_A}{l}. \end{aligned}\right\} \tag{5.1}$$

ei dieser Ableitung wurde die Richtung beider Auflagerreaktionen als positiv ngenommen, wenn sie, wie dies in Bild 127 gezeigt ist, nach oben wirken.

Die ermittelten Formeln für die Auflagerreaktionen bei einer Belastung durch inzelkräfte behalten auch bei anderen Belastungsarten ihre Gültigkeit. Die Benutzung der Formeln (5.1) beschleunigt die Ermittlung der Auflagerreaktionen, nd es wird daher empfohlen, diese anzuwenden, ohne jedes Mal erst die Gleichewichtsbedingungen aufzustellen. Wenn wir die Auflagerreaktion A oder B auf Grund einer der Formeln (5.1) ermittelt haben, so bestimmen wir die andere uflagerreaktion aus der Gleichung $\sum Y = 0$, während die zweite der Formeln 5.1) zur Kontrolle dienen kann. Es ist zu beachten, daß die Werte $\sum M_A$ und $\sum M_B$ hier die Summe der Momente aller aktiven Kräfte (der Belastung) in bezug uf die Auflagergelenke bezeichnen.

.8 Kontinuierlich verteilte Belastung und Belastungslinie Auflagerdrücke bei kontinuierlich verteilter Belastung

A. Oft ist die Belastung durchgehend über die Länge des Balkens verteilt. Dieser Art ist z. B. die Wirkung des Eigengewichts des Balkens, das Gewicht iner Überdeckung, die Belastung durch Schüttgüter usw.

Wenn man bei gleichmäßiger Verteilung der vertikalen Belastung die auf den Balken wirkende Gesamtlast R_0[1]) durch die Stützweite l dividiert, so erhalten wir len Wert $q = \frac{R_0}{l}$, der die auf die Längeneinheit des Balkens entfallende Kraft oder die Belastungsgröße) ausdrückt. Wir wollen den Wert q kontinuierlich verteilte Last nennen. Ihre Dimension ist $\frac{\text{Kraft}}{\text{Länge}}$, z. B. kg/m.

Wenn die Verteilung der kontinuierlichen Belastung ungleichmäßig ist, so erhalten wir, indem wir an einer beliebigen Stelle des Balkens einen kleinen Abschnitt von der Länge Δx nehmen und die auf dieser Strecke wirkende Last nit ΔR bezeichnen, den mittleren Wert der kontinuierlich verteilten Last auf dem Abschnitt Δx in folgender Form: $q_m = \frac{\Delta R}{\Delta x}$. Gehen wir zu dem Grenzwert für $\Delta x \to 0$ über, so finden wir den Wert der kontinuierlich verteilten Last im gegebenen Punkt des Balkens:

$$q = \lim \frac{\Delta R}{\Delta x}.$$

[1]) *Anm. d. deutschen Redaktion:* In Deutschland gebräuchlich Q, bezogen auf $q \cdot l$.

Wenn man den Wert q in irgendeinem Maßstab in Form von Ordinaten an den entsprechenden Balkenpunkten abträgt, so erhalten wir die graphische Darstellung der Änderung der kontinuierlich verteilten Last längs der Balkenlänge. Eine derartige graphische Darstellung (Bild 128, a) nennen wir die Belastungslinie und die der Belastungslinie entsprechende Fläche die Belastungsfläche.

Bei gleichmäßiger Belastung ist die Belastungsordinate in allen Punkten des Balkens gleich (Bild 128, b), und die Belastungsfläche hat daher die Form eines Rechtecks.

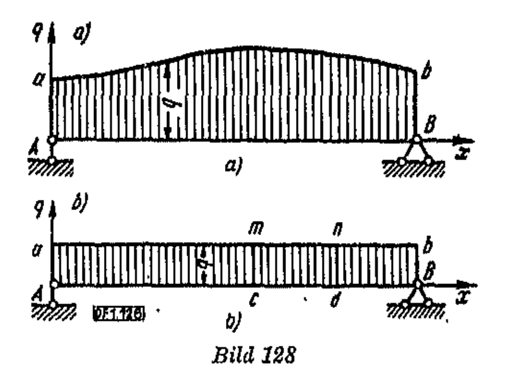


Bild 128

Wenn die Belastungsfläche gegeben ist, so ist es nicht schwer, die umgekehrte Aufgabe zu lösen, nämlich die Last (Kraft) zu finden, die auf den ganzen Balken oder nur auf einen Balkenabschnitt von der Länge cd (Bild 128, b) wirkt. Bei gleichmäßiger Belastung ist es hierfür nur erforderlich, die Belastungsordinate mit der Länge der Strecke $\overline{cd}$ zu multiplizieren:

$$R_{cd} = q\,\overline{cd}.$$

Das Ergebnis hat die Dimension einer Kraft und wird graphisch durch die Fläche des Rechtecks $cmnd$ dargestellt.

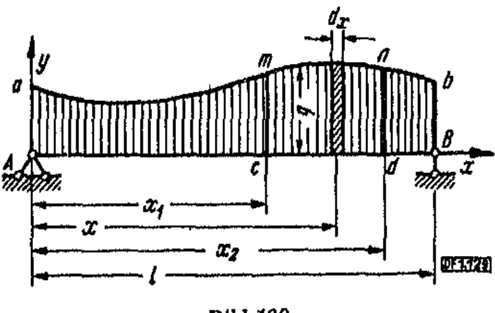


Bild 129

Bei ungleichmäßiger Belastung grenzen wir im Abschnitt cd ein unendlich kleines Element von der Länge dx (Bild 129) ab. Die Höhe der Belastung auf der Strecke dx können wir als konstant ansehen. Die Teillast dR, die auf der Strecke dx wirkt, stellt sich als Fläche des auf der Zeichnung schräg schraffierten

elementaren Rechtecks $dR = q\,dx$ dar. Summieren wir die Flächen der Rechteckstreifen zwischen den Punkten c und d, so erhalten wir den Teil $cmnd$ der Belastungsfläche, die die auf den ganzen Abschnitt cd entfallende Last darstellt.

Wenn man die Belastungshöhe q als Funktion der Abszisse $q = f(x)$ ausdrückt, so kann man die Fläche $cmnd$ durch Integration berechnen:

$$R_{cd} = \int_{x_1}^{x_2} q\,dx = \int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx.$$

Die gesamte den Balken durchbiegende Last R_0 finden wir, wenn wir die Grenzwerte der Integration entsprechend ändern:

$$R_0 = \int_0^l q\,dx.$$

Wenn jedoch der analytische Ausdruck $q = f(x)$ sich als kompliziert erweist, so geht man zu einer näherungsweisen Berechnung der Belastungsfläche über, indem man sie durch vertikale Linien in mehrere Abschnitte aufteilt, die Belastungslinie auf der Strecke jedes Abschnitts geradlinig ausrichtet und die Flächen der so erhaltenen Trapeze summiert.

B. Nehmen wir an, daß auf einen Balken eine kontinuierliche ungleichmäßige Belastung $q = f(x)$ wirkt (Bild 130). Wir teilen dann den Balken in unendlich kleine Abschnitte von der Länge dx auf und ersetzen die kontinuierliche Be-

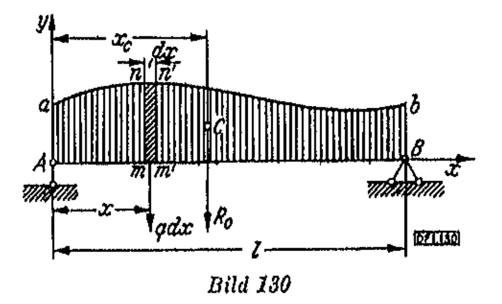


Bild 130

lastung in jedem Abschnitt durch eine Einzelkraft $q\,dx$, die zahlenmäßig gleich der Fläche des elementaren Rechtecks $mm'\,nn'$ ist. Zur Ermittlung der rechten Auflagerreaktion B benutzen wir die Formel (5.1):

$$B = \frac{\sum M_A}{l}.$$

Das Moment der Teillast $q\,dx$ in bezug auf das Auflager A, die im Abstand x von diesem entfernt ist, ist gleich $q\,dx \cdot x$. Das Moment der Gesamtbelastung finden wir als Summe aller Teilkräfte, in die wir die Belastung aufgeteilt haben:

$$\sum M_A = \sum q\,dx \cdot x = \int_0^l q\,dx \cdot x. \tag{5.2}$$

Die rechte Auflagerreaktion ist: $B = \int\limits_0^l \frac{q\,dx \cdot x}{l}$.

Nach dem Lehrsatz über das Moment der Resultierenden kann der Ausdruck (5.2) durch das Produkt der Resultierenden R_0 der Gesamtbelastung mit ihrem Hebelarm x_c in bezug auf das linke Auflager ersetzt werden:

$$\int\limits_0^l qx\,dx = R_0 x_c. \tag{5.3}$$

Dann wird

$$B = \frac{R_0 x_c}{l},$$

da aber

$$R_0 = \int\limits_0^l q\,dx,$$

ist folglich:

$$\int\limits_0^l qx\,dx = x_c \int\limits_0^l q\,dx$$

und hieraus:

$$x_c = \frac{\int\limits_0^l q\,x\,dx}{\int\limits_0^l q\,dx}. \tag{5.4}$$

Der Zähler der Formel (5.4) stellt das statische Moment der Belastungsfläche $AabB$ in bezug auf die y-Achse und der Nenner die Größe dieser Fläche dar. Das bedeutet, daß x_c die Koordinate des Schwerpunkts der Belastungsfläche ist. Hieraus folgern wir, daß die Resultierende der kontinuierlichen Belastung immer durch den Schwerpunkt der Belastungsfläche geht[1]).

Die Aufgabe zur Ermittlung der Auflagerreaktionen ist besonders leicht zu lösen, wenn die Belastungslinie eine einfache geometrische Figur darstellt (z. B. ein Dreieck, ein Trapez u. dgl.), deren Fläche und Schwerpunktslage man leicht unmittelbar auf Grund bekannter Lehrsätze aus der Geometrie errechnen kann, so daß sich eine Integration erübrigt.

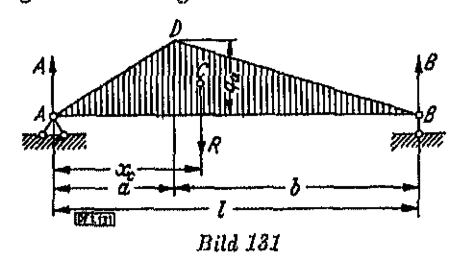


Bild 131

Beispiel 22

Es sind die Auflagerreaktionen eines Balkens infolge der Wirkung einer kontinuierlichen Belastung in Form eines Dreiecks (Bild 131), dessen größte Belastungshöhe q_0 sich im Abstande a vom linken Auflager befindet, zu ermitteln.

[1]) Es ist durchaus verständlich, daß die Resultierende eines beliebigen Abschnitts der durchgehenden Belastung (Bild 129) durch den Schwerpunkt des entsprechenden Teiles *cmnd* der Belastungsfläche geht. Zum Beweis braucht man in der Formel (5.4) nur die Grenzwerte der Integration zu ändern.

Die Resultierende der Belastung wird durch die Fläche des Dreiecks ABD bestimmt:

$$R = \frac{q_a l}{2}.$$

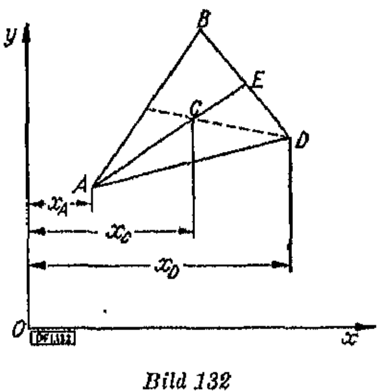
)en Abstand des Dreiecksschwerpunktes vom linken Auflager bestimmen wir als das rithmetische Mittel der Abstände seiner drei Scheitelpunkte[1]):

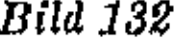
$$x_s = \frac{0 + a + l}{3} = \frac{a + l}{3}.$$

)ie Reaktionen sind $B = \frac{\Sigma M_A}{l} = \frac{R x_s}{l} = \frac{q_a l}{2} \cdot \frac{a + l}{3} \cdot \frac{1}{l} = \frac{q_a (l + a)}{6}$,

$$A = R - B = \frac{q_a l}{2} - \frac{q_a (l + a)}{6} = \frac{q_a (2l - a)}{6} = \frac{q_a (l + b)}{6}$$

der unmittelbar $A = -\frac{\Sigma M_B}{l} = -\frac{-R\,(l - x_s)}{l} = \frac{q_a\,(l + b)}{6}$.




Bild 132

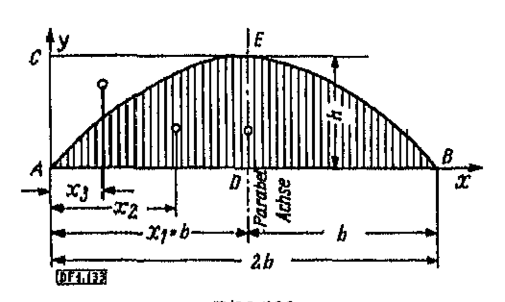


Bild 133

In den Berechnungen kommen nicht selten Belastungen vor, die sich nach einem para-olischen Gesetz ändern. Es ist daher zweckmäßig, sich die Werte der Flächen F und der Koordinaten x der Schwerpunkte der aufgeführten Figuren (Bild 133) zu merken:

---

[1]) Der Lehrsatz darüber, daß die Koordinate des Schwerpunkts der Dreiecksfläche gleich dem rithmetischen Mittel der Koordinaten seiner drei Scheitelpunkte ist, wird gewöhnlich in die Lehr-ücher der Analytischen Geometrie nicht aufgenommen. Daher führen wir einen von den Beweisen n. Zeichnet man in das Dreieck die Mittellinie AE ein (Bild 132), so erhalten wir die Abszisse des 'unktes E

$$x_E = \frac{x_B + x_D}{2}.$$

Aus der Geometrie ist uns bekannt, daß der Schwerpunkt C auf der Mittellinie liegt und ihre Länge n Verhältnis 2 : 1 teilt. In demselben Verhältnis teilt die Projektion des Punktes C auf eine beliebige .chse die Projektion der Strecke AE. Die Abszisse des Schwerpunktes kann daher wie folgt aus-edrückt werden:

$$x_s = x_A + \frac{2}{3}\,(x_E - x_A) = x_A + \frac{2}{3}\left(\frac{x_B + x_D}{2} - x_A\right)$$

der

$$x_s = \frac{x_A + x_B + x_D}{3}.$$

a) parabolisches Segment AEB: $F_1 = \frac{2}{3}\,(2b)\cdot h$; $x_1 = b$;

b) Segmenthälfte AED: $F_2 = \frac{2}{3}\,bh$; $x_2 = \frac{5}{8}\,b$;

c) parabolisches Dreieck (Hohlparabel) ACE unter der Bedingung, daß CE die Tangente ist:
$$F_3 = \frac{1}{3}\,bh; \qquad x_3 = \frac{1}{4}\,b$$ [1].

5.4 Kräfte an der Schnittfläche des Balkens Biegemoment und Querkraft — Vorzeichenregel

A. Nach der Ermittlung der Auflagerreaktionen sind alle auf den Balken wirkenden äußeren Kräfte bekannt, und wir können daher zu der Untersuchung der inneren Kräfte bei der Biegung übergehen. Dabei vereinbaren wir, die Ebene, in der die äußeren Kräfte wirken, als Kraftebene zu bezeichnen.

Zunächst untersuchen wir einen horizontalen Balken (Bild 134), der sich unter der Einwirkung eines im Gleichgewicht befindlichen Systems von vertikalen Kräften $P_1, P_2, \ldots, P_7$ (zu diesen gehören auch die Auflagerreaktionen) im Zustande der Biegung befindet. Zum Zwecke des Auffindens und der Ermittlung der inneren Kräfte an einer beliebigen Stelle des Balkens wenden wir das allgemeine Verfahren an, d. h. wir führen einen Schnitt a—b, entfernen den linken

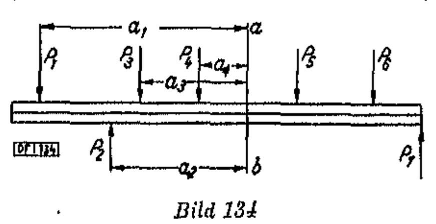


Bild 134

Teil des Balkens mit den an ihn angreifenden Kräften $P_1, \ldots, P_4$ und ersetzen ihren Einfluß auf den rechten Teil durch Kräfte σdF und τdF, die sich über den Querschnitt (Bild 135) verteilen. Es ist völlig klar, daß das System dieser Kräfte in statischer Hinsicht dem System der linken Kräfte $P_1, \ldots, P_4$ äquivalent sein muß, dessen Einfluß auf den rechten Teil wir analytisch in bezug auf ein Koordinatensystem mit dem Anfangspunkt im Schwerpunkt 0 des Querschnitts a—b ermitteln werden. Die Achsen wählen wir so, daß die Koordinatenebene xy mit

[1] *Anm. d. deutschen Redaktion:* Die Schwerpunktskoordinaten der Parabel differieren ja nach Art in geringen Grenzen. Unter Hinzusetzung der y-Werte werden hier deshalb die in deutschen Tafeln allgemein angegebenen Schwerpunktskoordinaten aufgeführt:

$$x_1 = b; \qquad y_1 = \frac{3}{8}\,h$$
$$x_2 = \frac{3}{5}\,b; \qquad y_2 = \frac{3}{8}\,h$$
$$x_3 = \frac{3}{10}\,b; \qquad y_3 = \frac{3}{4}\,h$$

(Man achte auf die Quotienten in den Koordinatenwerten x_2, x_3, y_2 und y_3, die sich infolge ihres jeweils verwandten Aufbaus leicht dem Gedächtnis einprägen!)

der Kraftebene zusammenfällt, wobei wir die y-Achse vertikal nach oben, die z-Achse horizontal und die x-Achse nach rechts längs der Balkenachse richten (Bild 135 und 136).

Ein solches Achsensystem trägt die Bezeichnung *Rechtsschraubensystem*. Stellt man sich vor, daß die z-Achse eine Schraube mit einem Rechtsgewinde ist, so

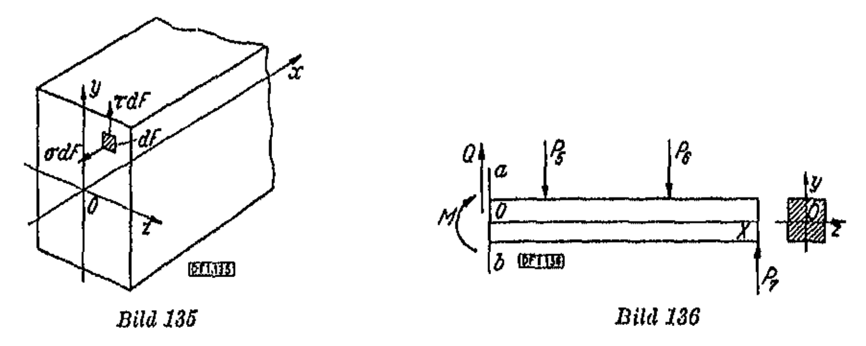


Bild 135 Bild 136

wird die Schraube bei einer Drehung des Systems um z von der positiven Richtung der x-Achse zur positiven Richtung y eine Vorwärtsbewegung in Richtung der positiven Seite der z-Achse ausführen (ein Hineinschrauben der Schraube).

Im gewählten Achsensystem wird der Einfluß der linken Kräfte $P_1, \ldots, P_4$ auf den rechten Balkenteil analytisch durch Gleichungen nach zwei Koordinatenrichtungen bestimmt:

$$\sum Y = -P_1 + P_2 - P_3 - P_4 = Q,$$

$$\sum M_z = -P_1 a_1 + P_2 a_2 - P_3 a_3 - P_4 a_4 = M\,^{1)}.$$

Das System der Kräfte σdF und τdF, die (kontinuierlich) über den Querschnitt verteilt sind, wird durch die gleichen Werte Q und M unter der Bedingung der statischen Äquivalenz mit den linken äußeren Kräften bestimmt. Wenn wir

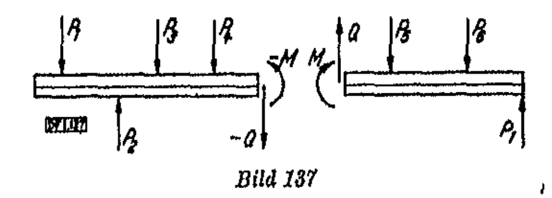


Bild 137

jedoch nach dem Zerschneiden den rechten Teil entfernen, so muß man seine Wirkung auf den verbliebenen linken Teil gemäß dem dritten Newtonschen Gesetz durch Kräfte Q und M umgekehrter Richtung ersetzen (Bild 137). Sie werden statisch äquivalent den äußeren Kräften sein, die sich rechts vom Querschnitt befinden.

[1]) Bei einer vertikalen Belastung hängen offenbar die Größe und das Vorzeichen von Q und M nicht von der Lage des Koordinatenanfangs O auf der y-Achse ab.

Der erste Wert Q stellt der Größe und Richtung nach die Resultierende (die algebraische Summe) der linken oder rechten Kräfte dar und heißt die *Querkraft im Querschnitt*[1]). Der zweite Wert M stellt die Summe der Momente der linken oder rechten Kräfte in bezug auf die z-Achse des Querschnitts dar und trägt die Bezeichnung *Biegemoment im gegebenen Querschnitt.*

Die zusammengefaßten Werte der rechten und der linken äußeren Kräfte, die hinsichtlich des Vorzeichens entgegengesetzt sind, bestimmen entsprechend zwei Kräftesysteme, die die Wirkung des rechten Teils auf den linken und umgekehrt ausdrücken. Um Fehler hinsichtlich des Vorzeichens, d. h. hinsichtlich der Richtung der vorgenannten Werte Q und M zu vermeiden, vereinbaren wir, stets den linken Balkenteil zu entfernen und seinen Einfluß auf den rechten Teil zu untersuchen.

Dann müssen wir am Schnitt das Biegemoment als Summe der Momente und die Querkraft als Resultierende der linken Kräfte ermitteln. Dabei wird die Querkraft Q als positiv angesehen, wenn sie nach oben wirkt (in Übereinstimmung mit der gewählten Richtung der y-Achse). Dem Biegemoment werden wir, wie üblich, ein positives Vorzeichen geben, wenn es bestrebt ist, eine Drehung im Sinne des Urhzeigers zu bewirken.

Wenn rechts vom Querschnitt weniger Kräfte angeordnet sind als links davon, so ist es bequemer, Q und M durch die rechten Kräfte zu bestimmen. Da aber vereinbart worden ist, die Wirkung der zusammengefaßten linken Kräfte als die Querkraft und das Biegemoment zu bezeichnen, so muß man zuerst für die rechten Kräfte die umgekehrte Vorzeichenregel einführen (d. h. die nach unten wirkende Kraft und das im Gegensinne des Uhrzeigers drehende Moment als positiv ansehen).

Beispiel 23

Ein Balken ruht auf zwei Auflagern und ist durch mehrere Einzelkräfte belastet (Bild 138). Zu ermitteln sind Q und M an den Schnitten $a-b$ und $c-d$.

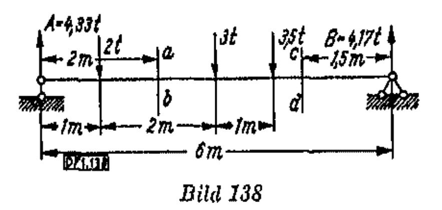


Bild 138

Zuerst bestimmen wir die Auflagerreaktionen:

$$A = -\frac{\Sigma M_B}{l} = \frac{2 \cdot 5 + 3 \cdot 3 + 3.5 \cdot 2}{6} = 4,33 \text{ t},$$

$$B = \Sigma P - A = 2 + 3 + 3,5 - 4.33 = 417 \text{ t}.$$

Für den Querschnitt $a-b$ berechnen wir unmittelbar die Querkraft und das Moment der linken Kräfte:

$$Q_{ab} = 4,33 - 2 = 2,33 \text{ t},$$

$$M_{ab} = 4,33 \cdot 2 - 2 \cdot 1 = 6,66 \text{ tm}.$$

[1]) Wenn die Belastung nicht senkrecht zur Balkenachse gerichtet ist, so bezeichnet man als Querkraft die Summe der Projektionen der linken oder rechten Kräfte auf die Senkrechte zur Balkenachse.

Für den Querschnitt $c-d$ ist es viel einfacher, die rechten Kräfte zu untersuchen (bei umgekehrter Vorzeichenregel). Rechts vom Querschnitt wirkt nur allein die rechte Reaktion:

$$Q_{cd} = -B = -4{,}17 \text{ t},$$
$$M_{cd} = 4{,}17 \cdot 1{,}5 = 6{,}26 \text{ tm}.$$

B. Alle Ermittlungen und Regeln des vorhergehenden Punktes behalten ihre Gültigkeit auch im Falle kontinuierlicher Belastung. Es sollen z. B. Q und M am Querschnitt $c-d$ des Balkens, der mit einer kontinuierlichen Belastung in Form eines Dreiecks mit der größten Belastungshöhe $m B = q_0$ über dem rechten Auflager belastet ist, ermittelt werden (Bild 139).

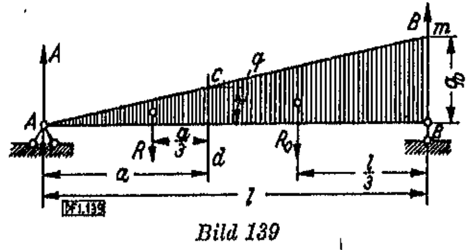


Bild 139

Der Schnitt ist im Abstand a vom linken Auflager geführt. Die Resultierende der Gesamtbelastung R_0 ist gleich der Fläche des Dreiecks $A m B$ und geht durch seinen Schwerpunkt im Abstand $^1/_3\, l$ vom Auflager B:

$$R_0 = \frac{q_0 l}{2}.$$

Ermitteln wir die Auflagerreaktionen: $A = \frac{q_0 l}{2} \cdot \frac{l}{3} \cdot \frac{1}{l} = \frac{q_0 l}{6}$,

$$B = \frac{q_0 l}{2} - \frac{q_0 l}{6} = \frac{q_0 l}{3}.$$

Wir gehen nun zur Ermittlung des Biegemoments und der Querkraft am Schnitt $c-d$ über. Links von ihm befinden sich die Einzelkraft A und der Teil Acd der durchgehenden Belastung. Das Moment dieses Teils der Belastung in bezug auf den Schnitt kann man als Moment seiner Resultierenden R ermitteln, die durch die Fläche des Dreiecks Acd bestimmt ist und im Abstand $^1/_3\, a$ vom Schnitt wirkt. Zunächst errechnen wir aus der Ähnlichkeit der Dreiecke die Größe q der Belastung über dem Schnitt:

$$q = \frac{q_0 a}{l}.$$

Darauf berechnen wir $\quad R = \frac{q a}{2} = \frac{q_0 a^2}{2 l}$,

$$Q = A - R = \frac{q_0 l}{6} - \frac{q_0 a^2}{2 l} = \frac{q_0}{6 l}\,(l^2 - 3 a^2),$$

$$M = A\, a - R\,\frac{a}{3} = \frac{q_0 l a}{6} - \frac{q_0 a^3}{6 l} = \frac{q_0 a}{6 l}\,(l^2 - a^2).$$

Hier ist es angebracht, den Leser vor einem in der ersten Zeit oft vorkommenden Fehler zu warnen, der darin besteht, daß die gesamte auf den Balken wirkende durchgehende Belastung durch ihre Resultierende ersetzt und im weiteren mit einem Balken operiert wird, der durch eine Einzelkraft R_0 belastet ist. Ein derartiger Ersatz, der das Gleichgewicht des Balkens nicht stört, gibt richtige Werte nur für die Auflagerreaktionen, die nämlich aus den Gleichgewichtsbedingungen des ganzen Balkens ermittelt werden, aber die auf diese Weise ermittelten Biegemomente und Querkräfte sind augenscheinlich falsch.

Die Kräfte in den verschiedenen Querschnitten hängen nicht nur von der allgemeinen Belastungsmenge, sondern auch von der Art ihrer Verteilung über die Balkenlänge ab. Es darf nicht vergessen werden, daß wir bei der Berechnung von M und Q den Balken in zwei Teile zerschneiden und nur einen dieser Teile betrachten, weshalb wir durch eine Resultierende nur den Teil der Belastung ersetzen können, der sich auf dem der Betrachtung unterzogenen Teil des Balkens befindet.

5.5 Analytische Konstruktion der Biegemomenten- und Querkraftlinien

A. Die Intensität der auf irgendein elementares Flächenelement dF des Balkenquerschnitts wirkenden inneren Kräfte wird durch die Spannung p charakterisiert, die, allgemein gesagt, unter einem gewissen Winkel zum Flächenelement geneigt ist. Zerlegen wir die Gesamtspannung p in die Normalspannung σ und in die Schubspannung τ. Dann werden die auf das Flächenelement wirkenden Normal- und Tangentialkräfte gleich σdF und τdF sein. Das System dieser über den ganzen Querschnitt verteilten Kräfte wird, wie oben gezeigt wurde, auf die Kraft Q und das Kräftepaar M zurückgeführt. Es ist völlig klar, daß die parallel zur x-Achse des Balkens gerichteten Normalkräfte σdF nicht eine zur x-Achse senkrecht gerichtete Resultierende haben können, so daß sie daher auf ein Kräftepaar zurückgeführt werden müssen. Andererseits können nicht die in der Querschnittsebene gelegenen Tangentialkräfte τdF ein Moment in bezug auf die z-Achse ergeben (Bild 135), wie auch ihre Richtung sein mag. Dies bedeutet, daß sie auf eine Resultierende Q zurückzuführen sind. Hieraus folgt, daß die Normalspannungen bei der Biegung nur vom Biegemoment, aber die Schubspannungen nur von der Querkraft abhängen. Die Werte M und Q ändern sich jedoch längs des Balkens, und folglich sind auch die Spannungen in den verschiedenen Querschnitten verschieden. Man kann, ohne vorläufig das Gesetz der Spannungsverteilung am Querschnitt zu berühren, schon jetzt die Querschnitte mit dem größten Biegemoment und der größten Querkraft ausfindig machen. Im ersten Querschnitt werden die größten Normalspannungen und im zweiten die größten Schubspannungen wirken.

Diese beiden Querschnitte fallen im allgemeinen nicht zusammen. Das Auffinden der gefährdeten Querschnitte vereinfacht sich wesentlich, wenn man die Gesetze der Änderung von M und Q über die Länge des Balkens graphisch darstellt, indem man ihre Werte in irgendeinem Maßstab in Form von Ordinaten von einer zur Balkenachse parallelen Achse aus unter den entsprechenden Querschnitten abträgt. Derartige graphische Darstellungen heißen *Biegemomenten- und Querkraftlinien*. Die M- und Q-Linien können auf analytischem Wege oder graphisch (mit Hilfe eines Seilpolygons) konstruiert werden.

Die analytische Methode besteht darin, daß eine analytische Formel für das Gesetz der Änderung von M und Q über die Länge des Balkens in Form einer Funktion der Querschnittslage, die sich durch ihre Abszisse x bestimmt, aufgestellt wird. Hierbei ordnet man gewöhnlich den Koordinatenanfangspunkt am linken Auflager oder allgemein am linken Balkenende an, wobei man der positiven Achse x die Richtung nach rechts längs der Balkenachse gibt¹). Wenn die Gleichungen $Q = f_1(x)$ und $M = f_2(x)$ aufgestellt sind, so setzt man für x aufeinanderfolgende Werte ein, wobei man den Querschnitt über den ganzen Balken weiterrückt, und berechnet die entsprechenden Werte für Q und M, die man in dem gewählten Maßstab abträgt. Auf diese Weise stellen die Linien Q und M graphisch die Gleichungen $Q = f_1(x)$ und $M = f_2(x)$ dar.

Betrachten wir die Konstruktion der Q- und M-Linien an einigen charakteristischen Beispielen.

Beispiel 24

Der Balken ist mit dem rechten Ende eingespannt und am linken Ende durch die Einzelkraft P (Bild 140, a) belastet. Dann führen wir einen Schnitt $a-a$ in einem beliebigen Abstand x vom linken Ende. Das Biegemoment in diesem Querschnitt ist:

$$M_x = -P \cdot x, \tag{5.5}$$

und die Querkraft:

$$Q_x = -P. \tag{5.6}$$

Die Gleichung (5.5) ist in bezug auf x linear, und die M-Linie stellt sich daher als Gerade dar, zu deren Konstruktion es genügt, zwei extreme Ordinaten zu ermitteln, indem man in (5.5) $x = 0$ und $x = l$ einsetzt.

Bei $x = 0$ ist $M = 0$ und bei $x = l$ ist $M = -Pl$.

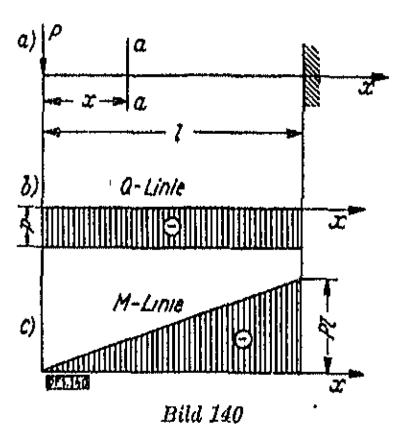


Bild 140

Die M-Linie ist auf Bild 140, c dargestellt. Die Gleichung (5.6) zeigt, daß die Querkraft in jedem beliebigen Querschnitt konstant ist. Die Q-Linie erscheint als zur Achse parallele Gerade Bild 140, b).

Der gefährdete Querschnitt befindet sich am eingespannten Ende. In diesem wirken die größten Normalspannungen. Die Schubspannungen sind in allen Querschnitten gleich.

¹) Es ist selbstverständlich auch eine andere Wahl des Koordinatenanfangs durchaus möglich, insbesondere, wenn dies zu einer Vereinfachung der Ausdrücke für M und Q führt.

In der Praxis trägt man die Ordinaten der M-Linie gewöhnlich auf der Seite der gezogenen Balkenfasern (d. h. auf der konvexen Seite bei der Biegung) ab. Das positive Biegemoment ist bestrebt, die Balkenachse mit der Konvexität nach unten zu biegen, das negative aber nach oben (siehe Bild 172). Die Ordinaten der positiven und negativen M werden wir daher auch in diesen Richtungen abtragen.

Die positiven Ordinaten der Querkraft werden von der Achse nach oben und die negativen nach unten abgetragen (in Übereinstimmung mit der Richtung der Kraft Q).

Beispiel 25

Ein gleicher Balken, wie im Beispiel 24, ist mit einer kontinuierlichen gleichmäßigen Belastung von der Größe q belastet (Bild 141, a).

Für einen im Abstand x von dem linken Ende entfernten Querschnitt ist die Resultierende der linken Kräfte gleich der Belastungsgröße q multipliziert mit der Länge x des linken Teils und nach unten gerichtet:

$$Q_x = -qx, \tag{5.7}$$

$$M_x = -qx\frac{x}{2} = -\frac{qx^2}{2}. \tag{5.8}$$

Die Gleichung (5.7) ist ersten Grades, und die Q-Linie erscheint als Gerade, deren extreme Ordinaten wir wie in der vorherigen Aufgabe finden.

Bei $x = 0$ ist $Q = 0$ und bei $x = l$ ist $Q = -ql$.

Die Gleichung (5.8) weist darauf hin, daß sich das Biegemoment nach einem parabolischen Gesetz ändert. Die größte Ordinate der Parabel $-\frac{ql^2}{2}$ entspricht dem Querschnitt am eingespannten Ende (Bild 141, c). Im Querschnitt am linken Ende ist $M = 0$. Für die Konstruktion der M-Linie muß man einige Ordinaten errechnen, abtragen und ihre Endpunkte durch eine fließende Kurve verbinden. Am eingespannten Ende befindet sich der gefährdete Querschnitt. Hier wirken gleichzeitig die größten Normal- und Schubspannungen.

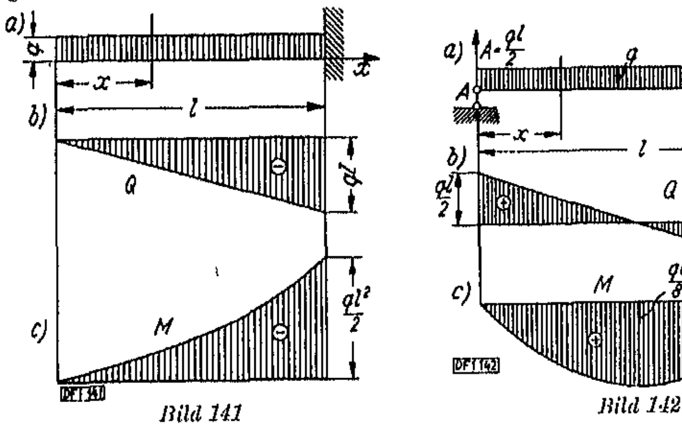


Bild 141 Bild 142

Beispiel 26

Ein Balken auf zwei Stützen ist mit einer kontinuierlichen gleichmäßigen Belastung q belastet (Bild 142, a).

Die gesamte auf den Balken wirkende Belastung ist gleich ql. Wegen der Belastungssymmetrie sind die Auflagerreaktionen einander gleich:

$$A = B = \frac{ql}{2}.$$

In einem beliebigen Querschnitt des Balkens mit der Abszisse x lassen sich die Werte Q und M der linken Kräfte auf folgende Weise ausdrücken:

$$Q_x = A - qx = \frac{ql}{2} - qx, \tag{5.9}$$

$$M_x = A \cdot x - qx\frac{x}{2} = \frac{qlx}{2} - \frac{qx^2}{2} = \frac{qx(l-x)}{2}. \tag{5.10}$$

Die Q-Linie stellt eine geneigte Gerade dar (Bild 142, b). Ihre extremen Ordinaten finden wir, indem wir $x = 0$ und $x = l$ in die Gleichung (5.9) einsetzen. Am linken Auflager wird

$$Q_A = \frac{ql}{2} = A$$

und am rechten

$$Q_B = -\frac{ql}{2} = -B.$$

Die Q-Linie hat in der Mitte der Stützweite einen Nullpunkt. In diesem Querschnitt sind keine Schubspannungen vorhanden. Das durch die Gleichung (5.10) ausgedrückte Gesetz der Änderung von M stellt sich in Form einer Parabel mit einer durch die Mitte der Öffnung gehenden vertikalen Achse dar (Bild 142, c). Setzen wir in (5.10) $x = \frac{l}{2}$ ein, so erhalten wir

$$M_{\max} = \frac{ql^2}{8}. \tag{5.11}$$

Es ist zweckmäßig, die Gleichung (5.10) und die Formel (5.11) im Gedächtnis zu behalten, da diese oft bei Berechnungen in der Praxis angewandt werden.

Beispiel 27

Ein Balken auf zwei Stützen ist mit einer kontinuierlichen Belastung von der Form eines Dreiecks mit einer größten Belastung q_0 über dem rechten Auflager belastet (Bild 143, a).

Für die Konstruktion der M- und Q-Linie benutzen wir die Ergebnisse des Beispiels gemäß Bild 139. Setzt man in die dort erhaltenen Ausdrücke für Q und M an Stelle der konstanten Abszisse a des Querschnitts die veränderliche Abszisse x ein, so erhalten wir Gleichungen, die die Gesetze der Änderung von Q und M über die Balkenlänge zum Ausdruck bringen:

$$Q_x = \frac{q_0}{6l}(l^2 - 3x^2), \tag{5.12}$$

$$M_x = \frac{q_0 x}{6l}(l^2 - x^2). \tag{5.13}$$

Die Gleichung (5.12) ist zweiten Grades, und die Q-Linie stellt eine Parabel mit einer durch das linke Auflager gehenden vertikalen Achse dar (Bild 143, b). Im Querschnitt am linken Auflager ($x = 0$) ist:

$$Q_A = \frac{q_0 l}{6} = A.$$

Im Querschnitt am rechten Auflager ($x = l$) ist:

$$Q_B = -\frac{q_0 l}{3} = -B.$$

Die Lage des Nullpunktes der Q-Linie ermitteln wir, indem wir den rechten Teil der Gleichung (5.12) gleich Null setzen, demnach ist

$$\frac{q_0}{6l}(l^2 - 3x^2) = 0,$$

und hieraus
$$x = \frac{l}{\sqrt{3}} \approx 0{,}577\, l.$$

Die Gleichung (5.13) zeigt, daß das Biegemoment sich nach dem Gesetz der kubischen Parabel ändert (Bild 143, c). Die größte Ordinate der M-Linie kann man als das Maximum der Funktion (5.13) finden, indem man ihre erste Ableitung gleich Null setzt. Zu dieser Aufgabe werden wir im weiteren zurückkehren.

B. In den vorherigen Aufgaben blieben die analytischen Formeln für Q und M über die ganze Balkenstrecke gleich. Betrachten wir jetzt Fälle, bei denen das Aussehen der Formeln $Q = f_1(x)$ und $M = f_2(x)$ in verschiedenen Abschnitten des Balkens verschieden ist.

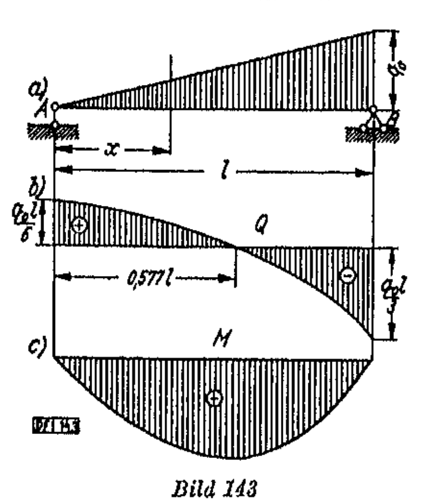


Bild 143

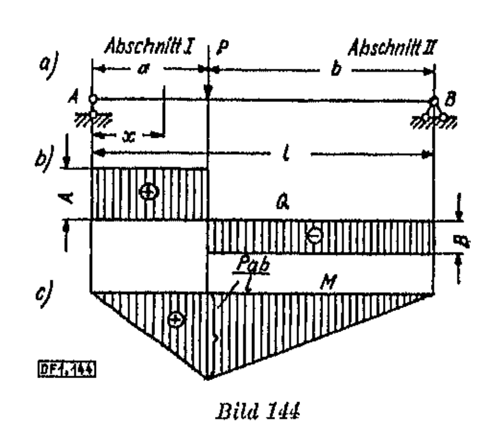


Bild 144

Beispiel 28

Ein Balken auf zwei Stützen ist mit einer Einzellast P belastet, die im Abstand a und b von den Auflagern angreift (Bild 144, a).

Die Auflagerreaktionen sind:
$$A = \frac{Pb}{l} \quad \text{und} \quad B = \frac{Pa}{l}.$$

Für einen Querschnitt im ersten Abschnitt ist:
$$Q_x = A = \frac{Pb}{l}$$

und
$$M_x = Ax = \frac{Pbx}{l}.$$

Für einen Querschnitt im zweiten Abschnitt ist (wenn man $b - l = -a$ setzt):
$$Q_x = A - P = -B,$$
$$M_x = Ax - P(x - a) = \frac{P}{l}(bx - lx + la) = \frac{Pa}{l}(l - x).$$

Beim Übergang des Querschnitts aus dem ersten in den zweiten Abschnitt ändert Q seine Größe und sein Vorzeichen (Bild 144, b). Das Biegemoment ist überall positiv (Bild 144, c)

rreicht unter der Last seinen größten Wert, den wir erhalten, wenn wir in die Gleichung 'sten oder zweiten Abschnitts $x = a$ einsetzen:

$$M_{\max} = \frac{Pab}{l}. \tag{5.14}$$

ınn die Last in der Mitte der Spannweite angreift, d. h. $a = b = \frac{l}{2}$ ist, so wird

$$M_{\max} = \frac{Pl}{4}. \tag{5.15}$$

ist zweckmäßig, die Formeln (5.14) und (5.15) wegen ihrer praktischen Bedeutung im chtnis zu behalten.

ɪrmerken wir charakteristische Besonderheiten der erhaltenen Linien. Die nie hat unter der Last eine Stufe, da beim Übergang des Querschnitts durch Angriffspunkt der Last der Wert Q sich plötzlich ändert. Für einen unendlich links von der Last P geführten Schnitt ist $Q = \frac{Pb}{l}$, und für einen un-ich nahen Schnitt rechts von derselben Last ist $Q = -\frac{Pa}{l}$. Im Querschnitt ittelbar unter der Last ist der Wert Q ungewiß, da die Funktion Q hier eine einbare) Unterbrechung der Kontinuität erleidet[1]). Das Biegemoment ändert kontinuierlich über die Länge des Balkens. Die auf Grund der zwei Glei-ngen für die der Last benachbarten Abschnitte ermittelten Werte M unter Last stimmen überein. Die M-Linie erscheint als gebrochene Linie, die beim rgang an einem Lastenpunkt ihre Neigung ändert. Einen derartigen Charakter en die Q- und M-Linien stets bei einer Belastung durch Einzelkräfte.

piel 29

'er Balken ist mit zwei gleichen Lasten P belastet, die von den Auflagern gleich weit ernt sind (Bild 145, a).

uf Grund der Belastungssymmetrie ist:

$$A = B = P.$$

ür einen Querschnitt im ersten Abschnitt ist:

$$Q_x = A = P, \quad M_x = Ax = Px,$$

für einen beliebigen Querschnitt im zweiten Abschnitt ist

$$Q_x = A - P = O, \qquad M_x = Ax - P(x - a) = Pa = \text{const.}$$

m dritten Abschnitt ist die M-Linie symmetrisch zum ersten Abschnitt. Auf diese Weise sie im ganzen die Form eines Trapezes (Bild 145, c). Die Q-Linie ist umgekehrt sym-.risch. Hiervon kann man sich leicht überzeugen, wenn man einen Schnitt im dritten ıchnitt führt und die rechten Kräfte betrachtet (Bild 145, b).

n allen Querschnitten des zweiten Abschnitts wirken nur Normalspannungen. Die ıubspannungen sind gleich Null, da $Q = 0$ ist. Einen derartigen Spannungszustand nennt ı *reine Biegung*.

) Diese Ungewißheit erscheint als Ergebnis der Darstellung der Last in Form einer Einzelkraft. Virklichkeit nimmt die Last wenn auch einen geringen, so doch einen endlichen Längenabschnitt auf dessen Strecke sich der Wert Q von $\frac{Pb}{l}$ bis $-\frac{Pa}{l}$ kontinuierlich ändert.

Beispiel 30

Eine kontinuierliche gleichmäßige Belastung q nimmt nur einen Teil der Balkenstützweite ein (Bild 146, a). Die Auflagerreaktionen sind:

$$A = \frac{qa\left(\frac{a}{2} + b\right)}{l} = \frac{qa\,(l + b)}{2\,l},$$

$$B = \frac{qa^2}{2\,l}.$$

Für einen Querschnitt x im belasteten linken Abschnitt ist:

$$\left.\begin{aligned} Q_x &= A - qx = \frac{qa\,(l + b)}{2\,l} - qx, \\ M_x &= Ax - \frac{qx^2}{2}. \end{aligned}\right\} \qquad (5.16)$$

Für einen Querschnitt im unbelasteten rechten Abschnitt ist:

$$\left.\begin{aligned} Q_x &= -B = -\frac{qa^2}{2\,l} = \text{const}, \\ M_x &= B\,(l - x) = \frac{qa^2}{2\,l}\,(l - x). \end{aligned}\right\} \qquad (5.17)$$

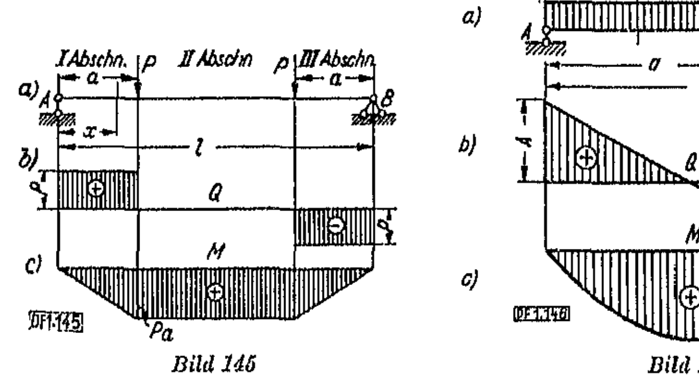


Bild 145

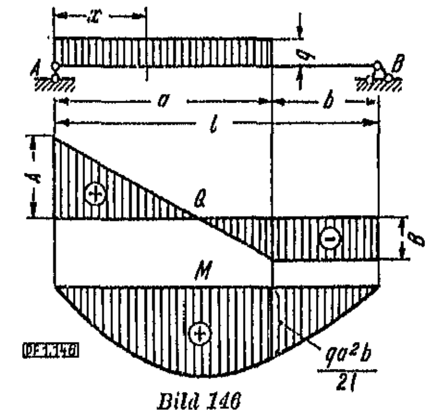


Bild 146

Die Q-Linie erscheint im ersten Abschnitt als geneigte Gerade und im zweiten Abschnitt als waagerechte Gerade (Bild 146, b).

Beim Übergang vom ersten zum zweiten Abschnitt erleidet die Querkraft keine Unterbrechung der Kontinuität, wovon man sich leicht überzeugen kann, wenn man in die Formel Q für den ersten Abschnitt $x = a$ einsetzt:

$$Q_a = \frac{qa\,(l + b)}{2\,l} - qa = \frac{qa\,(b - l)}{2\,l} = -\frac{qa^2}{2\,l}.$$

Das Ergebnis stimmt mit dem Ausdruck (5.17) überein.

Das Biegemoment ist im ersten Abschnitt eine Parabel und im zweiten Abschnitt eine geneigte Gerade (Bild 146, c). Am Übergang von einem Abschnitt zum anderen ist

$$M = \frac{qa^2}{2\,l}\,(l - a) = \frac{qa^2 b}{2\,l}.$$

Zur Ermittlung des Querschnitts mit dem größten Biegemoment in dieser Aufgabe werden wir im weiteren zurückkehren.

5.6 Differentialabhängigkeiten zwischen Biegemoment, Querkraft und Belastungsintensität — Gefährdete Querschnitte

A. Vergleicht man die Ergebnisse der durchgenommenen Beispiele miteinander, so kann man in diesen folgende Besonderheiten allgemeinen Charakters feststellen:

1. Bei einem Balken auf zwei Stützen ist die Querkraft am linken Auflager gleich der linken Auflagerreaktion[1]) und am rechten Auflager gleich der rechten Auflagerreaktion mit umgekehrtem Vorzeichen.

Es ist zu ersehen, daß diese Abhängigkeit für einen beliebigen Belastungsfall ihre Gültigkeit behält. Hierzu genügt es, in einem unendlich kleinen Abstand von den Auflagern Schnitte zu führen und die Resultierende der linken Kräfte für den Querschnitt am linken Auflager und die Resultierende der rechten Kräfte für den Querschnitt am rechten Auflager in Betracht zu ziehen. Denken wir an die umgekehrte Vorzeichenregel für die rechten Kräfte, so finden wir

$$Q_A = A \quad \text{und} \quad Q_B = -B. \tag{5.18}$$

2. Wenn M durch eine ganze algebraische Funktion (durch ein Polynom) ausgedrückt wird, so ist der Grad der Funktion $Q = f_1(x)$ um einen niedriger als der Grad der Funktion $M = f_2(x)$.

3. Auf den Bildern 142, 143 und 144 ist ersichtlich, daß im Querschnitt mit dem größten Biegemoment die Querkraft gleich Null ist oder durch Null geht, indem sie ihr Vorzeichen ändert.

Die zwei letzten Abhängigkeiten zwischen M und Q, die mit den Abhängigkeiten zwischen der Funktion und ihrer ersten Ableitung gleichbedeutend sind, geben den Gedanken ein, daß die Funktion $Q = f_1(x)$ gleich der ersten Ableitung der Funktion $M = f_2(x)$ in einem beliebigen Abschnitt des Balkens ist.

Beweisen wir dies in allgemeiner Form für den Fall eines geraden Balkens. Gleichzeitig erhalten wir auch eine andere Abhängigkeit, nämlich zwischen der Querkraft und der Größe einer kontinuierlichen Belastung.

Nehmen wir an, daß auf den Balken eine beliebige kontinuierliche Belastung und dazu beliebige Einzellasten wirken (Bild 147, a). Schneiden wir mit zwei unendlich nahen Schnitten a—a und b—b in einem beliebigen Abschnitt zwischen zwei Einzellasten ein Balkenelement von der Länge dx heraus. Die auf dieses Element von unendlich kleiner Länge wirkende Belastung q kann man als gleichmäßig ansehen. Nachdem wir den linken Teil des Balkens entfernt haben, ersetzen wir seinen Einfluß auf das herausgeschnittene Element durch die Kraft Q und das Moment M, die wir beide als positiv festlegen. Wir entfernen den rechten Teil und ersetzen seine Wirkung auf das Element durch die Kraft Q' und das Moment M', die offenbar die umgekehrten Richtungen haben müssen (Bild 147, b). Da auf das herausgeschnittene Element keine Einzelkräfte wirken, die eine Unterbrechung der Kontinuität von Q hervorrufen, so unterscheiden sich die Zahlenwerte Q' und M' nur unendlich wenig von den Werten Q und M:

$$M' = M + dM, \qquad Q' = Q + dQ.$$

Hier sind dM und dQ dem Wesen nach Zunahmen von M und Q. Da aber M und Q Funktionen von x sind, so ersetzen wir ihre Zunahmen mit einer Ge-

[1]) Wenn sich über dem Auflager eine Last befindet, so wird diese unmittelbar auf das Auflager übertragen und in die Reaktionsberechnung für Q und M nicht eingeführt.

nauigkeit bis zu unendlich kleinen Werten höherer Ordnung durch Differentiale. Das herausgeschnittene Balkenelement muß sich im Gleichgewicht befinden. Projiziert man alle an ihm angreifenden Kräfte auf die vertikale Achse und setzt man die Summe der Projektionen gleich Null, so erhalten wir

$$Q - (Q + dQ) - q\,dx = 0,$$

woraus

$$dQ = -q\,dx \quad \text{ist.} \tag{5.19}$$

Aus (5.19) ist zu ersehen, daß die Zunahme dQ der Querkraft beim Übergang vom Schnitt $a-a$ zum Schnitt $b-b$ negativ ist, da die Belastung q nach unten gerichtet ist. Wenn wir in Übereinstimmung mit der Richtung der positiven Achse y vereinbart hätten, eine nach oben gerichtete Belastung als positiv anzusehen, so müssen wir auf der rechten Seite von (5.19) das Vorzeichen in das umgekehrte ändern. Da man es aber größtenteils mit einer Belastung durch Gewichte zu tun hat, die naturgemäß von oben nach unten gerichtet ist, so ist es zweckmäßiger, einer solchen Belastung das positive Vorzeichen zuzuschreiben. Daher schreiben wir die Gleichung (5.19) wie folgt um:

$$\frac{dQ}{dx} = -q. \tag{5.20}$$

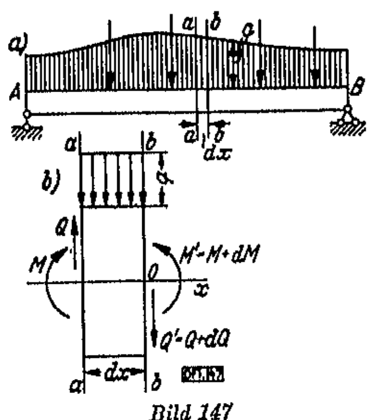


Bild 147

Setzen wir die Summe der Momente aller Kräfte um den Schwerpunkt O des Querschnitts $b-b$ gleich Null:

$$M - (M + dM) + Q\,dx - q\,\frac{dx^2}{2} = 0.$$

Hieraus ergibt sich

$$dM = Q\,dx - \frac{q\,dx^2}{2}.$$

Streicht man das zweite Glied der rechten Seite als unendlich kleine Größe höherer Ordnung, so erhalten wir schließlich

$$Q = \frac{dM}{dx}, \tag{5.21}$$

was auch zu beweisen war: Diese Differentialabhängigkeit nennt man manchmal in der Literatur den Lehrsatz von *Shurawski* oder den *Schwedlerschen Lehrsatz.*

B. Den Funktionen

$$q = f(x), \quad Q = f_1(x) \quad \text{und} \quad M = f_2(x)$$

haben wir eine graphische Darstellung in Form von Belastungs-, Querkraft- und Biegemomentenlinien gegeben. Aus diesem Grunde können wir den eben gefundenen Differentialabhängigkeiten zwischen diesen Funktionen (5.20) und (5.21) auch eine geometrische Deutung geben, wenn wir uns an die geometrische Bedeutung der Ableitung einer Funktion erinnern[1]).

Wenn wir die Querkraftlinie betrachten und in irgendeinem Punkte derselben eine Tangente zu ihr zeichnen, so ist gemäß der Gleichung (5.20)

$$\frac{m}{n} \operatorname{tg} \alpha = \frac{dQ}{dx} = -q, \tag{a}$$

worin α der Neigungswinkel der Tangente zur Q-Linie in bezug auf die x-Achse, m der Ordinatenmaßstab der Q-Linie und n der Längenmaßstab (des Balkens) sind. Mit anderen Worten, die *Belastungsgröße q in einem gegebenen Punkt ist proportional dem Tangens des Neigungswinkels der Tangente zur Q-Linie in diesem Punkt mit umgekehrtem Vorzeichen.*

Auf gleiche Weise ergibt die Gleichung (5.21):

$$\frac{m_1}{n} \operatorname{tg} \beta = \frac{dM}{dx} = Q, \tag{b}$$

d. h. die Querkraft im gegebenen Schnitt ist proportional dem Tangens des Neigungswinkels der Tangente zur M-Linie in dem Punkte, der dem gewählten Schnitt entspricht.

Hier bezeichnen m_1 und n wie früher die Maßstäbe der Ordinaten und Abszissen der Linien.

Bemerken wir noch, daß die Abhängigkeiten (5.20) und (5.21) als Differentialgleichungen zum Auffinden der Funktionen M und Q betrachtet werden können. Daher ist die Konstruktion der M- und Q-Linie nichts anderes als eine Integration dieser Differentialgleichungen, d. h. eine Ermittlung der Funktionen M und Q auf Grund der bekannten Funktion q. Die geometrische Deutung der Abhängigkeiten (5.20) und (5.21) ermöglicht es, in vielen Fällen der Praxis die M- und Q-Linie auf Grund der gegebenen q-Linie äußerst einfach auf graphischem Wege zu konstruieren, mit anderen Worten, die Differentialgleichungen graphisch zu integrieren.

Wenn jedoch die M- und Q-Linien auf die oben beschriebene analytische Weise konstruiert werden, so ermöglichen es die Beziehungen (a) und (b), die Richtigkeit der erhaltenen Ergebnisse sehr leicht zu überprüfen. Die Verfahren einer solchen Prüfung gründen sich auf folgende einfache Ableitungen aus den Abhängigkeiten (a) und (b):

1. Wenn es in dem gegebenen Abschnitt des Balkens keine Belastung gibt, so ist $q = 0$, und gemäß (a) folgt $\operatorname{tg} \alpha = 0$. Dies bedeutet, daß sich die Q-Linie in Form einer zur Achse parallelen Geraden darstellt (mit anderen Worten, $Q = \text{const}$). Ferner folgern wir aus (b), daß

$$\operatorname{tg} \beta = \text{const}$$

[1]) Diese Ableitung ist gleich dem Winkelkoeffizienten der Tangente zur Kurve im gegebenen Punkt.

ist, folglich hat die M-Linie in diesem Abschnitt das Aussehen einer geneigten Geraden. Hierbei ist zu bemerken:

$$\text{a) wenn} \quad Q > 0 \text{ ist,} \quad \text{dann ist} \quad \operatorname{tg}\beta > 0,$$

und das Moment nimmt zu;

$$\text{b) wenn} \quad Q < 0 \text{ ist,} \quad \text{dann ist} \quad \operatorname{tg}\beta < 0,$$

und das Moment nimmt ab;

$$\text{c) wenn} \quad Q = 0 \text{ ist,} \quad \text{dann ist} \quad \operatorname{tg}\beta = 0,$$

d. h. das Moment erhält seinen konstanten Wert aufrecht, und seine Linie hat die Form einer zur Achse parallelen Geraden.

2. Wenn es in dem gegebenen Abschnitt nur eine durchgehende gleichmäßige Belastung gibt, d. h. $q = \text{const}$ ist, so folgt gemäß (a) $\operatorname{tg}\alpha = \text{const}$, und die Q-Linie hat die Form einer geneigten Geraden. Demnach ist:

$$Q = -\int q\,dx + C = -qx + C,$$

wobei sich die Ordinaten dieser Geraden mit der Zunahme von x verringern. Gemäß (b) ist:

$$\frac{dM}{dx} = Q = -qx + C,$$

$$M = \int Q\,dx + D = -q\frac{x^2}{2} + Cx + D,$$

d. h. das Moment ändert sich nach dem parabolischen Gesetz.

3. Wenn bei beliebiger Belastung im gegebenen Abschnitt überall $Q > 0$ ist, so nimmt das Moment zu. Wenn aber $Q < 0$ ist, so nimmt das Moment ab.

4. Wenn die Schnitte a—a und b—b (Bild 147, a) in benachbarten Abschnitten so gewählt werden, daß es zwischen ihnen eine am herausgeschnittenen Element angreifende Einzellast gibt, so wird die Zunahme ΔQ der Querkraft beim Übergang vom Schnitt a—a zum Schnitt b—b eine endliche Größe sein. Folglich erleidet die Funktion $Q = \frac{dM}{dx}$ im Angriffspunkt der Einzellast eine Unterbrechung der Kontinuität, die sich an der Q-Linie durch eine Stufe und an der M-Linie durch eine plötzliche Änderung des Neigungswinkels darstellt. Die Größe der Stufe an der Q-Linie ist gleich der Einzellast.

Die Unterbrechung der Kontinuität zeigt, daß die Querkraft im Querschnitt genau unter der Last unbestimmt ist. Daher muß man in allen Fällen, in denen zur Belastung Einzelkräfte gehören, die Werte Q für Querschnitte berechnen, die beliebig nahe links und rechts von jeder Kraft gelegen sind.

Es wird dem Leser empfohlen, bei der Konstruktion der M- und Q-Linien zur Kontrolle der Richtigkeit der ausgeführten Konstruktionen immer die aufgeführten Ableitungen zu benutzen.

C. Auf Grund der Abhängigkeit $\frac{dM}{dx} = Q$ ist es leicht, die Lage des Querschnitts mit dem größten Biegemoment zu finden. Wenn der Balken mit Einzellasten belastet ist, so befindet sich $M_{\max}$ offenbar im Querschnitt unter der Last, die das Vorzeichen der Querkraft ändert. Wenn auf dem Balken eine durchgehende Belastung wirkt, so stellen wir die analytische Formel der Querkraft auf, setzen diese gleich Null und ermitteln aus der erhaltenen Gleichung die Abszisse x des gefährdeten Querschnitts. Setzt man alsdann den gefundenen Wert x in die analytische Formel des Biegemoments ein, so erhalten wir $M_{\max}$.

Kehren wir zu dem Beispiel 27 des Kapitels 5.5 (Bild 143) zurück. Der Nullpunkt der Q-Linie ist von uns ermittelt worden. In eben diesem Querschnitt wirkt $M_{\max}$, das wir finden, indem wir $x = \frac{l}{\sqrt{3}}$ in die Formel (5.13) einsetzen:

$$M_{\max} = \frac{q_0 l^2}{9\sqrt{3}} \tag{5.22}$$

Im Beispiel 30 des Abschnitts 5.5 (Bild 146) liegt der gefährdete Querschnitt im linken Abschnitt. Setzt man den Wert (5.16) für die Querkraft im linken Abschnitt gleich Null, also

$$\frac{qa\,(l+b)}{2l} - qx = 0,$$

so erhalten wir

$$x = \frac{a\,(l+b)}{2l}.^{1)}$$

Zur Ermittlung von $M_{\max}$ verbleibt noch, den gefundenen Wert in die Formel (5.16) des Biegemoments einzusetzen.

Die Konstruktion der Q-Linie bietet die Möglichkeit, sofort die Querschnitte zu finden, in denen das Biegemoment den Extremwert erreicht. Bei den prak-

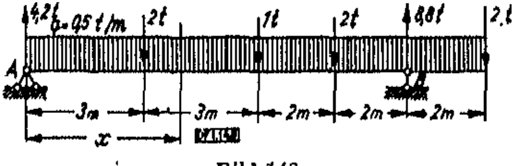


Bild 148

tischen Berechnungen jedoch ist es oft nicht notwendig, die Q-Linien zu konstruieren, und manchmal genügt es, $M_{\max}$ zu ermitteln, wobei man nicht einmal zur Konstruktion der ganzen M-Linie schreitet [z. B. bei der Wahl der Querschnitte von Holzbalken und Stahlträgern. Man kann dann für typisierte Belastungen, wie sie in der Praxis vorkommen, die Berechnung von $M_{\max}$ nach fertigen Formeln durchführen [siehe z. B. die Formeln (5.11), (5.14), (5.15) und (5.22)]. In den übrigen Fällen muß man zuerst die Stelle des gefährdeten Querschnitts ermitteln, und wenn man diese kennt, ist es nicht schwer, $M_{\max}$ zu berechnen.

---

[1]) *Anm. d. deutschen Redaktion:* Man kann auch die Formel folgendermaßen schreiben (indem man $b = l - a$ setzt): $x = \frac{a\,(l+b)}{2l} = \frac{a(2l-a)}{2l} = a\left(1 - \frac{a}{2l}\right) > a$.

In einem solchen Falle kann man fehlerlos den Abschnitt mit dem gefährdeten Querschnitt oder die das Vorzeichen der Querkraft ändernde Last durch eine einfache aufeinanderfolgende Subtraktion aller Lasten streckenweise von der linken Auflagerreaktion aus finden, indem man solange von links nach rechts längs des Balkens vorrückt, bis der Rest sich als negativ erweist, was auf die Änderung des Vorzeichens der Querkraft im jeweiligen Abschnitt oder unter einer gegebenen Last hinweist.

Nehmen wir z. B. an, daß das größte Biegemoment in dem in Bild 148 dargestellten Balken gefunden werden soll, ohne die Linien zu konstruieren. Die Ermittlung der Auflagerreaktionen ergibt für

$$A = 4{,}2\ \text{t} \quad \text{und} \quad B = 8{,}8\ \text{t}.$$

Wir werden die Grenzwerte Q in jedem Abschnitt berechnen, indem wir uns von links nach rechts bewegen:

Die rechte Grenze des I. Abschnitts: $Q = 4{,}2 - 0{,}5 \cdot 3 = 2{,}7$ t.
Die linke Grenze des II. Abschnitts: $Q = 2{,}7 - 2 = 0{,}7$ t.
Die rechte Grenze des II. Abschnitts: $Q = 0{,}7 - 0{,}5 \cdot 3 = -0{,}8$ t.

Dies bedeutet, daß wir M_{max} im II. Abschnitt suchen müssen. Stellen wir für diesen Abschnitt die analytische Formel Q auf:

$$Q_x = 4{,}2 - 2 - 0{,}5\,x = 2{,}2 - 0{,}5\,x.$$

Setzt man den linken Teil gleich Null, so finden wir:

$$x = 4{,}4\ \text{m}$$

Für diesen Wert x ermitteln wir das Biegemoment, das auch das maximale sein wird:

$$M_{max} = 4{,}2 \cdot 4{,}4 - 2 \cdot 1{,}4 - 0{,}5 \cdot \frac{4{,}4^2}{2} = 10{,}84\ \text{tm}.$$

Setzt man die Berechnung der Werte Q an den Abschnittsgrenzen fort, so überzeugen wir uns, daß die Querkraft das Vorzeichen nochmals im Querschnitt über dem rechten Auflager ändert, indem es zum positiven Wert übergeht. Für diesen Querschnitt finden wir (auf Grund der rechten Kräfte), daß

$$M_B = M_{min} = -2 \cdot 2 - 0{,}5 \cdot 2 \cdot 1 = -5\ \text{tm}.$$

5.7 Belastung durch Kräftepaare

A. In Berechnungen kommt es vor, daß man auf eine Belastung durch Kräftepaare (durch Momente) stößt, die eine Biegung des Balkens hervorrufen. So kann z. B. ein Konsolbalken, der am Konsolende durch eine Last P belastet ist (Bild 149, a), durch einen Schnitt $1-1$ über dem Auflager A und durch Entfernung der Konsole auf einen einfachen Balken zurückgeführt werden, wenn man hierbei den Einfluß der Konsole auf den einfachen Balken durch die Kraft P und ein Kräftepaar mit dem Moment $m = -P \cdot a$[1]) (Bild 149, b) ersetzt. Dieses Kräftepaar stellt für den Querschnitt $1-1$ des Konsolbalkens CB das Moment

[1]) Die Kraft P gehört auch zur äußeren Belastung des Balkens AB (Bild 149, b), da sie aber unmittelbar über dem Auflager angreift, so ruft sie keine Biegung des Balkens AB hervor, sondern nur eine im Punkte A gleiche und entgegengesetzte Reaktion.

der linken Kräfte, d. h. das Biegemoment dar. Wenn man aber den Balkenabschnitt AB als selbständigen Balken betrachtet, so kann man das Kräftepaar m als äußere Belastung des Balkens AB ansprechen[1]).

Einen an den zwei Enden starr eingespannten Balken (Bild 150, a) können wir auf den gelenkig gestützten Balken (Bild 150, b) zurückführen, indem wir den Einfluß der starren Einspannung der Enden durch Reaktionsmomente ersetzen, die man als Belastung des Balkens betrachten kann.

Auf ähnliche Weise werden wir im weiteren bei der Untersuchung der durchlaufenden Balken (d. h. der über mehrere Felder durchgehende Balken) vorgehen,

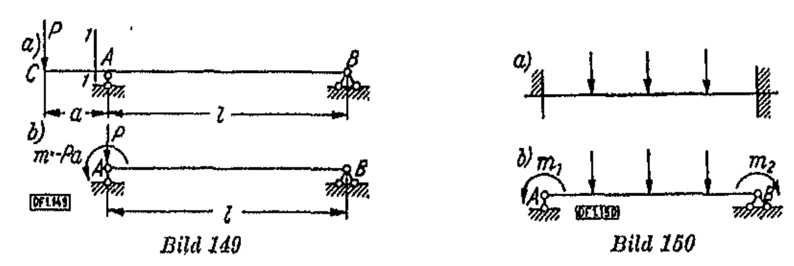


Bild 149 Bild 150

indem wir ein Feld herausschneiden und den Einfluß der benachbarten Felder auf diesen durch Momente und Kräfte ersetzen, die an seinen Auflagern angreifen.

Die analytische Konstruktion der Q- und M-Linien und das Auffinden der gefährdeten Querschnitte im Falle einer Belastung durch Kräftepaare wird auf die gleiche Weise wie in den früher durchgenommenen Beispielen durchgeführt.

Beispiel 31

Ein Balken auf zwei Stützen (Bild 151, a) ist durch ein positives[2]) Moment m belastet, das im Punkt C angreift.

Ermitteln wir die Auflagerreaktionen:

$$A = -\frac{\Sigma M_B}{l} = -\frac{m}{l}; \quad B = \frac{\Sigma M_A}{l} = \frac{m}{l}.$$

Die Auflagerreaktionen bilden ein Kräftepaar, das das angreifende Moment m ins Gleichgewicht bringt. Die Querkraft ist in jedem beliebigen Querschnitt des Balkens negativ und gleich der linken Auflagerreaktion A (da die Projektion des Momentes m auf eine beliebige Achse gleich Null ist). Was das Biegemoment betrifft, so sind seine Ausdrücke im linken und rechten Abschnitt verschieden. Für einen Querschnitt zwischen dem Auflager A und dem Punkt C ist

$$M_x = -Ax = -\frac{mx}{l}. \tag{5.23}$$

Für einen Querschnitt zwischen den Punkten C und B ist

$$M_x = B(l - x) = \frac{m(l - x)}{l}. \tag{5.24}$$

[1]) *Anm. d. deutschen Redaktion:* In der deutschen Literatur wird für ein Kräftepaar oder Moment an Stelle des hier verwendeten m fast ausschließlich M gesetzt.
[2]) *Anm. d. deutschen Redaktion:* „Rechtsdrehend, d. h. im Uhrzeigersinne drehend."

Im Angriffspunkt des Paares m erleidet die Funktion M eine Unterbrechung der Kontinuität, die gleich

$$\frac{m(l-x)}{l} - \left(-\frac{mx}{l}\right) = m \quad \text{ist.}$$

Die M-Linie erhält daher im Querschnitt, in dem das Kräftepaar angreift, eine Stufe, die der Stufe in der Q-Linie im Angriffspunkt einer Einzellast analog ist.

Die Q- und M-Linien sind in Bild 151, b und c dargestellt. Wenn das Moment m in irgendeinem anderen Punkte C_1 (Bild 151, a) des Feldes angebracht wird, so ändern sich die

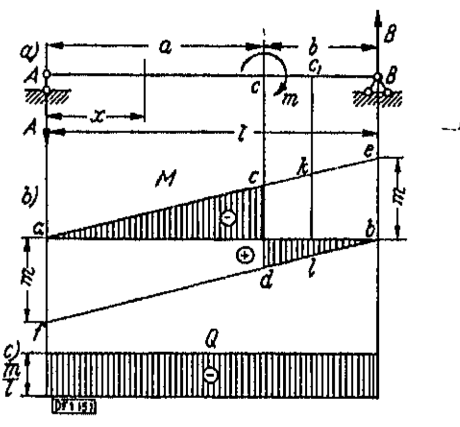


Bild 151

Gleichgewichtsbedingungen des Balkens und folglich auch die Auflagerreaktionen nicht[1]. Die Q-Linie behält ihr Aussehen gemäß Bild 151, b ebenfalls bei. Die Formeln (5.23) und (5.24) des Biegemoments behalten für den linken und rechten Abschnitt ihre Gültigkeit; daher genügt es zur Konstruktion der M-Linie, die verlängerten Geraden ac und bd durch

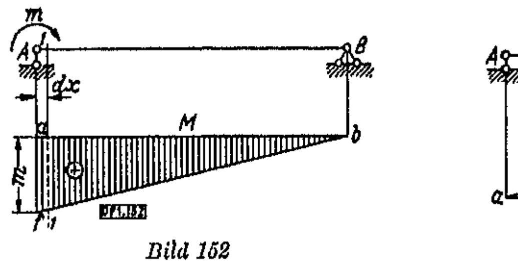


Bild 152

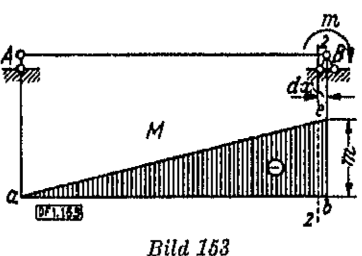


Bild 153

eine vertikale Linie kl zu verbinden, die durch den neuen Angriffspunkt des Momentes m geführt wird (Bild 151, b). Die M-Linie erscheint dann als Linie $aklb$.

Wenn man das Moment m über dem linken Auflager anbringt, so nimmt die M-Linie die Form des Dreiecks afb mit dem positiven Vorzeichen an. Die größte Ordinate ist $af = m$ (Bild 152). Im Falle der Wirkung des Momentes m am rechten Auflager stellt sich

[1]) Aus der Statik ist bekannt, daß man, ohne das Gleichgewicht des Systems zu stören, ein Kräftepaar beliebig in seiner Ebene verschieben kann, da das Moment des Kräftepaares in bezug auf einen beliebigen Punkt der Ebene eine konstante Größe ist.

die M-Linie wieder als Dreieck aeb, jedoch mit negativem Vorzeichen und der größten Ordinate $be = -m$ dar (Bild 153).

Wenn man in Bild 152 und 153 die Richtung des Momentes m in die umgekehrte ändert, so ändern entsprechend beide Linien ihr Vorzeichen in das umgekehrte.

Wir bezeichnen die Biegemomente in den Querschnitten unmittelbar an den Auflagern A und B mit M_A und M_B. Man kann dann feststellen, daß das Biegemoment M_A im Querschnitt $1-1$ am linken Auflager der Größe und dem Vorzeichen nach gleich dem angreifenden (Belastungs-)Moment m ist (Bild 152). Das Biegemoment M_B im Querschnitt $2-2$ am rechten Auflager ist zahlenmäßig dem angreifenden Moment m gleich, aber hinsichtlich des Vorzeichens umgekehrt (Bild 153). Dies wäre auch zu erwarten, da für den Querschnitt $1-1$ das Moment m als Moment der linken Kräfte anzusehen ist, während für den Querschnitt $2-2$ das Moment m das Moment der rechten Kräfte darstellt und es daher bei der Berechnung des Biegemoments M_B mit umgekehrtem Vorzeichen eingesetzt werden muß. In den aufgeführten Fällen ist im Balkenfeld eine Belastung nicht vorhanden. Es ist jedoch nicht schwer zu erkennen, daß bei beliebiger Belastung des Balkens die oben festgestellte Abhängigkeit zwischen M_A, M_B und m gültig bleibt. Für den Querschnitt $1-1$ werden sich die linken Kräfte immer aus dem Moment m, der Auflagerreaktion A und einem unendlich kleinen Abschnitt $q\,dx$ der kontinuierlichen Belastung (wenn sie am Auflager vorhanden ist) zusammensetzen. Das Moment der Reaktion und des Belastungselements $q\,dx$ in bezug auf den Querschnitt $1-1$ ist im Grenzwert = Null. Daher ist $M_A = m$. Die gleichen Überlegungen beziehen sich auf den Querschnitt $2-2$ für die rechten Kräfte. Bezeichnet man die am linken und rechten Auflager angreifenden Momente mit m_1 und m_2, so schreiben wir die festgestellten Abhängigkeiten in folgender Form auf:

$$\left.\begin{aligned} M_A &= m_1, \\ M_B &= -m_2. \end{aligned}\right\} \tag{5,25}$$

Die Biegemomente M_A und M_B in den Querschnitten an den Auflagern nennt man kürzer *Stütz-* oder *Auflagermomente*.

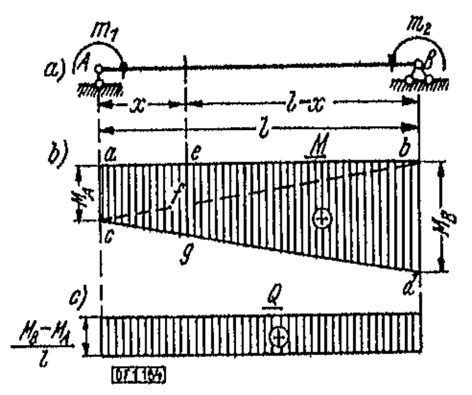


Bild 154

Beispiel 32

An den Enden eines Balkens auf zwei Stützen sind die Kräftepaare m_1 und m_2 angebracht, deren Richtung auf Bild 154, a gezeigt ist. In diesem Falle werden beide Stützmomente M_A und M_B auf Grund der Abhängigkeiten (5,25) positiv sein. Zur Konstruktion der M-Linie genügt es, die Ordinaten $M_A = m_1$ und $M_B = m_2$ abzutragen und ihre Enden durch die Gerade cd (Bild 154, b) zu verbinden, da eine Belastung im Balkenfeld nicht vorhanden ist.

Stellen wir nun den Ausdruck M_x für einen beliebigen Querschnitt des Balkens auf. Betrachtet man die trapezförmige M-Linie als die Addition zweier dreieckförmiger Flächen abc und bcd, die durch die Wirkung der einzeln angreifenden Momente m_1 und m_2 hervorgerufen wurden, so errechnen wir die Ordinate $eg = M_x$ als Summe der Ordinaten $ef + fg$.

Aus der Ähnlichkeit der Dreiecke erhalten wir:

$$ef = M_A \frac{l - x}{l}; \quad fg = M_B \frac{x}{l}.$$

Daher ist

$$M_x = M_A \frac{l - x}{l} + M_B \frac{x}{l}. \tag{5.26}$$

Durch Differenzieren erhalten wir die Querkraft:

$$Q_x = \frac{dM_x}{dx} = \frac{M_B - M_A}{l} = \text{const.} \tag{5.27}$$

B. Nehmen wir an, daß auf die obere Fläche des Balkens eine kontinuierliche Belastung p (Bild 155, a) wirkt, deren Richtung mit der x-Achse den Winkel α

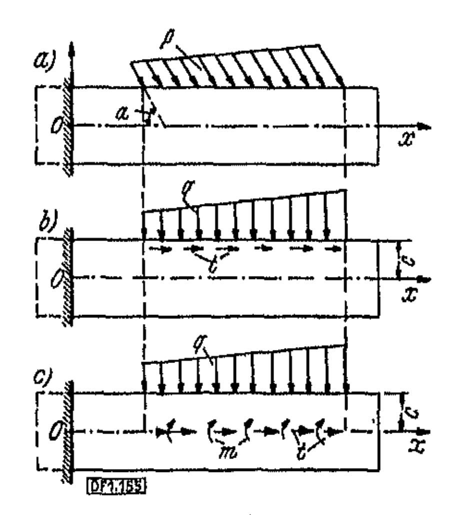


Bild 155

einschließt. Zerlegen wir die Belastung p in die Komponenten q und t, von denen die erste senkrecht und die zweite parallel zur x-Achse gerichtet ist (Bild 155, b):

$$q = p \sin\alpha; \quad t = p \cos\alpha.$$

Da wir es bereits verstehen, mit der Querbelastung q zu operieren, so untersuchen wir, wie die tangentiale Belastung t das Biegemoment im Balkenquerschnitt beeinflußt[1]).

---

[1]) Auf Bild 155, b ist die Tangentialbelastung t ein wenig unter der Balkenfläche dargestellt, um die Zeichnung nicht undeutlich zu machen.

Hierzu übertragen wir sie parallel auf die Balkenachse Ox (Bild 155, c). Bei der Übertragung ist es notwendig, *ein über die ganze Länge des Balkens verteiltes Moment hinzuzufügen*[1]).

In irgendeinem kleinen Streckenabschnitt dx des Balkens wird die Tangentialkraft an der oberen Fläche $t\,dx$ sein. Überträgt man diese Kraft auf die x-Achse, so müssen wir das Moment $dM = t\,dx\,c$ hinzufügen, worin c der Abstand von der oberen Fläche bis zur Balkenachse ist. Die Größe des Moments (bezogen auf die Längeneinheit des Balkens) wird wie folgt gefunden:

$$m = \left(\frac{dM}{dx}\right) = tc = pc\cos\alpha .$$

Das Moment hat hier die Dimension $\left(\frac{\text{Kraft} \times \text{Länge}}{\text{Länge}}\right)$, d. h. die Dimension der Kraft.

Auf diese Weise kann man die geneigte Belastung p auf eine Querbelastung q, eine Längsbelastung t, die längs der Achse des Balkens wirkt, und auf ein verteiltes Moment m zurückführen. Die Längsbelastung t ruft eine horizontale Komponente der Auflagerreaktion und einen Zug oder Druck des Balkens hervor. Folglich ergibt sich in den Balkenquerschnitten außer M und Q noch eine Längskraft N. Suchen wir für diesen Fall die Differentialabhängigkeiten zwischen

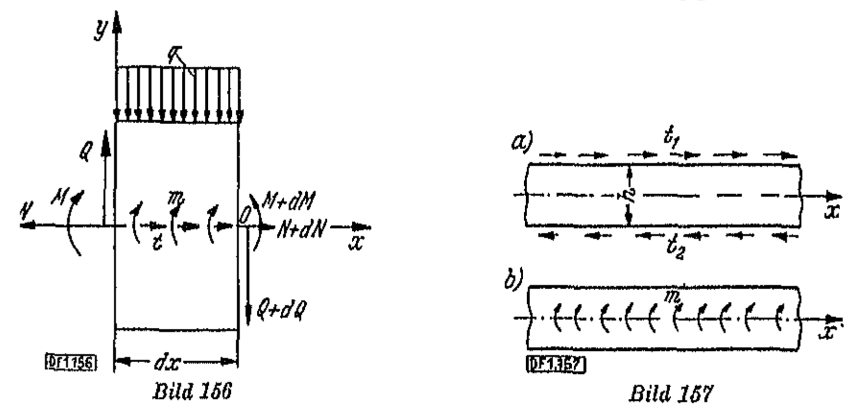
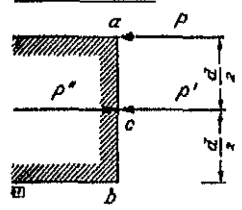


Bild 156 *Bild 157*

M, Q, N und den Belastungsgrößen q, t und m. Dazu schneiden wir ein Balkenelement von der Länge dx mit den angebrachten Belastungen heraus und ersetzen die Wirkung des entfernten linken Teils durch die Kräfte M, Q und N



[1]) *Anm. d. deutschen Redaktion:* Eine solche Parallelverschiebung einer Kraft in eine neue gewünschte Lage wird bei statischen Untersuchungen oftmals angewendet, so daß es angebracht erscheint, etwas näher darauf einzugehen. Es werde — entsprechend der hier vorliegenden Untersuchung — ein Stabquerschnitt ab außermittig durch eine Kraft P beansprucht, die im Querschnittspunkt a angreifen möge. Um die Beanspruchung des Stabquerschnittes beurteilen zu können, wird es notwendig, die Kraft P in eine andere ausgezeichnete Lage zu bringen, ohne dabei die ursprüngliche Wirkung der Kraft P auf den zu untersuchenden Querschnitt zu verändern. Die neue ausgezeichnete Lage sei z. B. die Achslage (Punkt c). Man bringt nunmehr in c zwei gleichgroße entgegengesetzt wirkende Kräfte $P' = P'' = P$ an. Mit dieser einfachen Operation hat man die Wirkung der im Punkt a angreifenden Kraft P zerlegt in 1. eine normal zum Querschnitt wirkende Axialkraft $P' = P$ und 2. ein Kräftepaar (Moment) aus den Kräften P und $P'' = P$ mit dem Hebelarm $\frac{d}{2}$.

und die Wirkung des rechten Teils durch die Kräfte $M + dM$, $Q + dQ$ und $N + dN$ (Bild 156). Projiziert man alle Kräfte auf die Achsen x und y und bildet man das Moment für den Schwerpunkt O des rechten Querschnitts[1]), so erhalten wir:

$$\sum X = -N + (N + dN) + t\,dx = 0,$$
$$\sum Y = Q - (Q + dQ) - q\,dx = 0,$$
$$\sum M_0 = M - (M + dM) + Q\,dx + m\,dx = 0.$$

Hieraus finden wir:

$$\frac{dN}{dx} = -t, \tag{5.28}$$

$$\frac{dQ}{dx} = -q, \tag{5.29}$$

$$\frac{dM}{dx} = Q + m. \tag{5.30}$$

Die Abhängigkeit zwischen der Querkraft und der Größe der Querbelastung q hat sich, wie wir sehen, nicht geändert. Die gleiche Form hat die Abhängigkeit zwischen der Längskraft N und der Größe der Längsbelastung. Das Vorhandensein eines verteilten Moments führt lediglich eine Korrektur in die Differentialabhängigkeit zwischen M und Q ein:

$$Q = \frac{dM}{dx} - m. \tag{5.31}$$

Wenn an der oberen und unteren Fläche des Balkens entgegengesetzt gerichtete Tangentialbelastungen t_1 und t_2 wirken, wobei in einem beliebigen Querschnitt des Balkens $t_1 = -t_2$ ist, so erhalten wir bei der Übertragung der Belastungen auf die Balkenachse das verteilte Moment $m = t_1 h = t_2 h$, worin h die Höhe des Balkens ist (Bild 157, a und b). Die Längsbelastung t ist in diesem Falle gleich Null. Wenn außerdem $t_1 = -t_2 = \text{const}$ ist, so wird das Moment m gleichmäßig verteilt sein.

Beispiel 33

Es sind die M- und Q-Linien für einen Balken auf zwei Stützen zu konstruieren, der auf der linken Hälfte des Feldes mit einem gleichmäßig verteilten Moment m belastet ist (Bild 158, a).

Die Auflagerreaktionen sind: $A = -\dfrac{\Sigma M_B}{l} = -\dfrac{m\,\frac{l}{2}}{l} = -\dfrac{m}{2}$; $B = \dfrac{m}{2}$.

Für einen beliebigen Querschnitt im linken Abschnitt haben wir:

$$M_x = -\frac{m}{2}x + mx = \frac{mx}{2}$$

Die Querkraft finden wir gemäß der Abhängigkeit (5.31):

$$Q_x = \frac{d\left(\frac{mx}{2}\right)}{dx} - m = -\frac{m}{2}.$$

[1]) Das Moment infolge der Belastung q wird nicht berücksichtigt (siehe Seite 153).

eichen Wert Q_x kann man leicht unmittelbar aus der Zeichnung erhalten. Für die Feldes $\left(x = \frac{l}{2}\right)$ ist

$$M_{max} = \frac{ml}{4}.$$

nen Querschnitt im rechten Abschnitt finden wir (indem wir wie früher die linken ›trachten) für

$$M_x = -\frac{m}{2}x + \frac{ml}{2}.$$

uerkraft wird hier auf Grund der gewöhnlichen Abhängigkeit (5.21) ermittelt, $\frac{dM}{dx}$, da im rechten Abschnitt eine Belastung mit verteiltem Moment nicht n ist. Die Linien sind in Bild 158, b und c dargestellt.

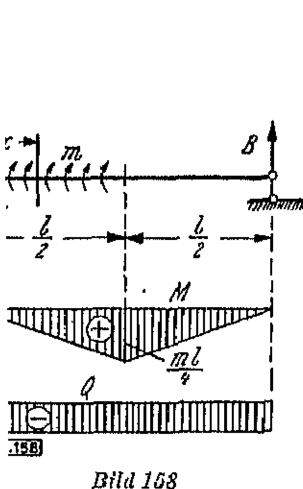


Bild 158

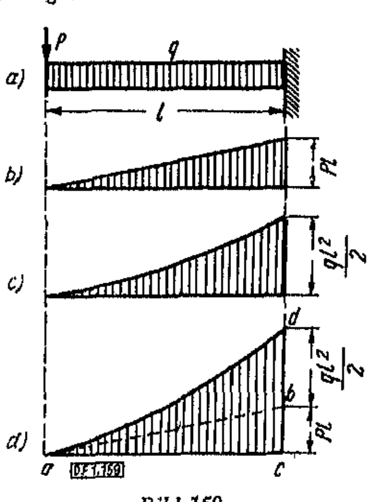


Bild 159

›nstruktion der Kennlinien durch Addition der Kräftewirkungen

i einer zusammengesetzten Belastung des Balkens ist es für die Kon- ı der M- und Q-Linien manchmal zweckmäßig, das Prinzip der Addition tewirkungen[1]) anzuwenden. Zu diesem Zwecke muß man die Belastung Bestandteile zerlegen, für die die M- und Q-Linien bekannt sind oder ıstruiert werden können. Hierauf ist es nicht schwierig, die resultierenden Ɔ-Linien durch einfache graphische Addition der für die einzelnen Teile ıtung konstruierten Linien zu erhalten.

n wir z. B. an, daß für einen Kragbalken, der mit einer Gleichstrecken- d einer Kraft P am freien Ende belastet ist, die M-Linie konstruiert ɔll (Bild 159, a). Die M-Linien infolge der Kraft P und der Belastung q eln bekannt (siehe die Beispiele 24 und 25 des Kapitels 5.5) und auf ern 159, b und c dargestellt. Die Addition der Linien führen wir auf

[1]) d. deutschen Redaktion: Auch genannt: Superpositionsgesetz. (Es gilt allgemein!)

folgende Weise durch: Nachdem wir die dreieckförmige Momentenlinie a infolge der Kraft P konstruiert haben (Bild 159, d), übertragen wir vertik die Parabelordinaten von Bild 159, c auf das Bild 159, d, indem wir sie nunmel von der Linie ab als Bezugsachse nach oben abtragen.

Betrachten wir ein anderes Beispiel, und zwar einen einfachen Balken, d mit einer Gleichstreckenlast q und einem Einzelmoment m am linken Ende b lastet ist. Die M-Linien infolge der Einzelwirkung des Kräftepaares m und d Belastung q sind in den Bildern 160, b und c dargestellt.

Hier haben die Kennlinien im Gegensatz zu dem vorherigen Beispiel ve schiedene Vorzeichen. Für die graphische Addition müssen hier beide Linie

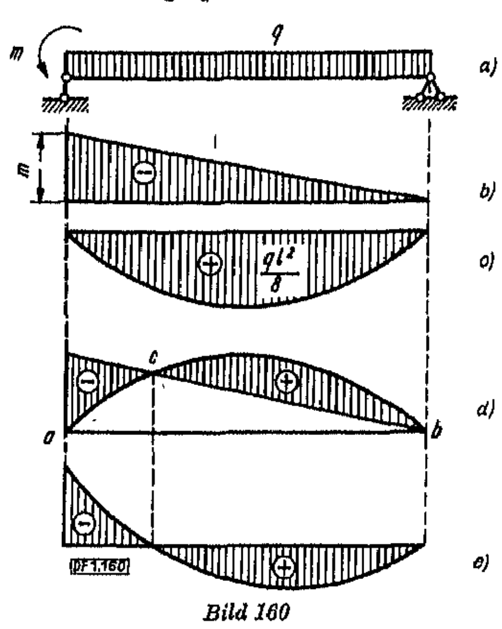


Bild 160

von derselben Achse ab (Bild 160, d) nach oben abgetragen werden. Durch ihr Überlagerung heben sich die Kennlinien auf der Fläche acb gegenseitig auf Als resultierende Fläche verbleibt die in Bild 160, d schraffierte Form. Trägt mai dann die Ordinaten von einer neuen horizontalen Achse ab, so erhalten wir eine ausgerichtete M-Linie, die anschaulicher und für den Gebrauch zweckmäßige ist (Bild 160, e).

B. Die Konstruktion der Kennlinien mit Hilfe der Überlagerungsmethode er weist sich als besonders geeignet für den Fall der Anwendung bei einem einfacher Balken, der mit Momenten an den Auflagern und einer beliebigen Belastung zwischen den Stützen belastet ist. Die Berechnung der statisch unbestimmter Balken wird, wie wir später sehen werden, hauptsächlich auf diesen Fall zurückgeführt. Daher wollen wir uns mit diesem Fall eingehender befassen. Es sollen die M- und Q-Linien für den in Bild 161, a dargestellten Balken konstruiert werden. Zunächst konstruieren wir auf die übliche Weise die M^0-Linie infolge

Belastung zwischen den Stützen (Bild 161, b). Ferner zeichnen wir die Linie
lge der Wirkung der Momente m_1 und m_2. Hierzu tragen wir an den Auf-
ern die Ordinaten $M_A = -m_1$ und $M_B = -m_2$ ab und verbinden ihre Enden
ch die Gerade ab (Bild 161, c). Wir wollen die Gerade ab die Stützmomenten-
e nennen. Für die in Bild 161, a angenommene Richtung der Momente m_1
m_2 ist die durch ihre Wirkung sich ergebende M-Linie negativ und daher
h oben abgetragen:

ie resultierende M-Linie konstruieren wir auf folgende Weise:

Vir übertragen vertikal die Ordinaten der M^0-Linie von dem Bild 161, b auf
Bild 161, c und tragen sie von der Stützmomentenlinie als Bezugsachse

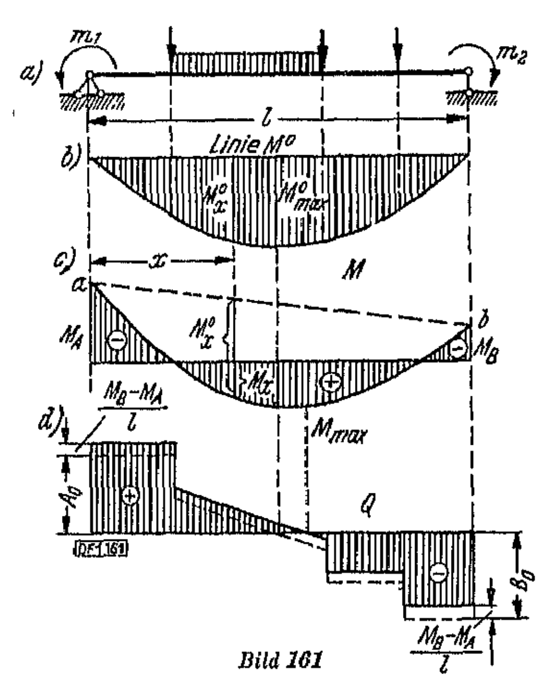


Bild 161

kal nach unten ab. Auf diese Weise erhalten wir sofort die in Bild 161, c
ffiert angelegte Momentenfläche. Wir merken uns, daß bei einer solchen
tragung die M^0-Linie eine verzerrte Form erhält (sie stellt sich schräg). Ihr
ieninhalt jedoch und die Abszisse des Schwerpunkts bleiben unverändert.
nalytische Formel des Biegemoments M_x in einem beliebigen Querschnitt
ten wir als algebraische Summe des Biegemoments infolge der Belastung
hen den Stützen, das wir mit M_x^0 bezeichnen, und des Biegemoments in-
der Wirkung der Paare m_1 und m_2, das durch die Formel (5.26) ausgedrückt
Auf diese Weise wird

$$M_x = M_x^0 + M_A \frac{l - x}{l} + M_B \frac{x}{l}. \qquad (5.32)^{1)}$$

[1] s wird empfohlen, die Formeln (5.32) und (5.33) im Gedächtnis zu behalten, da sie bei der Be-
ng statisch unbestimmter Balken oft angewendet werden.

Auf ähnliche Weise stellen wir die Formeln für die Querkraft auf, indem wi mit Q_x^0 die Querkraft infolge der Belastung zwischen den Stützen bezeichne und die Formel (5.27) benutzen:

$$Q_x = Q_x^0 + \frac{M_B - M_A}{l}. \tag{5.33}$$

Die resultierende Q-Linie ist in Bild 161, d dargestellt. Hier ist auch die Q_x^0-Linie infolge der Belastung zwischen den Stützen punktiert eingetragen. Da im betrachteten Beispiel $M_A < 0$, $M_B < 0$ und $|M_A| > |M_B|$ ist, so wird das konstante Glied $\frac{M_B - M_A}{l}$ in der Formel (5.33) positiv sein. Dies bedeutet, daß es bei der Konstruktion der resultierenden Q-Linie nur nötig ist, die Linie infolge der Feldbelastung zu sich selbst parallel um die Strecke $\frac{M_B - M_A}{l}$ nach oben zu übertragen, was auch in Bild 161, d durchgeführt ist. Schreiben wir noch die Formeln für die Auflagerreaktionen auf. Man bezeichnet mit A^0 und B^0 die Auflagerreaktionen infolge der Belastung zwischen den Stützen. Infolge der Wirkung der Momente an den Auflagern ist die Querkraft Q_m konstant, und daher erhalten die Auflagerreaktionen auf Grund der Abhängigkeiten (5.18) und (5.27) folgende Werte:

$$A = A^0 + \frac{M_B - M_A}{l}; \quad B = B^0 - \frac{M_B - M_A}{l}. \tag{5.34}$$

Aus den Formeln (5.34) ersieht man, daß sich die rechte Auflagerreaktion B um das gleiche Maß verringert oder vergrößert, wie sich die linke Auflagerreaktion A unter der Wirkung der an beiden Auflagern angreifenden Momente gleichzeitig (umgekehrt) vergrößert oder verringert.

Die Summe der Auflagerreaktionen bleibt also unverändert und ist gleich der Summe der Belastungen. Dies bedeutet, daß der Einfluß der an den Auflagern angreifenden Momente nur in einer Neuverteilung der Auflagerdrücke des Balkens zum Ausdruck kommt. Es ist nicht schwer zu erkennen, daß sich die Auflagerreaktion vergrößert, wenn das Biegemoment im Querschnitt am Auflager negativ ist, und folglich das am Auflager angreifende Moment bestrebt ist, den Balken mit einer Wölbung nach oben durchzubiegen. Hierbei wird das gegenüberliegende Auflager entlastet. Die Formeln (5.32), (5.33) und (5.34), die in diesem Kapitel abgeleitet wurden, nennen wir die allgemeinen Formeln für M, Q und die Auflagerreaktionen eines einfachen Balkens, da sie für jede beliebige Belastung zwischen den Stützen und für jede beliebige Größe der Auflagermomente brauchbar sind.

5.9 Graphische Konstruktion von Biegemomenten- und Querkraftlinien

A. Nehmen wir an, daß ein System von parallelen Kräften gegeben ist, die in einer Ebene liegen, und das Moment dieses Systems um den Punkt C ermittelt werden soll (Bild 162, a). Wir zeichnen für dieses System ein Kräftepolygon oder einen Kräfteplan (Bild 162, b). In unserem Beispiel nimmt er die Form einer Geraden AB an, die im gewählten Kräftemaßstab die Größe und Richtung der

Resultierenden R des Systems bestimmt. Wählen wir den Pol in einem beliebigen Punkt O und zeichnen, nachdem wir die Seilstrahlen 1, ..., 5 gezogen haben, ein Seilpolygon für die Kräfte des Systems. Der Schnittpunkt E seiner äußersten Seilzüge I und V bestimmt die Lage der Resultierenden im Kräftefeld (Lageplan). Durch einen beliebigen Punkt C ziehen wir parallel zur Resultierenden die Gerade KL, deren Strecke DF zwischen den verlängerten äußersten Seilzügen des Seilpolygons das Moment des Kräftesystems um den Punkt C bestimmt. Zur Beweisführung betrachten wir die Ähnlichkeit der Dreiecke EDL und ABO, deren entsprechende Seiten parallel sind. Aus der Ähnlichkeit der Dreiecke erhalten wir:

$$\frac{DL}{AB} = \frac{d}{H} \quad \text{oder} \quad \frac{y}{R} = \frac{d}{H}. \tag{5.35}$$

Bild 162

Der Abstand H des Pols O bis zur Resultierenden AB heißt der *Polabstand* des Kräfteplans. Aus (5.35) ergibt sich

$$yH = Rd, \tag{5.36}$$

worin d der Hebelarm der Resultierenden des Kräftesystems in bezug auf den Punkt C ist. Das Produkt Rd ist zahlenmäßig gleich dem Moment der Resultierenden oder dem Moment des Kräftesystems $P_1, \ldots, P_4$ um den Punkt C, d. h.:

Das Moment des Kräftesystems um einen beliebigen Punkt C ist zahlenmäßig gleich dem Produkt des Polabstandes H und der Strecke y, die von den äußersten Seilzügen des Seilpolygons oder von ihren Verlängerungen auf einer Geraden, die parallel zur Resultierenden durch den Punkt C geführt ist, abgegrenzt wird.

In der Formel (5.36) interessiert uns nur der zahlenmäßige Wert der Gleichung, da wir für die Werte H und y irgendeine Vorzeichenregel nicht geben, während

wir dem Moment, das auf der rechten Seite dieser Gleichung steht, ein Vorzeichen zuschreiben. Hierbei muß selbstverständlich H im Maßstab der Kräfte und y im Maßstab der Längen gemessen werden, da in Bild 162, a (das Kräftefeld) alle Linien im Längenmaßstab und in Bild 162, b alle Linien im Kräftemaßstab gemessen werden. Das Vorzeichen des Moments wird leicht nach der Drehrichtung der Resultierenden um den Punkt C bestimmt. Wenn das Moment der links vom Punkt C gelegenen Kräfte $P_1, \ldots, P_3$ ermittelt werden sollte, so müßte man das Produkt Hy_1 nehmen, worin y_1 die Strecke zwischen den Seilzügen I und IV des Seilpolygons ist, die die äußersten Seilzüge für die linken Kräfte $P_1, \ldots, P_3$ darstellen.

Wenden wir den bewiesenen Lehrsatz für die Konstruktion der M- und Q-Linien an einem mit Einzellasten $P_1, \ldots, P_4$ belasteten Kragbalken an (Bild 163, a). Hierbei wählen wir den Pol so, daß der erste Strahl des Kräftepolygons horizontal

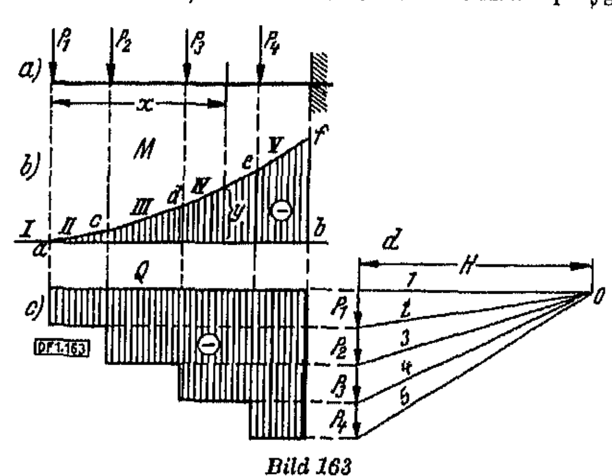


Bild 163

liegt. Dann stellt das Seilpolygon *acdef* (Bild 163, b) die M-Linie dar, bei der die Verlängerung des ersten Seilzuges des Seilpolygons als Abszissenachse dient. Für einen beliebigen Querschnitt x bestimmt die entsprechende Ordinate y des Seilpolygons multipliziert mit dem Polabstand H entsprechend dem weiter oben bewiesenen Lehrsatz die Summe der Momente der linken Kräfte, d. h. das Biegemoment. Für die Konstruktion der Q-Linie ist es nur nötig, die Kräfte $P_1, \ldots, P_4$ auf die entsprechenden Vertikalen horizontal von dem Bild 163, d auf das Bild 163, c zu übertragen.

Im Falle eines einfachen Balkens erhält man die M-Linie gleichzeitig mit der graphischen Ermittlung der Auflagerreaktionen.

Zeichnen wir für ein System von Einzelkräften, die den Balken (Bild 164, a) belasten, ein Kräfte- und Seilpolygon (Bild 164, b und d). Da die Kräfte $P_1, \ldots, P_4$ zusammen mit den Auflagerreaktionen A und B ein im Gleichgewicht befindliches System bilden, so muß das Seilpolygon sich schließen. Verlängern wir die äußersten Seilzüge I und V bis zum Schnitt mit den durch die Auflager gehenden Vertikalen und zeichnen wir den das Seilpolygon schließenden Seilzug VI ein.

Im Kräfteplan ziehen wir parallel zum schließenden Seilzug den Seilstrahl 6, der die Summe der Kräfte in zwei Teile zerlegt, die den Auflagerreaktionen A und B, die das Kräftepolygon schließen, entsprechend gleich sind. Das Biegemoment in einem beliebigen Querschnitt x wird durch die Ordinate y des Seilpolygons multipliziert mit dem Polabstand H bestimmt. Hierbei müssen die Ordinaten vertikal von dem schließenden Seilzug VI[1]) des Seilpolygons abgelesen werden, das folglich in gewissem Maßstabe die M-Linie (mit um das H-fache verkleinerten Ordinaten) darstellt. Für die Kräfte A und P_1, die links vom Querschnitt gelegen sind, erscheinen tatsächlich als äußerste Seilzüge, die Seilzüge II und VI des Seilpolygons. Durch den Schnittpunkt e ihrer Richtungen muß die Resultierende der linken Kräfte, d. h. die Querkraft Q_x, durchgehen.

Betrachtet man die Ähnlichkeit des Dreiecks cde und des von den Strahlen 2 und 6 auf dem Kräfteplan eingeschlossenen Dreiecks, so kann man einfach, wie auch im vorherigen Abschnitt, die Gleichung $M_x = yH$ beweisen. Die Quer-

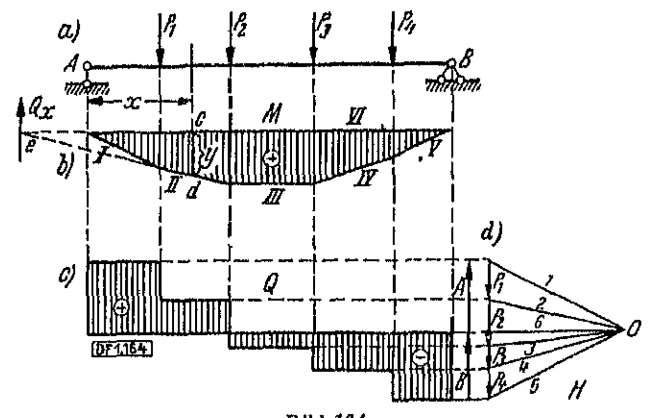


Bild 164

kraftlinie wird nach der in der vorhergehenden Aufgabe gezeigten Methode konstruiert (Bild 163, c). Die M-Linie (Bild 164, b) kann man richten, indem man die entsprechenden Ordinaten vertikal überträgt und von einer neuen horizontalen Achse abträgt. Zu diesem Zwecke kann man, nachdem man analytisch die Auflagerreaktionen bestimmt hat, vorher den Strahl 6 horizontal ziehen und auf ihm den Pol 0 wählen (Bild 164, d). Dann wird die Schlußlinie VI des Seilpolygons, die parallel dem Strahl 6 ist und als Abszissenachse der M-Linie dient, horizontal sein.

B. Zur Bestimmung des Biegemoments müssen wir die Ordinate y mit dem Längenmaßstab messen und den erhaltenen Wert mit der Zahl, die die Strecke H im Kräftemaßstab ausdrückt, multiplizieren. Bequemer ist es allerdings, gleich den Maßstab der konstruierten M-Linie zu berechnen.

Nehmen wir an, daß z. B. der Längenmaßstab, in dem der Balken dargestellt ist, gleich $^1/_{50}$ der natürlichen Größe ist oder 1 cm ≙ 0,5 m entspricht, als Polabstand eine Strecke von 5 cm gewählt ist und 1 cm im Kräftemaßstab gleich 1 t

[1]) *Anm. d. deutschen Redaktion:* Sog. Schlußlinie.

ist. In diesem Falle ist $H = 5$ t (im Kräftemaßstab). Die Ordinate y, die gleich 1 cm ist, drückt im Längenmaßstab 0,5 m aus. Wenn wir diese mit dem Polabstand multiplizieren, so erhalten wir das Moment $0{,}5 \cdot 5 = 2{,}5$ tm. Dies bedeutet, daß der Maßstab der M-Linie 1 cm gleich 2,5 tm ist.

Wenn ganz allgemein 1 cm im Längenmaßstab a m entspricht und der Polabstand im Kräftemaßstab b t (oder kg) beträgt, so ist 1 cm im Momentenmaßstab $a \cdot b$ tm (oder kgm). Benutzt man diese Beziehung, so kann man den Polabstand so wählen, daß sich die Ordinaten M im vorher aufgegebenen Maßstab ergeben.

C. Wenn auf den Balken eine kontinuierliche Belastung wirkt, so kann man die M-Linie näherungsweise konstruieren, indem man die Belastung durch vertikale Ordinaten in Streifen lotrecht zur Balkenachse aufteilt und jeden Streifen durch eine resultierende Einzellast ersetzt. Jede Kraft entspricht dem entsprechenden Streifen der Belastungsfläche und geht durch ihren Schwerpunkt. Hierbei muß man die gekrümmte Belastungslinie in jedem Streifenabschnitt polygonal ausrichten. Auf diese Weise ist die Konstruktion der M-Linie auf

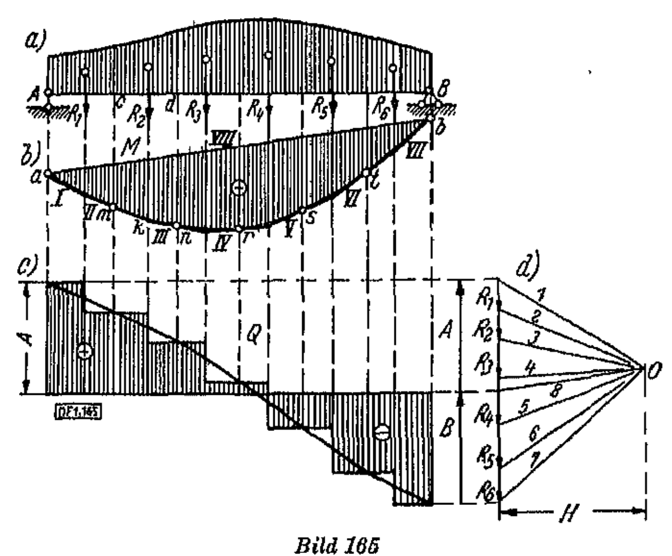


Bild 165

Bild 165, b durchgeführt. Das erhaltene Polygon umreißt nur angenähert die M-Linie. Bei unendlich vielen Streifen, in die die Belastung aufgeteilt wird, geht das Seilpolygon schließlich in eine Seillinie über, die die richtigen Umrisse der M-Linie angibt. Praktisch erhält man die Seillinie, indem man sie mittels eines Kurvenlineals in das Polygon einzeichnet, wobei deren Berührungspunkte mit den Seilzügen des Polygons sich genau unter den Grenzlinien zwischen den Streifen befinden sollen, in die die durchgehende Belastung aufgeteilt ist. Durch eben diese Punkte muß man die Kurve zeichnen. Die Q-Linie ergibt sich in Form einer Stufenlinie, was bekanntlich bei einer durchgehenden Belastung nicht zutreffen und nur als sehr grobe Annäherung angesehen werden kann (Bild 165, c). Zur Erreichung eines genaueren Ergebnisses muß man die Schnittpunkte der

orizontalen Stufen mit den Vertikalen, die die Belastung in Streifen unterteilen, urch eine zügige Kurve verbinden.

Die Bestimmung der Auflagerdrücke ist auf Bild 165, d durch das Einzeichnen nes parallel zur Schlußlinie des Seilpolygons gerichteten Strahls 8 durchgeführt. ie Ergebnisgenauigkeit der Aufgabe hängt vom Maßstab und der Sorgfältigkeit es Zeichnens ab. In dem größten Teil der Fälle ergibt die graphische Methode ne völlig ausreichende Genauigkeit und ist bei komplizierten Umrissen der elastungslinie, die sich nicht in eine analytische Formel zwingen lassen, unsetzbar.

Oben ist erwähnt worden, daß die Ordinaten der Seillinie und des Seilpolygons nter den Begrenzungslinien zwischen den Abschnitten der Belastungsfläche, o die Seilzüge des Polygons die Seillinie tangieren, zusammenfallen. Beweisen ann man dies durch folgende Überlegung. Nehmen wir an, daß die Seillinie ereits konstruiert ist. Wählen wir irgendeinen Belastungsabschnitt auf ild 165, a, z. B. cd, und ziehen wir Tangenten durch die Punkte m und n der eillinie, die unter den Grenzlinien des Abschnitts liegen. Wenn wir den Abhnitt cd in eine unendlich große Anzahl von schmalen Abschnitten unterteilen nd durch resultierende Teilkräfte ersetzen würden, so würden die gezeichneten angenten die äußersten Seilzüge des Seilpolygons darstellen, das für alle Teilsten des Abschnitts cd konstruiert wurde. Dies bedeutet, daß der Schnittunkt k der Tangenten auf der Wirkungslinie der resultierenden Belastung R_2 es Abschnitts cd liegen muß. Zieht man Tangenten durch die übrigen Punkte a, s, t und b, die unter den Grenzlinien der Abschnitte liegen, so ergibt sich ein ystem von Tangenten, das einen gebrochenen Linienzug mit den Scheitelunkten unter den Kräften R_1, R_2, ..., R_6 bildet und folglich mit dem gezeichneten eilpolygon I—VII zusammenfällt.

6 Biegung des geraden Balkens. Spannungen

6.01 Reine Biegung

A. Das Wesen der Biegungserscheinung eines geraden Balkens besteht darin, wie dies im Kapitel 5.1 erwähnt wurde, daß die anfangs gerade Balkenachse sich krümmt. Mit der Krümmung der Achse ist eine Krümmung und Längenänderung der Balkenlängsfasern verbunden.

Den ersten Versuch, eine Biegetheorie aufzubauen, hat *Galilei* (im Jahre 1638) unternommen, jedoch fand diese Theorie erst im Jahre 1773 durch die Arbeiten *Coulombs* ihre Vollendung. Die Theorie der Schubspannungen bei der Biegung ist erstmalig von dem russischen Ingenieur *D. J. Shurawski* im Jahre 1855 für einen Balken mit rechteckigem Querschnitt behandelt worden[1]. Die Ableitungen der elementaren Theorie der Querbiegung wurden durch die Arbeiten von *Navier* (im Jahre 1824) und insbesondere von *Saint-Venant* (im Jahre 1856) mit Hilfe genauer Methoden der Elastizitätstheorie bestätigt.

Indem wir zur Untersuchung der Spannungen übergehen, wählen wir zunächst einen Balkenabschnitt, in dem die Querkraft $Q = \frac{dM}{dx} = 0$ und folglich das Biegungsmoment $M = \text{const}$ ist.

Ein solcher Spannungszustand heißt, wie oben erwähnt (Kapitel 5.5, Beispiel 29), *reine Biegung*. Auf Grund der Ausführungen im Kapitel 5.5 kann man, da die Querkraft gleich Null ist, folgern, daß bei der reinen Biegung in den Querschnitten des Balkens nur Normalspannungen wirken[2]. Wir betrachten hierbei einen Balken, dessen Querschnitt über die ganze Länge konstant ist. Außerdem schränken wir die Aufgabe zunächst durch die Bedingung ein, daß der Querschnitt des Balkens in bezug auf die Wirkungsebene der Belastung symmetrisch ist, was für den größten Teil der Fälle in der Praxis auch zutrifft. Wir führen einen Schnitt im Abschnitt der reinen Biegung und wählen das gleiche Rechtsschraubensystem der Koordinatenachsen wie im Kapitel 5.4, indem wir die Ebene xy mit der Wirkungsebene der äußeren Kräfte zusammenfallen lassen (Bild 166). Hierbei ordnen wir den Koordinatenanfang in einem beliebigen Punkt O der y-Achse an, die bedingungsgemäß die Symmetrieachse des Querschnitts ist.

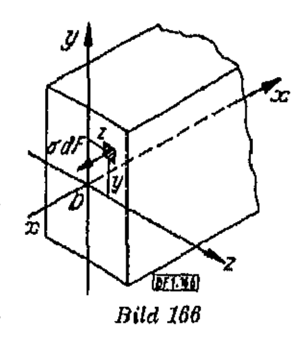


Bild 166

[1] Coulomb hat darauf hingewiesen, daß die Resultierende der Tangentialkräfte im Querschnitt gleich der Querkraft sein muß. Er fand jedoch nicht das Gesetz der Verteilung der Schubspannungen über den Querschnitt.

[2] Diese Folgerung besteht durchaus zu Recht, wenn in dem gegebenen Abschnitt $M = \text{const}$ ist. Bei einer Belastung mit einem verteilten Moment kann man auf Grund dessen, daß die Querkraft gleich Null ist, nicht auf das Fehlen der Schubspannungen im Querschnitt schließen. In diesem Falle bilden die Tangentialkräfte ein im Gleichgewicht befindliches System (siehe unten Kapitel 6.06).

Der Einfluß des entfernten rechten Balkenteils auf ein beliebiges elementares 'lächenelement dF des Querschnitts kommt durch die elementare Normalkraft dF zum Ausdruck, worin σ die Normalspannung am abgegrenzten Flächen-lement ist. Da das Kräftesystem $\sigma\,dF$ den linken äußeren Kräften äquivalent it, so müssen alle sechs nach den Koordinatenachsen orientierten Werte den ntsprechenden Werten der äußeren Kräfte entsprechend gleich sein.

Bei einer reinen Biegung werden die linken äußeren Kräfte nur auf ein in er Ebene xy wirkendes Kräftepaar zurückgeführt und folglich nur durch eine 3edingung $\sum M_z = M$, wo M das Biegemoment ist, bestimmt.

Die übrigen fünf nach Achsenrichtungen zusammengefaßten Werte der linken Cräfte sind gleich Null:

$$\sum X = \sum Y = \sum Z = \sum M_x = \sum M_y = 0.$$

Was die elementaren Kräfte $\sigma\,dF$ anbetrifft, so sind von ihnen drei Werte ıfolge ihrer Parallelität zur x-Achse (nämlich die Summen der Projektionen uf die y- und z-Achse und die Summe des Moments um die x-Achse) wie folgt:

$$\sum Y = \sum Z = \sum M_x = 0,$$

/ie dies auch für die linken äußeren Kräfte zutrifft.

Auf diese Weise erfüllen sich identisch drei Bedingungen der Äquivalenz der nken äußeren Kräfte und der elementaren Kräfte $\sigma\,dF$. Was jedoch die übrigen rei Werte der elementaren Kräfte $\sum X$, $\sum M_y$ und $\sum M_z$ anbetrifft, so werden ıre Gleichheitsbedingungen gegenüber den entsprechenden Werten der äußeren Cräfte ein System von drei Gleichungen darstellen, in denen die Größe der Iormalspannung σ, die offensichtlich von den Koordinaten y und z des Flächen-lementes abhängt, unbekannt sein wird.

Nehmen wir an, daß in dem gewählten Querschnitt $M > 0$ ist und setzen oraus, daß am Flächenelement dF mit positiven Koordinaten y und z eine ositive (Zug-)Spannung σ wirkt (Bild 166). Die Summe der Projektionen der Cräfte auf die x-Achse stellt sich dann wie folgt dar:

$$\sum X = -\int_F \sigma\,dF.$$

)as Zeichen F unten am Integral weist darauf hin, daß sich die Integration über ie ganze Fläche des Querschnitts erstreckt.

Die Momente der elementaren Kraft $\sigma\,dF$ um die Achsen y und z sind ent-prechend gleich:

$$\sigma\,dF\,z \quad \text{und} \quad -\sigma\,dF\,y\,^{1)}.$$

Die Summen aller elementaren Kräfte um diese Achsen werden wie folgt ge-:hrieben:

$$\int_F \sigma\,dF\,z \quad \text{und} \quad -\int_F \sigma\,dF\,y.$$

lemäß der Bedingung der Äquivalenz haben wir demnach:

$$\int_F \sigma\,dF = 0, \tag{6.1}$$

$$\int_F \sigma\,dF\,z = 0, \tag{6.2}$$

$$\int_F \sigma\,dF\,y = -M. \tag{6.3}$$

---

[1]) Die Vorzeichen der Projektionen und Momente sind nach den Regeln der Statik in Übereinımmung mit der auf Bild 166 gezeigten Achsenrichtung gesetzt.

Die drei Gleichungen genügen noch nicht zur Bestimmung der Normalspannung, die im Querschnitt in Abhängigkeit von den Koordinaten y und z des Flächenelements dF eine unendliche Anzahl von verschiedenen Werten annehmen kann und folglich als unbestimmte Funktion der Koordinaten y und z verbleibt:

$$\sigma = \varphi(y, z). \tag{6.4}$$

Demzufolge enthält das System der Gleichungen (6.1), (6.2) und (6.3) eine unendliche Anzahl von Unbekannten, und die Aufgabe erweist sich daher als statisch unbestimmt.

Die Form der funktionalen Abhängigkeit (6.4) kann man nur mit Hilfe des Studiums der Formänderungen und der Verwertung des Hookeschen Gesetzes, das die Formänderungen mit den Spannungen in Verbindung bringt, ermitteln.

B. Den Charakter der Formänderung bei der reinen Biegung kann man leicht mit Hilfe des Versuchs mit einem Balkenmodell aus Gummi von rechteckigem Querschnitt, auf dessen Seitenflächen ein Netz von Quadraten aufgetragen ist (Bild 167, a), klären. Bei der Biegung eines solchen Balkens mit zwei an den Enden angreifenden Kräftepaaren kann man die Verlängerung der horizontalen

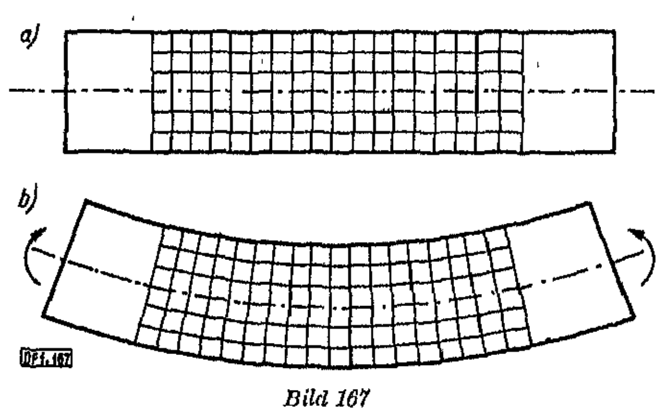


Bild 167

Quadratseiten auf der konvexen Seite und die Verkürzung auf der konkaven Seite, die von einer Krümmung begleitet sind, erkennen (Bild 167, b). Demnach zeigt der Versuch mit Deutlichkeit, daß sich die Längsfasern des Balkens an seiner konvexen Seite verlängern und an seiner konkaven Seite verkürzen.

Da der Übergang vom Verlängerungsbereich zum Verkürzungsbereich allmählich vor sich geht, so muß innerhalb des Balkens eine Faserschicht vorhanden sein, die sich wohl krümmt, aber nicht ihre Länge ändert. Diese Schicht nennt man die *neutrale Schicht* und ihre Spur auf der Querschnittsfläche die *neutrale Linie* oder *neutrale Achse*.

Auf dem gleichen Modell erkennt man (Bild 167, b), daß sich die Querlinien zueinander neigen, wobei sie gerade und senkrecht zu den gekrümmten Längslinien bleiben. Hierbei bleiben die Winkel der deformierten Quadrate rechte Winkel, was auf das Nichtvorhandensein von Schubformänderungen hinweist, die gerade in der Winkeländerung der rechteckigen Elemente bestehen würden[1]).

---

[1]) *Anm. d. deutschen Redaktion:* Das Netz bleibt also auch nach der Biegung ein *Orthogonalnetz.*

Wenn man jedoch keine Schubformänderungen beobachtet, so kann es auch keine mit ihnen verbundene Schubspannungen geben. Auf diese Weise bestätigt der Versuch die oben gemachte Folgerung über das Fehlen der Schubspannungen bei der reinen Biegung. Die Krümmung des Netzes der Quadrate wird auf beiden Seitenflächen des Balkens infolge der Symmetrie des Querschnitts vollkommen gleich sein.

Es ist naturgemäß anzunehmen, daß das auf der Oberfläche des Balkens beobachtete Bild der Verteilung der Formänderungen auch in seinem Innern vor sich geht. Anders ausgedrückt, das Gesetz des allmählichen Übergangs von der Verlängerung zur Verkürzung der Fasern ist in allen Ebenen parallel zu den seitlichen gleich. In einem solchen Falle stellt die neutrale Schicht der Fasern vor der Biegung eine Ebene und nach der Biegung eine zylindrisch gekrümmte Fläche dar. Wegen der Symmetrie des Querschnitts in bezug auf die Wirkungsebene der äußeren Kräfte geht die Biegung in der gleichen Ebene vor sich, d. h. die gerade und die gebogene Balkenachse liegen in einer Ebene xy (Bild 166). Hierbei ist die neutrale Achse eine Gerade, die senkrecht zur Symmetrieachse y gerichtet ist. Die Querschnitte des Balkens neigen sich gegenseitig, indem sie sich um ihre neutralen Achsen drehen.

Der beschriebene Formänderungscharakter bei der reinen Biegung kann durch folgenden Satz ausgedrückt werden:

„*Die vor der Biegung ebenen und zur Balkenachse senkrechten Querschnitte bleiben auch nach der Biegung eben und senkrecht zu der gebogenen Balkenachse.*“

Dieser durch zahlreiche Versuche bestätigte Satz ist in der Festigkeitslehre als Arbeitshypothese angenommen und trägt die Bezeichnung „*Hypothese der*

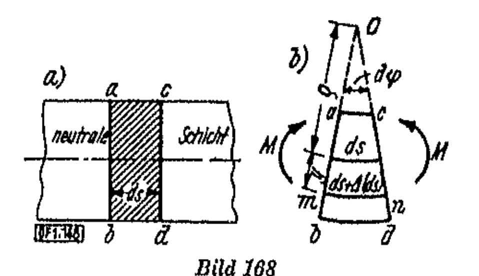


Bild 168

ebenen Querschnitte“ oder „*Hypothese von Bernoulli*“ nach dem Namen des Gelehrten *J. Bernoulli*, der sie erstmalig im Jahre 1705 aufgestellt hat.

Benutzt man diese Hypothese, so kann das Gesetz der Längenänderung der Fasern über die Höhe des Balkens festgelegt werden. Mit zwei unendlich nahen Querschnitten $a—b$ und $c—d$ schneiden wir ein Balkenelement von der Länge ds heraus (Bild 168, a). Nach der Biegung bilden die Querschnitte den unendlich kleinen Winkel $d\varphi$, und alle Fasern krümmen sich, wobei sie im Punkt O das gemeinsame Krümmungszentrum haben. Die Fasern der neutralen Schicht behalten hierbei ihre frühere Länge bei. Bei einem positiven Biegemoment wird die konvexe Seite nach unten gerichtet sein (Bild 168, b). Erinnern wir uns daran, daß wir weiter oben (Bild 166) die positive Achse y nach oben gerichtet und den Koordinatenanfang in einem beliebigen Punkt derselben angeordnet hatten. Jetzt

müssen wir den Koordinatenanfang in der Höhe der neutralen Schicht wählen, wo die Verlängerungen der Fasern gleich Null sind. Dann fällt die neutrale Achse mit der z-Achse zusammen, und der Abstand irgendeiner Faser mn (Bild 168, b) bis zur neutralen Schicht wird gleich dem Wert der Koordinate y des entsprechenden Punktes m des Querschnitts sein.

Bezeichnen wir den Krümmungsradius der neutralen Faser mit ϱ, dann wird die Faser mn den Krümmungsradius $\varrho + y$ und die Länge $ds + \Delta(ds)$ haben. Die absolute Verlängerung der Faser mn stellt sich wie folgt dar:

$$\Delta(ds) = (\varrho + y)\, d\varphi - \varrho\, d\varphi = y\, d\varphi.$$

Die Dehnung ist:

$$\varepsilon = \frac{y\, d\varphi}{ds} = \frac{y\, d\varphi}{\varrho\, d\varphi} = \frac{1}{\varrho}\, y.$$

Hier haben wir zunächst nur die absoluten Werte der Größen ε, ϱ und y im Auge. Die Krümmung $1/\varrho$ sieht man als positiv an, wenn das Krümmungszentrum auf die positive Seite der y-Achse gerichtet ist, und als negativ im umgekehrten Falle. In unserem Falle (Bild 168, b) ist $1/\varrho > 0$ und $y < 0$, und daher ist der rechte Teil der vorherigen Gleichung negativ, während die Verlängerung der auf der konvexen Seite gelegenen Faser mn positiv ist. Um die Vorzeichen beider Teile in Übereinstimmung zu bringen, muß man die Gleichung wie folgt aufschreiben:

$$\varepsilon = -\frac{y}{\varrho}. \tag{6.5}$$

Auf diese Weise sind die Verlängerungen der Fasern proportional ihren Abständen von der neutralen Schicht[1]).

C. Nimmt man an, daß die Längsfasern des Balkens bei der Biegung keinen Druck aufeinander ausüben und sich demnach im Zustande des einfachen Zugs oder Drucks befinden, so können wir das Hookesche Gesetz für den Zug

$$\sigma = E\varepsilon \tag{6.6}$$

anwenden und aus den erhaltenen grundlegenden Gleichungen Ableitungen vornehmen.

Die erste sehr wichtige Ableitung führen wir durch, indem wir den Wert der Verlängerungen aus (6.5) in (6.6) einsetzen:

$$\sigma = -\frac{Ey}{\varrho}. \tag{6.7}$$

Diese Gleichung gibt uns die bisher noch unbekannte funktionale Abhängigkeit (6.4). Die Spannung erweist sich proportional dem Abstande der Faser von der neutralen Achse oder der Koordinate y des Flächenelements dF und hängt nicht von der anderen Koordinate z ab. Die Formel (6.7) ist jedoch als Zwischenableitung anzusehen und kann nicht der Bestimmung der Spannungen dienen, da diese den bisher noch unbekannten Wert des Krümmungsradius ϱ enthält.

Wenn wir jetzt den Wert $\sigma = -\frac{Ey}{\varrho}$ in die statischen Gleichungen (6.1), (6.2) und (6.3) einsetzen, so kommen wir zu einem System von drei Gleichungen mit

[1]) Man kann sich leicht davon überzeugen, daß man bei einer beliebigen Richtung der positiven y-Achse und einer beliebigen Richtung der Wölbung der gebogenen Balkenachse (nach oben oder nach unten) der linken und rechten Seite der Gleichung (6.5) verschiedene Vorzeichen zuschreiben muß.

:en $1/\varrho$ an Stelle ihrer unendlichen Anzahl. Dies ist das Ergebnis
ı Hypothese von *Bernoulli.* Aber solche Gleichungen können,
., einander widersprechen und nur bei gewissen Bedingungen
Die Gleichung (6.3) ermöglicht es offensichtlich, nach dem Ein-
t der Krümmung $1/\varrho$ in Abhängigkeit vom Biegemoment zu
die Gleichungen (6.1) und (6.2) zwei Bedingungen für die Ge-
Systems liefern müssen.

Wert σ aus (6.7) in (6.1) ein, so ergibt sich:

$$\int_F \sigma\, dF = -\frac{E}{\varrho}\int_F y\, dF = 0. \tag{6.8}$$

sein kann, so erfüllt sich die Gleichung (6.8) nur, wenn

$$\int_F y\, dF = 0 \text{ ist.}$$

stellt nichts anderes dar als das statische Moment der Quer-
bezug auf die neutrale Achse z. Hieraus folgt, daß die neutrale
ı Schwerpunkt des Querschnitts geht, da nur in diesem Falle
ment zu Null wird.

, daß wir die *erste Bedingung* der Gemeinsamkeit des Systems
vir den Koordinatenanfang im Schwerpunkt des Querschnitts

zt den Wert σ in die Gleichung (6.2) ein:

$$\int_F \sigma\, dF\, z = -\frac{E}{\varrho}\int_F yz\, dF = 0. \tag{6.9}$$

(6.9) besteht zu Recht, wenn

$$\int_F yz\, dF = 0 \text{ ist.}$$

das hier auf der linken Seite steht, trägt, wie bekannt, die Be-
ifugalmoment der Querschnittsfläche in bezug auf die Achsen y

'ingung der Gemeinsamkeit der Gleichungen besteht demnach
Centrifugalmoment gleich Null ist. In unserer Aufgabe wird sie
bedingungsgemäß die y-Achse die Symmetrieachse des Quer-
e Kapitel 4.03).

ır uns jetzt der letzten statischen Gleichung (6.3) zu, und setzen
Wert σ ein:

$$\int_F \sigma\, dF\, y = -\frac{E}{\varrho}\int_F y^2\, dF = -M. \tag{6.10}$$

$y^2\, dF$ ist das *äquatoriale Trägheitsmoment* der Querschnitts-
uf die z-Achse.

r ihn mit J_z, und schreiben wir die Gleichung (6.10) wie folgt um:

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{M}{EJ_z}. \tag{6.11}$$

Der Nenner des rechten Teils EJ_z heißt die *Steifigkeit* des Balkens bei der Biegung in der Ebene xy.

Die Formel (6.11), die sich als Synthese der drei Seiten der Aufgabe ergeben hat, ist als grundlegende Hauptabhängigkeit der reinen Biegung anzusehen. In der Tat spiegelte sich hier die statische Seite in Form eines Moments der linken äußeren Kräfte M wider. Die geometrische Seite ist durch die Krümmung der Achse $1/\varrho$ und die Charakteristik J_z des Querschnitts dargestellt, und die physikalische Seite ist durch den Elastizitätsmodul E des Materials zum Ausdruck gebracht.

Es ist interessant, seine Aufmerksamkeit darauf zu richten, daß die Krümmung $1/\varrho$ der Achse eine spezifische, die Biegung charakterisierende Formänderung ist und daß die Abhängigkeit (6.11) daher das gleiche Hookesche Gesetz, jedoch in einer schon komplizierteren und entwickelteren Form, ausdrückt:

Die Krümmung der Balkenachse im gegebenen Punkt (die Formänderung) ist proportional dem Biegemoment (Kraft). Außerdem ist es nützlich, die nahe Analogie der Gleichung (6.11) mit einer ebenso grundlegenden Ableitung in der Theorie des einfachen Zugs bzw. Drucks, die durch die Gleichung

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l} = \frac{N}{EF}$$

zum Ausdruck kommt, herauszustellen.

Viele wichtige Theorien in der Festigkeitslehre und in der Baustatik allgemein gründen sich auf die Abhängigkeit (6.11). Im weiteren untersuchen wir mit ihrer

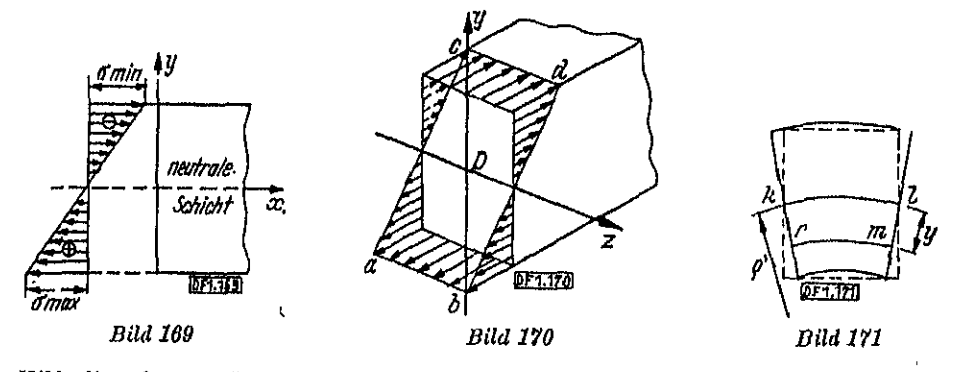


Bild 169 *Bild 170* *Bild 171*

Hilfe die gebogene Balkenachse und erhalten jetzt, indem wir sie benutzen, die endgültige Formel der Normalspannung bei der Biegung. Setzt man den Wert $1/\varrho$ aus (6.11) in (6.7) ein, so ergibt sich nach der Kürzung:

$$\sigma = -\frac{My}{J_z}. \tag{6.12}$$

Das Gesetz der Änderung von σ über die Höhe des Querschnitts stellt sich graphisch als Gerade dar, die ihre Null-Ordinate in der Ebene der neutralen Schicht hat. In der in Bild 169 gezeigten Darstellung der Normalspannungen sind die positiven Ordinaten (Zug) nach links und die negativen (Druck) nach rechts abgetragen. Wenn wir uns vorstellen, daß in allen Punkten des Querschnitts die Werte σ in Form von Vektoren senkrecht zum Querschnitt ab-

tragen sind, wobei die Zugspannungen mit ihren Pfeilen auf die äußere Seite
ıf die Seite des entfernten Teiles) und die Druckspannungen auf die entgegen-
setzte Seite gerichtet sind, so werden die Endpunkte der Vektoren in einer
rch die neutrale Achse z gehenden Ebene $abcd$ liegen (Bild 170). Demzufolge
im Falle der reinen Biegung die Fläche der Normalspannungen eine Ebene
gl. Absatz C, Kapitel 1.4).

Aus der Formel (6.12) und aus dem Bild 169 ist zu ersehen, daß die äußersten
eren und unteren Fasern als die von der neutralen Schicht am weitesten ent-
rnten Fasern am stärksten angespannt sind.

Die Vorzeichen vor den rechten Teilen der Formeln (6.11) und (6.12) ent-
rechen der nach oben angenommenen positiven Richtung der y-Achse. Manch-
al ist es günstiger, die positive y-Achse nach unten zu richten; dann muß man
e Vorzeichen in diesen Formeln in die umgekehrten ändern.

E. Der einfache Zug und Druck wird von der durch die *Poissonsche Zahl* be-
mmten Querverformung des Querschnitts begleitet, wobei die einzelnen
ısern ihre Länge ändern, ohne einen Druck aufeinander auszuüben. Der Ver-
ch zeigt, daß bei der Biegung auch eine Veränderung der Form des Querschnitts
tsteht, der sich auf der konvexen Seite des Balkens einengt und auf der kon-
ven Seite verbreitert, wobei er die in Bild 171 (für den Fall eines recht-
kigen Querschnitts) mit durchgehenden Linien dargestellte Form annimmt.
e seitlichen Kanten des Querschnitts neigen sich aufeinander zu, wobei sie sich
n die Punkte k und l drehen. Die Querfasern ändern ihre Länge und krümmen
ch mit der Wölbung auf die der Wölbung der Längsfasern entgegengesetzte
ite. Die neutrale Linie kl krümmt sich ohne Längenänderung. Wenn die oben
bsatz C) gemachte Annahme zu Recht besteht, daß bei der reinen Biegung
n einfacher Zug und Druck der Längsfasern des Balkens stattfindet, d. h. die
ısern keinen Druck aufeinander ausüben, so müssen die Dehnungen der von
r neutralen Achse gleich weit entfernten Quer- und Längsfasern ein Verhältnis
ıfweisen, das gleich der Poissonschen Zahl ist. Demnach ist also

$$\left|\frac{\varepsilon_z}{\varepsilon_x}\right| = \mu,$$

orin ε_z die relative Querverformung ist. Auf Grund des Bildes 171 kann leicht
stgestellt werden, daß die relative Verkürzung der Querfaser $\varepsilon_z rm = \frac{y}{\varrho'}$ ist,
orin ϱ' den Querkrümmungsradius der neutralen Achse kl darstellt. Nimmt man
ne Querfaser rm, die auf der gleichen Ebene wie auch die Längsfaser mn liegt
ild 168), so erhalten wir:

$$\frac{\varepsilon_z}{\varepsilon_x} = \frac{y}{\varrho'} : \frac{y}{\varrho} = \mu$$

er

$$\frac{\varrho}{\varrho'} = \mu,$$

h. das Verhältnis der Krümmungsradien der Längs- und Querfaser muß gleich
m Poissonschen Verhältnis sein.

Die Ermittlung der beiden Krümmungsradien auf dem Versuchswege hat diese Ab-
tung bestätigt. Es erwies sich, daß die bei den Versuchen auf Biegung ermittelten
erte μ sehr nahe bei den Werten aus den Versuchen für einfachen Zug liegen.

6.02 Berechnung der Balken auf Biegung — Festigkeitsformel Widerstandsmoment

A. Die für die reine Biegung abgeleitete Formel (6.12) der Normalspannung kann man, wie unten gezeigt wird (Kapitel 6.04, Absatz C), in allen Fällen der Querbiegung der Balken von symmetrischem Querschnitt anwenden. Bei der Überprüfung der Festigkeit des auf Biegung beanspruchten Balkens muß man in erster Linie die größten Normalspannungen ermitteln, indem man in die Formel (6.12) die Koordinaten der äußersten Fasern einsetzt. Das Minuszeichen vor dem rechten Teil der Formel (6.12) ist, wie erwähnt, mit der positiven Richtung der y-Achse nach oben verbunden und muß bei einer Änderung der Richtung der y-Achse in das umgekehrte Vorzeichen geändert werden. In praktischen Berechnungen ist es bequemer, das Vorzeichen der Spannung unabhängig von der positiven Richtung der y-Achse festzulegen, indem man sich von der einfachen Überlegung leiten läßt, daß sich bei positivem Biegemoment der Balken mit der Wölbung nach unten durchbiegt und bei negativem M die Wölbung nach oben gerichtet ist. Entsprechende Vorzeichen für die Spannungen der äußersten Fasern sind in Bild 172 dargestellt. Dann genügt es, nach der Formel (6.12) den zahlenmäßigen Wert der Spannung zu finden.

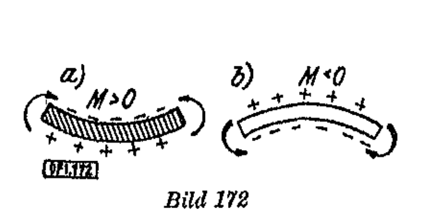


Bild 172

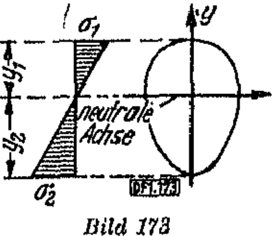


Bild 173

Die Abstände der oberen und unteren Faser von der neutralen Achse bezeichnen wir mit y_1 und y_2 (Bild 173). Die Zahlenwerte für die Spannungen der äußersten Fasern sind dann:

$$\sigma_1 = \frac{M\,y_1}{J_z} \quad \text{und} \quad \sigma_2 = \frac{M\,y_2}{J_z}.$$

Nach Einführung der Bezeichnungen $\frac{J_z}{y_1} = W_1$ und $\frac{J_z}{y_2} = W_2$ schreiben wir die Formel der größten Spannungen wie folgt um:

$$\sigma_1 = \frac{M}{W_1}; \quad \sigma_2 = \frac{M}{W_2}. \tag{6.13}$$

Die Werte W_1 und W_2 heißen *Widerstandsmomente des Querschnitts* in bezug auf die obere und untere Faser. Die der absoluten Größe nach größte Spannung ergibt sich in der am weitesten von der neutralen Achse entfernten äußersten Faser, der das kleinste Widerstandsmoment entspricht. Wenn das Material des Balkens dem Zug und Druck gleich gut Widerstand leistet, so spielt bei der Festigkeitsberechnung das Vorzeichen der Spannung keine Rolle, und es genügt, lediglich das kleinere von den beiden Widerstandsmomenten zu ermitteln. Zieht man diesen Fall als den in der Praxis (Stahl, Holz) vorherrschenden in Betracht, so können wir dem Widerstandsmoment folgende Definition geben:

Als Widerstandsmoment bezeichnet man den Quotienten aus der Division des ägheitsmomentes durch den Abstand der von der neutralen Achse am weitesten fernten Faser.

mnach ist:

$$W_z = \frac{J_z}{y_{max}} \tag{6.14}$$

enn die neutrale Achse durch die Mitte der Höhe h des Querschnitts geht (z. B. einem symmetrischen Querschnitt), dann ist:

$$y_1 = y_2 = \frac{h}{2}$$

d

$$W_1 = W_2 = W = \frac{J_z}{(h/2)}. \tag{6.15}$$

e Spannungen der äußersten Fasern sind in diesem Falle der Größe nach gleich ild 174):

$$\sigma_{\substack{max \\ min}} = \pm \frac{M}{W}. \tag{6.16}$$

Die Dimension des Widerstandsmomentes ist (Länge)^3 (gewöhnlich in cm^3). s Widerstandsmoment wie auch das Trägheitsmoment ist als geometrischer ert anzusehen und charakterisiert die Festigkeit des Balkens in Abhängigkeit n der Form und den Abmessungen des Querschnitts.

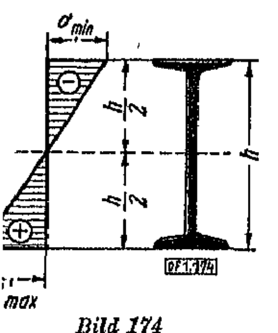


Bild 174

Die Werte W für Walzprofile sind in den Tafeln „Гост" des normalen Sortiments aufgeführt[1]).

Für einen rechteckigen Querschnitt von der Breite b und der Höhe h ist:

$$W = \frac{b\,h^3}{12\,h/2} = \frac{b\,h^2}{6}. \tag{6.17}$$

Für einen runden Querschnitt ist:

$$W = \frac{\pi 4 r^4}{4 r} = \frac{\pi r^3}{4} = \frac{\pi d^3}{32}. \tag{6.18}$$

: gebraucht man auch den angenäherten Wert:

$$W \approx \frac{3{,}14 d^3}{32} \approx 0{,}1\, d^3.$$

Die Gleichung (6.16) dient als Berechnungsformel der Festigkeit der auf egung beanspruchten Balken. Ihre Struktur ist der Berechnungsformel auf Zug d Druck, $\sigma = \frac{N}{F}$, vollkommen gleich. Mit Hilfe der Formel (6.16) können auch Falle des Zuges bzw. Druckes drei Arten von Aufgaben in Abhängigkeit von, welche von den drei zur Formel gehörigen Werten ermittelt werden soll,

) Bei der Benutzung der Tafeln „Гост" muß man daran denken, daß der Achse z unseres Achsen-oms die Achse x in den Tafeln entspricht.
Anm. d. deutschen Redaktion: Das gilt ebenfalls für die entsprechenden deutschen Tafeln, einschl. Angaben über die x-Achse.

gelöst werden. Wenn die zulässigen Spannungen auf Zug und Druck bei der Biegung nicht verschieden und gleich $\sigma_{b\,zul}$ sind, so muß man zur Überprüfung der Festigkeit des Balkens bei gegebener Belastung und gegebenen Querschnittsabmessungen das absolut größte Biegemoment M_{max} finden und W berechnen. Die Festigkeitsbedingung hat die Form:

$$\sigma_{max} = \frac{M}{W} \leqq \sigma_{b\,zul}\,. \tag{6.19}$$

Bei der Wahl des Querschnitts bei gegebener Belastung und zulässiger Spannung wird zuerst das erforderliche Widerstandsmoment gefunden:

$$W_{erf} = \frac{M_{max}}{\sigma_{b\,zul}}. \tag{6.20}$$

Darauf bestimmt man, nachdem man eine zweckmäßige Querschnittsform gewählt hat, die Abmessungen des Querschnitts unmittelbar oder auf Grund von Tafeln. Hierbei ist es erwünscht, daß das Widerstandsmoment des gewählten Querschnitts möglichst nahe mit dem nach der Formel (6.20) berechneten übereinstimmt. Abweichungen nach der einen oder anderen Seite sind gewöhnlich in den Grenzen bis 5%[1]) gestattet. Bei der Wahl von Querschnitten gewalzter Träger nach den Tafeln „Гост" sind oftmals größere Abweichungen unvermeidbar, die man nach der Sicherheitsseite[2]) hin zulassen muß.

Wenn die größte zulässige Belastung des Balkens bei gegebenem Querschnitt und Material ermittelt werden soll, so findet man den größten für die Haltbarkeit ungefährlichen Wert des Biegemomentes

$$M_{max} = W\,\sigma_{zul} \tag{6.21}$$

und legt entsprechend diesem die Grenzbelastung für die gegebene Stützweite fest.

Bei der Biegung von Walz- und Flußstahl werden die gleichen zulässigen Spannungen wie beim einfachen Zug und Druck angenommen (siehe Tafel Kapitel 2.10). Für Holzbalken aus lufttrockener Kiefer oder Fichte ist $\sigma_{b\,zul} = \pm\,100$ kg/cm² (bei axialem Zug werden nur 70 kg/cm² zugelassen).

Natur- und Kunststeine, aus diesen angefertigtes Mauerwerk und Betonarten leisten dem Druck guten und dem Zug um ein Vielfaches schlechteren Widerstand. Daher werden diese Baustoffe hauptsächlich für Konstruktionsteile verwandt, die auf Druck beansprucht werden. Wenn es jedoch nicht gelingt, die gleichzeitige Wirkung einer Biegung zu vermeiden, so werden für die auf Zug beanspruchten äußersten Fasern nur sehr geringe Spannungen (etwa $^1/_{10}$ der zulässigen Druckspannungen) zugelassen[3]). Die gleichen Eigenschaften hat auch Gußeisen. Für Abgüsse aus grauem Gußeisen werden auf Druck bei der Biegung 1200 bis 1500 kg/cm² zugelassen, aber auf Zug bei der Biegung nur 350 bis 450 kg/cm² (in Abhängigkeit von der Güte des Gußeisens).

Bei der Berechnung von Balken auf Biegung ist es erforderlich, nicht nur die Festigkeit zu gewährleisten, sondern auch eine ausreichende Steifigkeit EJ_z des

---

[1]) *Anm. d. deutschen Redaktion:* Diese Toleranz von 5% (etwa entsprechend der Genauigkeit von Rechenschieberrechnungen) ist auch in Deutschland anerkannt.

[2]) Das bedeutet, daß man oft die zulässige Beanspruchung nicht zu 95% bis 100% (oder 105%) ausnutzen kann, da eine >105%ige Ausnutzung unstatthaft ist, während gleichzeitig das nächsthöhere Profil wesentlich weniger als 95% bis 100% beansprucht ist.

[3]) *Anm. d. deutschen Redaktion:* In Deutschland z. T. nur $^1/_{20}$. Oftmals wird auch nach dem Berechnungsverfahren des *Ausschlusses von Zugspannungen* gerechnet, d. h. $\sigma_z = 0$ gesetzt. Dabei steigt dann σ_d um ein gewisses Maß an.

lkens, von der die Krümmung $1/\varrho$ der gebogenen Achse abhängt. Nicht nügend steife Balken werden unter der Belastung große Durchbiegungen eiden, auch wenn die Spannungen dabei die zulässigen Grenzen nicht übergen. Die Berechnung der Balken auf ausreichende Steifigkeit[1]) ist weiter en im Abschnitt VII dargelegt. In diesem Kapitel hier wird nur die Berechnung Festigkeit behandelt.

Die oben aufgeführten Normen der zulässigen Spannungen[2]) beziehen sich auf e statische Wirkung der Belastung.

spiel 34

s ist ein rechteckiger Querschnitt für Balken aus Kiefernholz zu wählen, die auf erwerkswänden ruhen und einen einfachen Bohlenbelag tragen (Bild 175, a). Der tand zwischen den Balken beträgt $a = 1{,}2$ m, die Balkenstützweite $l = 5{,}0$ m, die kehrsbelastung (einschließlich des Gewichts der Balken und des Belages)

$$p = 300 \text{ kg/m}^2 \text{ und } \sigma_{b\,zul} = 100 \text{ kg/cm}^2.$$

uf jeden Balken entfällt ein Streifen gleichmäßiger Belastung von einer Breite, die ch der Entfernung zwischen den Mitten der Stützweiten des Belages ist.

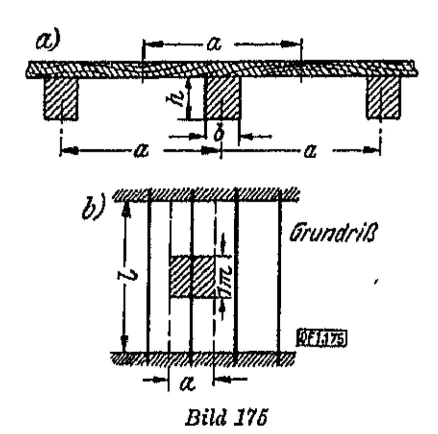


Bild 175

renzt man auf diesem Streifen einen Meter ab (Bild 175, b), so ergibt sich die Größe q Belastung für 1 m Balkenlänge:

$$q = pa = 200 \cdot 1{,}2 = 360 \text{ kg/m}.$$

as größte Biegemoment in Balkenmitte ermitteln wir nach der Formel (5.11):

$$M_{\max} = \frac{ql^2}{8} = \frac{360 \cdot 5^2}{8} = 1125 \text{ kgm} = 112\,500 \text{ kgcm}.$$

as erforderliche Widerstandsmoment ist nach der Formel (6.20):

$$W_{erf} = \frac{M_{\max}}{\sigma_{b\,zul}} = \frac{112\,500}{100} = 1125 \text{ cm}^3.$$

etzen wir diesen Wert dem Widerstandsmoment eines rechteckigen Querschnitts, der der Formel (6.17) bestimmt wird, gleich, so erhalten wir eine Gleichung mit zwei ekannten b und h. Zur Lösung muß eine von den Unbekannten oder ihr Verhältnis

---

[1]) *Anm. d. deutschen Redaktion:* Berechnung auf Durchbiegung.
[2]) *Anm. d. deutschen Redaktion:* Sowj. Bestimmungen.

gegeben sein. Angenommen, das Querschnittsverhältnis des Balkens sei $b/h = {}^2/_3$, dann ist $\frac{2}{3}\,h\,\frac{h^2}{6} = 1125$ und hieraus $h = \sqrt[3]{1125 \cdot 9} = 21{,}6$ cm und $b = {}^2/_3\ 21{,}6 = 14{,}4$ cm. Durch Aufrundung der Abmessungen auf volle Zentimeter erhalten wir einen Querschnitt von 15×22 cm.

Beispiel 35

Für einen gewalzten I-Träger Nr. 40a mit 8,0 m Stützweite ist der größte Wert einer Einzellast P in der Trägermitte zu ermitteln, wobei das Eigengewicht des Trägers berücksichtigt werden soll. $\sigma_{b\,zul}$ ist gleich 1400 kg/cm² (Cт. 2). Aus der Tafel der I-Profile finden wir $W_x = 1090$ cm³ [1]) und das Gewicht für einen Meter Träger, das eine gleichmäßige Belastung darstellt, zu $q = 67{,}6$ kg/m. Das größte Biegemoment wird in der Mitte der Stützweite auftreten und ermittelt sich nach den Formeln (5.11) und 5.15):

$$M_{\max} = \frac{ql^2}{8} + \frac{Pl}{4} = \frac{67{,}6 \cdot 8^2}{8} + \frac{P \cdot 8}{4} = 540 + 2\,P \text{ kgm.}$$

Andererseits ermittelt sich das für den Balken zulässige Höchstmoment nach der Formel (6.21) zu:

$$M_{\max} = W\sigma_{b\,zul} = 1090 \cdot 1400 = 1\,526\,000 \text{ kgcm} = 15\,260 \text{ kgm.}$$

Setzt man die rechten Teile der aufgeschriebenen Gleichungen einander gleich, so erhalten wir $P = 7360$ kg.

6.03 Zweckmäßige Querschnittsformen von Trägern

Bei der Wahl der Querschnitte von Trägern muß man bemüht sein, der Festigkeitsbedingung bei geringstem Materialverbrauch zu genügen. Der Materialverbrauch ist proportional der Querschnittsfläche. Dies bedeutet, daß der Querschnitt um so vorteilhafter ist, je größer das Widerstandsmoment bei ein und derselben Fläche ist. Demzufolge kann man den Wirtschaftlichkeitsgrad durch das Verhältnis $\frac{W}{F}$ bewerten.

Betrachten wir zuerst den rechteckigen Querschnitt. Für diesen ist:

$$\frac{W}{F} = \frac{bh^2}{bh \cdot 6} = \frac{1}{6}\,h \approx 0{,}17 \text{ h.}$$

Die Wirtschaftlichkeit des Querschnitts ist, wie man sieht, proportional seiner Höhe. Diese Proportionalität trifft auch für jede beliebige andere Form des Querschnitts zu. Das Widerstandsmoment W kann man tatsächlich immer in Form des Produkts $W = kFh$ darstellen und hieraus

$$\frac{W}{F} = kh \tag{6.22}$$

finden, worin k ein nur von der Querschnittsform abhängiger Koeffizient ist.

Zur Klärung der Wirtschaftlichkeit verschiedener Querschnittsformen muß man Querschnitte von gleicher Höhe h miteinander vergleichen. Es ist leicht zu errechnen, daß für den runden Querschnitt $k = 0{,}125$, d. h. geringer als für den rechteckigen Querschnitt ist.

---

[1]) *Anm. d. deutschen Redaktion:* Nach den deutschen Profilstahltafeln ist dies ein Träger Normalprofil I 36 mit einem Gewicht $G = 76{,}2$ kg/m. Unter Zugrundelegung der entsprechenden deutschen Profile ergibt sich folgende Rechnung, wenn die obige Formel: $M_{\max} = \frac{ql^2}{8} + \frac{Pl}{4}$ angewendet wird:

$$M_{\max} = \frac{ql^2}{8} + \frac{Pl}{4} = \frac{76{,}6 \cdot 8^2}{8} + \frac{P \cdot 8}{4} = 612{,}8 + 2\,P \text{ kgm}$$

$$M_{\max} = W \cdot \sigma_{b\,zul} = 1090 \cdot 1400 = 1\,526\,000 \text{ kgcm}, = 15\,260 \text{ kgm}, \quad P = 7323{,}6 \text{ kg.}$$

Die Kennlinie der Normalspannungen im Querschnitt zeigt, daß nur die ßeren Fasern mit der vollen zulässigen Spannung arbeiten können. Das Material rd um so weniger ausgenutzt, je näher es zur neutralen Achse hin gelegen ist. ıs Bestreben, das Material möglichst weit von der neutralen Schicht anzu- dnen, führte zu dem Entstehen der I- und [-Querschnitte.

Für die gewalzten I-Träger ist $k = 0{,}29 \cdots 0{,}31$. Demnach ist der gewalzte Querschnitt fast um das Zweifache wirtschaftlicher als der rechteckige Quer- ınitt gleicher Höhe. Für gewalzte [-Träger ist $k = 0{,}27 \cdots 0{,}31$. In der UdSSR ırden I-Träger bis zu einer Höhe von 60 cm und [-Träger bis zu einer Höhe n 40 cm gewalzt[1]). Zur Erreichung einer größeren Höhe geht man zu den schweißten und genieteten Querschnitten in I-Form über.

Die Abhängigkeit (6.22) zeigt, daß es, allgemein gesagt, günstig ist, die Höhe s Querschnitts zu vergrößern. Praktisch besteht dies jedoch nur in gewissen ·enzen zu Recht. Außerdem sind hohe und schmale Träger bei der Biegung ɔht genügend seitensteif, da sie eine geringe Steifigkeit in horizontaler Richtung sitzen. Die Zerstörung solcher Träger kann infolge des Verlustes der Stabilität gar früher erfolgen als die Spannungen in ihnen den bei der Biegung zulässigen ert erreicht haben, wenn nicht konstruktive Maßnahmen zur Sicherung der abilität ergriffen werden.

Bei Baustoffen, die dem Zug und Druck gleich gut Widerstand leisten, werden ößtenteils Querschnitte angewendet, die in bezug auf die neutrale Achse mmetrisch sind. Der Höhe nach unsymmetrische Querschnitte werden in esem Falle weniger vorteilhaft sein, da bei diesen die Entfernungen der ıßersten Fasern von der neutralen Achse, allgemein gesagt, nicht gleich sind[2]), ıd die Spannung in den weniger weit entfernten Fasern niedriger als die lässige Spannung sein wird. Bei einem Baustoff, der dem Zug und Druck nicht eichen Widerstand entgegensetzt (z. B. Gußeisen), können umgekehrt unsym- etrische Querschnitte durchaus zweckmäßig sein, wenn man sie so zusammen- tzt, daß die Abstände y_1 und y_2 der äußersten Fasern proportional den zulässigen ɔannungen auf Zug und Druck sind. Das Bestreben, die gute Widerstands- fähigkeit des Betons auf Druck bei der Biegung auszunutzen, führte zu dem Entstehen der Eisen- betonbalken[3]), in denen die Zugspannungen von einer Stahlbewehrung in Form von runden Stäben aufgenommen werden, die in die Zugzone des Balkens unweit der äußersten Fasern eingelegt werden. Hierbei wird die Arbeit des Betons auf ıg größtenteils überhaupt nicht berücksichtigt, so daß es zweckmäßig ist, die etonfläche in der Zugzone des Querschnitts zu verringern, wobei man gleich-

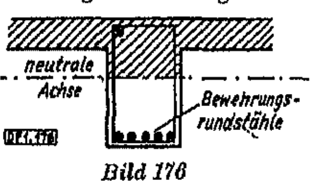


Bild 176

---

[1]) *Anm. d. deutschen Redaktion:* Deutsche maximale Trägerhöhen von
a) I-Normalprofilen $h = 60$ cm, b) I-Breitflanschprofilen $h = 100$ cm, c) [-Profilen $h = 40$ cm.

[2]) Eine Ausnahme bildet z. B. die Schiene, deren Querschnitt unsymmetrisch ist, deren Ab- essungen so gewählt sind, daß die neutrale Achse durch die Mitte der Höhe geht.
Anm. d. deutschen Redaktion: Die deutschen Schienenprofile (Nr. 6, 8, 15, S 45 und S 49) sind eben- lls so konstruiert, daß die neutrale Achse *etwa* in halber Höhe liegt.

[3]) *Anm. d. deutschen Redaktion:* Seit etwa 10 Jahren benutzt man allgemein an Stelle des veralteten ortes *Eisen*beton in Deutschland das Wort *Stahl*beton.

zeitig die Fläche in der Zone der größten Druckspannung vergrößert. Diesen Anforderungen entspricht der T-Querschnitt (Bild 176), der weitgehend bei Stahlbetonträgern zur Anwendung kommt.

6.04 Schubspannungen bei der Biegung — Ableitung der Formel Krümmung der Querschnitte

A. In der Festigkeitslehre wird eine angenäherte Untersuchung der Schubspannungen bei der Biegung dargelegt, die von *D. J. Shurawski* stammt und auf einige wahrscheinliche Annahmen gegründet ist. Betrachten wir zuerst einen Balken von rechteckigem Querschnitt mit einer in der Ebene $y0x$ liegenden Belastung, und grenzen wir am Querschnitt ein elementares Flächenelement dF an der Seitenkante AB ab (Bild 177). Wir nehmen an, daß die Schubspannung τ am Flächenelement dF zur Kante AB geneigt gerichtet ist, und zerlegen τ in die Komponenten τ_y und τ_z parallel und senkrecht zur Kante AB.

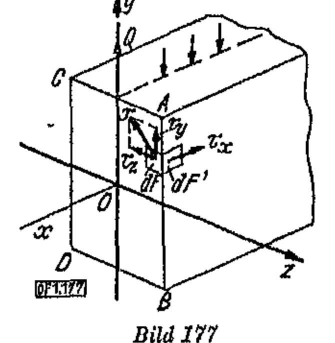


Bild 177

Auf Grund des Gesetzes der Gegenseitigkeit der Schubspannungen muß an dem senkrechten Flächenelement dF', das auf der Seitenfläche des Balkens abgegrenzt ist, eine Schubspannung τ_x gleich τ_z, die ebenfalls senkrecht zu AB gerichtet ist, wirken. Da aber an der Seitenfläche keine Schubspannungen angreifen, so ist $\tau_x = 0$, und folglich ist τ_z ebenfalls gleich Null. Demzufolge sind die Schubspannungen der Flächenelemente, die an den Seitenkanten des Querschnitts gelegen sind, längs der Kanten gerichtet. Es ist nicht schwer, die erhaltene Ableitung auf einen Querschnitt mit beliebigen Umrissen zu verallgemeinern und wie folgt zu formulieren: Wenn auf die Oberfläche des Balkens keine Tangentialbelastung wirkt, so ist in einem beliebigen Punkt *an der Umrißlinie des Querschnitts die Schubspannung parallel zu der Umrißlinie gerichtet* (*oder gleich Null*)[1]).

Diese äußerst wichtige Folgerung des Gesetzes der Gegenseitigkeit der Schubspannungen werden wir im weiteren mehrfach benutzen, kehren aber zunächst zu dem rechteckigen Querschnitt zurück und ziehen auf beliebiger Höhe y eine Gerade $m—n$ parallel zur neutralen Achse z (Bild 178). Da an den Enden der Geraden die Schubspannungen nach dem bisher Dargelegten parallel zur y-Achse gerichtet sind, so kann man annehmen, daß auch in allen übrigen Punkten der Geraden die gleiche Richtung τ erhalten bleibt.

Nehmen wir weiterhin an, daß sich die Größe der Schubspannung längs der Geraden $m—n$ nicht ändert. Auf diese Weise gründet sich die elementare Theorie auf zwei Annahmen:

---

[1]) Bei krummlinigen Umrissen des Querschnittes ist die Schubspannung τ an der Umrißlinie selbstverständlich tangential zu dieser gerichtet.

. Die Schubspannung in einem beliebigen Punkt des Querschnitts ist parallel Querkraft Q gerichtet.

. Die Größe der Schubspannung hängt nur von der Koordinate y des Quer-nittspunktes ab, mit anderen Worten, die Schubspannungen verteilen sich ·r die Breite des Querschnitts gleichmäßig.

Es ist völlig klar, daß beide Annahmen um so wahrscheinlicher sind, je kleiner Breite b des Querschnitts ist.

Venn am elementaren Flächenelement mn des Querschnitts $a—b$ (Bild 179) э Schubspannung τ wirkt, die den Einfluß des linken entfernten Balkenteils drückt, so bemerken wir noch, daß auf Grund desselben Gesetzes der Gegen-igkeit der Schubspannungen auf das elementare Flächenelement mp des izontalen Schnittes $c—d$ eine gleiche Spannung τ wirken muß, die so gerichtet wie in Bild 179 dargestellt, und den Einfluß des unteren Balkenteils auf den ren am Flächenelement mp zum Ausdruck bringt. Dies bedeutet, daß die ıubspannungen in Querschnitten von Schubspannungen in zur neutralen ıse parallelen Längsschnitten begleitet werden. Diese letzteren Spannungen

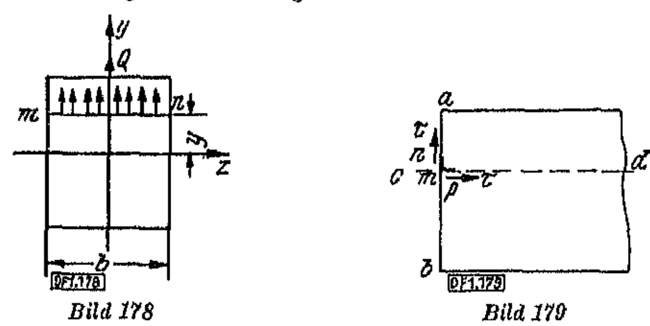


Bild 178 *Bild 179*

·den an der oberen und unteren Oberfläche des Balkens (beim Fehlen einer ıgentialbelastung) gleich Null. Dies bedeutet, daß auch im Querschnitt $a—b$ den äußersten Fasern die Schubspannungen gleich Null sind (siehe Kap. 3.07, 178). Da an den anderen Flächenelementen des Querschnitts $a—b$ sich die ınnungen τ allgemein von Null unterscheiden, so ist es von vornherein augen-einlich, daß das Gesetz der Änderung der Schubspannungen über die Höhe Querschnitts kein geradliniges sein kann, wie dies für die Normalspannungen rifft.

Bild 180

. Die unter Absatz A gemachten beiden Annahmen genügen, um das Gesetz Verteilung der Schubspannungen über die Höhe des rechteckigen Quer-nitts allein von der statischen Seite her zu finden. Hierbei benutzen wir die ·mel (6.12) der Normalspannung, indem wir damit rechnen, daß sie im Falle

der Querbiegung ihre Gültigkeit behält. Schneiden wir aus dem Balken mittels zweier benachbarter Querschnitte *1—1* und *2—2* und eines horizontalen Schnittes *3—3*, der in einem beliebigen Abstand y von der neutralen Schicht geführt ist, ein rechteckiges Parallelepiped heraus (Bild 180).

Die Schnitte *1—1* und *2—2* wählen wir zunächst in einem unbelasteten Abschnitt des Balkens und in genügender Entfernung von den Einzelkräften. In einem solchen Falle sind die Querkraft Q und folglich auch die Schubspannungen in beiden Querschnitten gleich. Bezeichnen wir das Biegemoment im Querschnitt *1—1* mit M und im Querschnitt *2—2* mit $M + dM$, worin dM die Zunahme des Moments auf der Strecke dx ist. Nehmen wir an, daß in dem gegebenen Abschnitt $M > 0$ ist und mit der Zunahme von x anwächst; dann ist $Q = \frac{dM}{dx} > 0$. Entfernen wir die links vom Schnitt *1—1* und die rechts vom Schnitt *2—2* gelegenen Balkenteile und ersetzen wir ihren Einfluß auf das Element $abfg$ durch normale

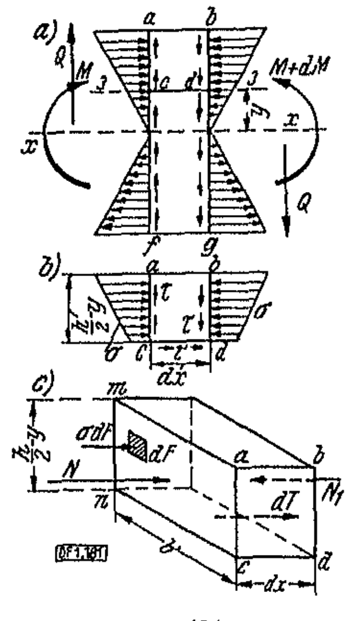


Bild 181

und tangentiale Kräfte, deren Richtungen wie auch die Richtungen der entsprechenden linken und rechten Kräfte auf Bild 181, a dargestellt sind. Entfernen wir jetzt einen Teil der Schicht $cdgf$, der unterhalb des horizontalen Schnittes *3—3* liegt (Bild 180, a und 181, a). Der Einfluß dieses Teils auf den auf diese Weise abgetrennten oberen Teil $abcd$ (Bild 181, b) ist durch die an der Fläche cd angebrachten und nach rechts gerichteten (auf Grund des Gesetzes der Gegenseitigkeit) Schubspannungen τ ausgedrückt. Normalspannungen gibt es an der Fläche $c—d$ nicht, da man annehmen kann, daß in einem ausreichenden Abstand von den Lasten die Fasern aufeinander keinen Druck ausüben.

Zur Ermittlung der an der Fläche $c—d$ wirkenden Spannungen τ genügt eine
n den Gleichgewichtsbedingungen des herausgeschnittenen Parallelepipeds
$X = 0$. Die Resultierenden der tangentialen Kräfte an den vertikalen Flächen
Parallelepipeds erscheinen nicht in dieser Gleichung und sind daher in Bild
., c nicht dargestellt. Die Gleichung nimmt die Form

$$N + dT - N_1 = 0 \tag{6.23}$$

worin N und N_1 die Resultierenden der Normalkräfte an der linken und
hten Fläche des Parallelepipeds und dT die Resultierende der Schubspan-
ngen an der unteren Fläche darstellen. Den Wert N finden wir durch Inte-
tion. Es ist:

$$N = \int_\omega \sigma \, dF,$$

rin $\sigma \, dF$ die elementare Normalkraft und ω die Fläche der Seite $amnc$ ist,
er die sich die Integration erstreckt (Bild 181, c; in Bild 180 ist diese Fläche
raffiert). Setzt man $\sigma = \frac{My}{J_z}$ ein, so erhalten wir:

$$N = \frac{M}{J_z} \int_\omega y \, dF.$$

s auf der rechten Seite stehende Integral stellt das statische Moment der Fläche
nc in bezug auf die neutrale Achse z dar, d. h. das statische Moment *des ober-*
b der Ebene y gelegenen Querschnittsteiles, auf der die Spannung τ ermittelt
d.

Bezeichnen wir zur Abkürzung $\int y \, dF = S$, dann wird:

$$N = \frac{M}{J_z} S.$$

nalog finden wir die an der rechten Fläche angreifende Normalkraft N_1:

$$N_1 = \frac{M + dM}{J_z} S.$$

Die Tangentialkraft dT an der unteren Fläche des Parallelepipeds erhalten wir,
em wir die Spannung τ mit der Fläche der Seite $b\,dx$ multiplizieren, da gemäß
Annahme die Spannungen τ sich gleichmäßig über die Breite b des Balkens
teilen:

$$dT = \tau b \, dx.$$

ch dem Einsetzen der gefundenen Werte N, N_1 und dT nimmt die Gleich-
ichtsbedingung (6.23) die Form)

$$\frac{M}{J_z} S + \tau b dx - \frac{M + dM}{J_z} S = 0$$

woraus $\quad \tau = \frac{dM \, S}{dx \, J_z \, b}$ wird.

chtet man, daß $\frac{dM}{dx} = Q$ ist, so erhalten wir die Formel der Schubspan-
gen bei der Biegung in der endgültigen Form:

$$\tau = \frac{Q S}{J_z b} \tag{6.24}$$

Aus der Gleichgewichtsbedingung haben wir somit die Schubspannung im horizontalen Schnitt *3—3* (Bild 180, a) gefunden. Nach dem Gesetz der Gegenseitigkeit werden die Schubspannungen in den Querschnitten *1—1* und *2—2* auf der Ebene y die gleichen sein.

Für die äußersten oberen Fasern ist $y = h/2$, $S = 0$ und $\tau = 0$. Mit der Entfernung von den oberen Fasern wächst der Wert S und mit ihm auch τ an, die den größten Wert für die auf der neutralen Achse gelegenen Punkte erreichen. Weiter beginnt S abzunehmen, da ein Teil des Querschnitts zwischen der Ebene y und der neutralen Achse ein negatives statisches Moment hat (Bild 182). Für die äußersten unteren Fasern ist $S = 0$ (als statisches Moment der gesamten Fläche in bezug auf die Achse) und $\tau = 0$.

Auf diese Weise ist $S \geqq 0$, so daß das Vorzeichen der Schubspannung für alle Punkte des Querschnitts gleich ist und *nur von dem Vorzeichen der Querkraft Q*

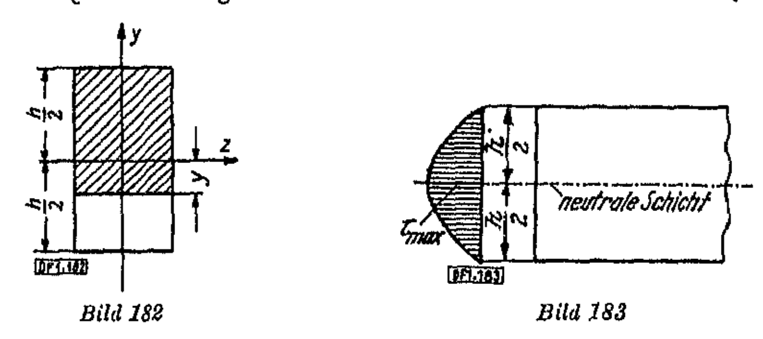


Bild 182 *Bild 183*

abhängt. In Übereinstimmung hiermit werden wir die Schubspannungen im Querschnitt bei ihrer Richtung nach oben als positiv ansehen (vorausgesetzt, daß der linke Teil des Balkens entfernt ist).

Für einen rechteckigen Querschnitt ist:

$$S = \frac{b}{2}\left(\frac{h^2}{4} - y^2\right).$$

Setzt man den Wert in die Formel (6.24) ein, so erhalten wir:

$$\tau = \frac{Q}{2J_z}\left(\frac{h^2}{4} - y^2\right) = \frac{6Q}{bh^3}\left(\frac{h^2}{4} - y^2\right). \qquad (6.25)$$

Gemäß (6.25) hat die Linie der Schubspannungen im Querschnitt die Form einer symmetrischen Parabel mit der größten Ordinate auf der Höhe der neutralen Schicht (Bild 183). Setzt man in (6.25) $y = 0$ ein, so erhalten wir den größten Wert der Schubspannung in einem rechteckigen Querschnitt

$$\tau_{max} = \frac{3Q}{2bh} = \frac{3}{2}\cdot\frac{Q}{F}, \qquad (6.26)$$

worin $F = bh$ die Fläche des Querschnitts ist.

Aus der Formel (6.26) geht hervor, daß die größte Schubspannung 1,5mal größer als ihr mittlerer Wert $\frac{Q}{F}$ ist.

s Produkt der Fläche der τ-Linie mit der Breite b des Querschnitts stellt die ne aller Schubspannungen im Querschnitt dar. Diese Summe oder Resul- ıde muß, wie bereits im Kapitel 5.5 gezeigt, gleich der Querkraft Q sein. h eine Kontrolle bestätigen wir die Richtigkeit der abgeleiteten Formel). In der Tat ist die Fläche der Parabel gleich $2/3\,\tau_{max}\,h$ (Kap. 5.3). Setzen wir ese den Wert τ_{max} aus (6.26) ein und multiplizieren wir ihn mit der Breite b Querschnitts, so erhalten wir:

$$\frac{2}{3}\,h\,\frac{3}{2}\cdot\frac{Q}{b\,h}\cdot b = Q.$$

m Schluß bemerken wir, daß man bei der Ermittlung der Schubspannung in deinem Punkte (Ebene) das statische Moment sowohl des oberen als auch ınteren Querschnitteils berechnen kann, wenn nur ihre absolute Größe ı ist.

Die Schubspannungen rufen Schiebungen hervor, d. h. eine Winkelver- ng der rechteckigen Elemente. Gemäß dem Hookeschen Gesetz ist die bung des Elements proportional der Schubspannung. Daher verteilen sich Schiebungen wie auch die Spannungen ungleichmäßig über die Höhe des ens: Sie sind an den äußersten Fasern gleich Null und wachsen zur neutralen e hin an. Aus diesem Grunde können die Querschnitte des Balkens nicht bleiben und krümmen sich. Schneiden wir mit zwei benachbarten Quer-

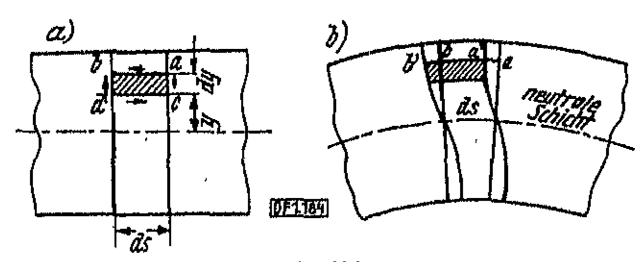


Bild 184

tten und zwei horizontalen Schnitten ein rechteckiges Element $a\,b\,c\,d$ aus dem en heraus (Bild 184, a). Infolge der Wirkung des Biegemoments werden sich Querschnitte beiderseitig durch Drehung um ihre neutralen Achsen neigen, i sich die Fasern des Elements verlängern werden. Die Schubspannungen ı eine Schrägstellung (Schiebung) des Elements, die mit einer Verschiebung lben in eine neue Lage verbunden ist, hervor (Bild 184, b).

e Verschiebung ist als Folge der Schiebungen der darunterliegenden Elemente sehen. Im Ergebnis der Schiebungen und Verschiebungen gehen die ebenen schnitte in zylindrische Flächen über, deren Erzeugenden parallel zur ralen Achse gerichtet sind und deren Führungen eine S-Form haben. Die nmung der Querschnitte kann man wahrnehmen, wenn man einen kurzen en aus Gummi mit einem auf einer Seitenfläche aufgetragenen Netz von ıtecken mittels einer Querbelastung stark durchbiegt. Bei den üblichen kstoffen (z. B. Stahl) ist die Krümmung der Querschnitte sehr gering und e nicht bemerkt worden. Erstmalig wurde sie auf theoretischem Wege von

Saint-Venant entdeckt (im Jahre 1856), der eine genaue Lösung der Aufgabe über die Querbiegung einer an einem Ende eingespannten und mit einer vertikalen Last am freien Ende belasteten Konsole gegeben hat.

Die Lösung von *Saint-Venant* zeigt, daß bei einem Verhältnis der Seiten des Querschnitts von $h/b \geqq 2$ die unter Absatz A eingeführten Annahmen sehr gut mit der Wirklichkeit übereinstimmen.

Für hohe und schmale Rechtecke (dünnwandige Profile) kann man die Ergebnisse der elementaren Theorie praktisch als vollkommen genau ansehen.

Im Zusammenhang mit der Krümmung der Querschnitte taucht die Frage über die Möglichkeit der Anwendung der Formel (6.12) der Normalspannung im Falle der Querbiegung auf, die auf Grund der Hypothese der ebenen Querschnitte abgeleitet wurde. Wenn wir zwei benachbarte Schnitte im unbelasteten Abschnitt des Balkens führen, so wird die Querkraft in beiden Querschnitten gleich sein, und dies bedeutet, daß auch die Krümmung der Querschnitte gleich sein wird. Hierbei wird irgendein Faserabschnitt $a—b$ (Bild 184, b) sich in die neue Lage $a'—b'$ verschieben, wobei er keine Verlängerung erleidet und folglich die Normalspannung nicht ändert. Wenn außerdem die Querschnitte in einem genügenden Abstand von den Angriffsstellen der äußeren Belastung gewählt sind[1]), so kann man wie auch im Falle der reinen Biegung damit rechnen, daß die Fasern aufeinander keinen Druck ausüben. Dies bedeutet, daß in diesem Falle das Gesetz der Verteilung der Normalspannungen (6.12) seine Gültigkeit behält, obgleich die Querschnitte nicht eben bleiben.

Bei Wirkung einer kontinuierlichen Belastung werden sich die Querkräfte in zwei benachbarten Querschnitten um den Wert $dQ = -q\,dx$ unterscheiden, worin dx die Entfernung zwischen den Querschnitten ist. Daher wird die Krümmung der Querschnitte auch etwas unterschiedlich sein. Außerdem werden die Fasern aufeinander einen Druck ausüben. Eine genaue Untersuchung dieser Frage zeigt, daß bei genügend großer Länge des Balkens im Vergleich zu seiner Höhe die Schiebungen und der gegenseitige Druck der Fasern bei einer durchgehenden Belastung keinen wesentlichen Einfluß auf die Normalspannungen im Querschnitt ausüben und daher in praktischen Berechnungen unberücksichtigt bleiben können.

In den Querschnitten unter den Einzellasten und in deren Nähe weicht die Verteilung der Normalspannungen vom linearen Gesetz ab (6.12). In der Praxis wird diese Abweichung, die einen örtlichen Charakter trägt und nicht von einer Erhöhung der größten Spannungen begleitet wird (in den äußersten Fasern), gewöhnlich außer acht gelassen (siehe Teil II).

6.05 Verteilung der Schubspannungen im Kreis-, I-Querschnitt und in anderen Querschnitten

A. Für einen runden Querschnitt kann man nicht die Annahme über die Parallelität der Schubspannungen zur Querkraft machen. Ziehen wir eine Gerade $m—n$ parallel zur neutralen Achse (Bild 185), so wird nur für den Schnittpunkt dieser Geraden mit der y-Achse die Richtung τ vertikal sein (wegen der Symmetrie des Querschnitts). In den Punkten m und n werden die Spannungen

---

[1]) In einem Abstande von nicht weniger als der Hälfte der Höhe des Balkenquerschnitts.

ıngential zum Umriß gerichtet sein. In den übrigen Punkten der Geraden $m-n$ erden offenbar die Spannungsrichtungen ebenfalls zur y-Achse geneigt sein, obei sich mit dem Herannahen des Punktes an die y-Achse die Neigung verngern wird. Mit genügender Wahrscheinlichkeit kann man rechnen, daß die ichtungen der Spannungen, die in der Ebene $m-n$ wirken, sich in einem unkte C der y-Achse schneiden.

Wenn wir die Spannungen τ in die vertikalen und horizontalen Komponenten $_y$ und τ_z zerlegen, so können wir auch die zweite Annahme einführen, daß die ertikalen Komponenten in allen Punkten der Geraden $m-n$ gleich sind, d. h. ch über die Breite des Querschnitts gleichmäßig verteilen[1]).

Die Spannungen τ_y werden selbstverständlich von den ihnen gleichen gegenitigen Spannungen τ_x in den horizontalen Schnitten des Balkens begleitet.

Schneidet man daher aus dem Balken mit zwei benachbarten vertikalen und nem dritten horizontalen Schnitt ein Element heraus, so können wir aus der

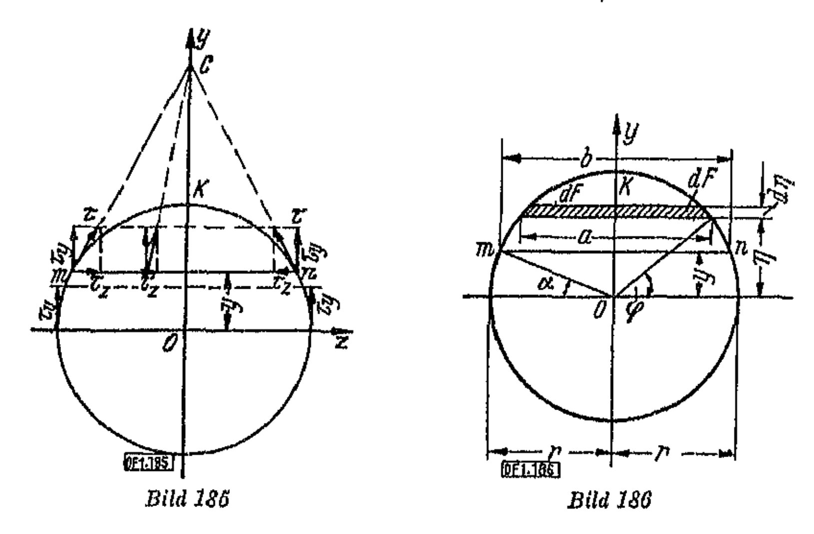


Bild 185 *Bild 186*

leichgewichtsbedingung des Elements (genau so, wie dies im Kapitel 6.04 r den rechteckigen Querschnitt gemacht wurde) den Wert der vertikalen omponente der Schubspannung finden. Es wird:

$$\tau_y = \tau_x = \frac{Q\,S}{J_z b},$$

orin b die Länge der Sehne $m-n$ und S das statische Moment der Fläche des egments mKn ist (Bild 185). Die Summe der vertikalen tangentialen Kräfte im uerschnitt wird gleich der Querkraft sein, demnach

$$\int_F \tau_y\,dF = Q,$$

ährend die horizontalen tangentialen Kräfte $\tau_z\,dF$ sich wegen der Symmetrie s Querschnitts gegenseitig das Gleichgewicht halten werden. Bemerken wir, daß

[1]) Eine genaue Lösung der Elastizitätstheorie zeigt, daß die gemachten Annahmen genügend nah die Wirklichkeit herankommen.

in der Ebene der neutralen Achse z die horizontalen Komponenten τ gleich Null sein werden (Bild 185), da die Gesamtschubspannungen τ parallel zur y-Achse gerichtet sind.

Die Größe des statischen Moments des Segments mKn kann man bequem finden, wenn man das Segment in elementare Streifen dF aufteilt und den Winkel φ als unabhängige Veränderliche wählt (Bild 186):

$$dF = a\, d\eta = 2\, r \cos\varphi\, d\eta,$$

$$\eta = r \sin\varphi,\ d\eta = r\cos\varphi\, d\varphi,$$

$$S = \int_\omega \eta\, dF = \int_\alpha^{\frac{\pi}{2}} r \cdot \sin\varphi \cdot 2\, r\cos\varphi\, r\cos\varphi\, d\varphi$$

$$= -2r^3 \int_\alpha^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\varphi\, d(\cos\varphi) = \frac{2\,r^3\,\cos^3\alpha}{3}.$$

Beachtet man, daß die Breite des Querschnitts in der betrachteten Ebene $b = 2r\cos\alpha$ ist, und setzt man $J_z = \frac{\pi\, r^4}{4}$ ein, so erhalten wir die Formel der Schubspannungen in folgender Form:

$$\tau_y = \frac{4\,Q\cos^2\alpha}{3\cdot\pi\,r^2} = \frac{4\,Q}{3\,F}\cdot\cos^2\alpha. \tag{6.27}$$

Hieraus erkennt man, daß sich die größten Spannungen bei $\alpha = 0$, d. h. an der neutralen Achse ergeben:

$$\tau_{\max} = \frac{4\,Q}{3\,F}. \tag{6.28}$$

Wenn wir in der Formel (6.27) $\cos^2\alpha$ mit $1 - \sin^2\alpha = 1 - \frac{y^2}{r^2}$ ersetzen, so erhalten wir den Ausdruck der Spannung als Funktion der Ordinate y, der darauf hinweist, daß sich τ_y über die Höhe des Balkens nach dem parabolischen Gesetz ändert:

$$\tau_y = \frac{Q}{3\,J_z}\,(r^2 - y^2). \tag{6.29}$$

Für andere Querschnittsformen, die in bezug auf die y-Achse symmetrisch sind (z. B. für die Ellipse, das gleichseitige Trapez), kann man die gleichen Annahmen zulassen, die für den runden Querschnitt gemacht wurden, und folglich die vertikale Komponente der Schubspannung nach der gleichen Formel (6.24) berechnen.

B. Untersuchen wir jetzt einen dünnwandigen I-Querschnitt (Bild 187). Für den Steg werden die beiden Annahmen über die Verteilung der Schubspannungen (Kapitel 6.04) wegen seiner geringen Breite (Dicke) d sehr genau zutreffen. Für irgendeine Ebene y im Bereich des Steges muß man in die Formel (6.24) den Wert des statischen Moments des darüberliegenden Teiles des Querschnitts (des in

der Zeichnung schraffierten Teiles) und die Breite des Querschnitts $b = d$ einsetzen. Benutzt man die Bezeichnungen in Bild 187 und teilt man den schraffierten Teil in zwei Rechtecke auf, so erhalten wir:

$$S = b\left(\frac{h}{2} - \frac{h_1}{2}\right)\frac{1}{2}\left(\frac{h}{2} + \frac{h_1}{2}\right) + d\left(\frac{h_1}{2} - y\right)\frac{1}{2}\left(\frac{h_1}{2} + y\right)$$

$$= \frac{b}{2}\left(\frac{h^2}{4} - \frac{h_1^2}{4}\right) + \frac{d}{2}\left(\frac{h_1^2}{4} - y^2\right);$$

$$\tau = \frac{Q}{J_z d}\left[\frac{b}{2}\left(\frac{h^2}{4} - \frac{h_1^2}{4}\right) + \frac{d}{2}\left(\frac{h_1^2}{4} - y^2\right)\right]. \qquad (6.30)$$

Die Formel (6.30) zeigt, daß sich die Schubspannungen über die Höhe des Steges nach dem parabolischen Gesetz wie im Falle des rechteckigen Querschnitts ändern (Bild 187), wobei sich die größte Spannung τ_{max} an der neutralen Achse ergibt. Für Punkte des Steges, die sich in der Nähe der Übergangslinie rs zum Flansch befinden (Bild 188), folgt die Verteilung der Spannungen einem komplizierteren Gesetz als dem von uns auf Grund der elementaren Ableitung erhaltenen. In den Ecken r und s ergibt sich eine Konzentration der Spannungen, zu deren Milderung bei den gewalzten Trägern die Flansche mit dem Steg durch

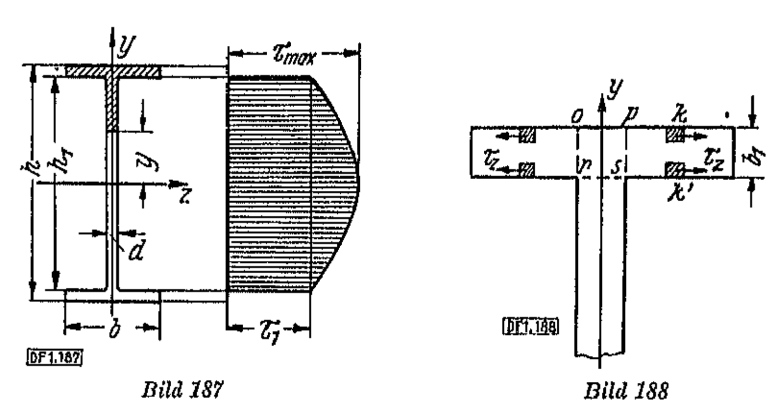


Bild 187 *Bild 188*

kleine Rundungen verbunden werden. Die Milderung der Konzentration der Spannungen gestattet es anzunehmen, daß die für die Grenzebene r—s nach der Formel (6.30) ermittelte Spannung τ_1 (Bild 187) genügend nah an die Wirklichkeit herankommt. Für Punkte des Querschnitts im Bereich der Flansche sind die Annahmen über die Parallelität der Schubspannungen zur Querkraft und ihre gleichmäßige Verteilung über die Flanschbreite b (Bild 187) nicht anwendbar. An der oberen und unteren Fläche des Flansches müssen die Spannungen τ nach den Darlegungen im Abschnitt 6.04 tatsächlich parallel zum Umriß des Querschnitts (Bild 188) gerichtet sein, d. h. ihre vertikale Komponente τ_y muß gleich Null sein. Da die Dicke des Flansches im I-Querschnitt gewöhnlich sehr gering ist, so kann man annehmen, daß längs einer beliebigen vertikalen Linie k—k' die Spannungsrichtung horizontal bleibt. Infolge der Symmetrie des Querschnitts gleichen sich die horizontalen tangentialen Kräfte gegenseitig aus. Vertikale

tangentiale Spannungen können jedoch im Flansch hauptsächlich im Bereich des Rechtecks *rops* vorkommen. Hierbei ist die Summe der vertikalen tangentialen Kräfte in den Flanschen sehr gering und hat keine praktische Bedeutung. Wenn man die Fläche der Schubspannungslinie des Stegs (Bild 187) errechnet und diese mit der Dicke d des Stegs multipliziert, so wird das Produkt den Teil der Querkraft bestimmen, der vom Steg aufgenommen wird. Dieser Teil macht gewöhnlich $0{,}95\cdots0{,}97\,Q$ aus. Merken wir uns noch, daß die größte Spannung τ_{max} und die kleinste τ_1 im Steg (Bild 187) sich nicht sehr stark voneinander unterscheiden. Daher bestimmt man in den angenäherten Berechnungen manchmal die Spannung im Steg, indem man die Querkraft durch die Querschnittsfläche des Stegs (d. h. durch dh_1) dividiert.

Zeigen wir jetzt, daß die Formel (6.24) auch für die Flansche eines I-Trägers ihre Gültigkeit behält, aber hierbei nicht den Wert der vertikalen, sondern der in den Flanschen wirkenden horizontalen Schubspannungen liefert. Bei einer

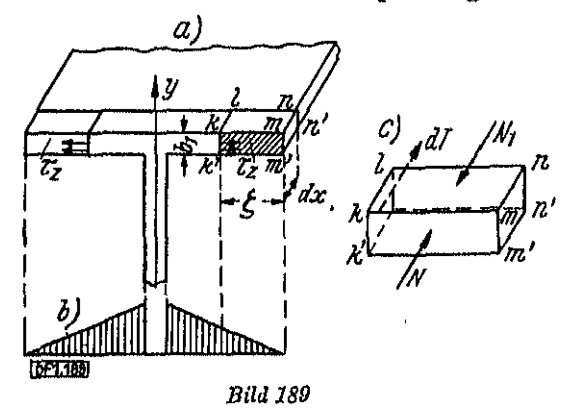


Bild 189

geringen Stärke b_1 des Flansches (Bild 188) kann man annehmen, daß die Spannungen τ_z gleichmäßig über die Dicke verteilt sind. Die ihnen entsprechenden gegenseitigen Spannungen τ_x, die ebenfalls horizontal gerichtet sind, werden in vertikalen Schnitten wirken, die durch den Flansch parallel zur Koordinatenebene yx geführt sind. Schneiden wir aus dem Flansch mit Hilfe eines solchen Schnittes $k-l$ und zweier benachbarten Querschnitte $k-m$ und $l-n$ (Bild 189, a) ein rechteckiges Parallelepiped $klnm$ heraus. Stellt man für dieses die Gleichgewichtsbedingungen $\Sigma X = 0$ auf (Bild 189, c), so finden wir mit Hilfe derselben Berechnungen wie auch im Kapitel 6.04 die Schubspannung im Flansch

$$\tau_x = \tau_z = \frac{Q\,S}{J_z\,b_1},$$

worin S das statische Moment der Fläche $kmm'k'$ in bezug auf die neutrale Achse ist. Bezeichnet man mit ζ den Abstand des vertikalen Längsschnittes kl vom Rande des Flansches, so erhalten wir $S = b_1\,\zeta\left(\frac{h-b_1}{2}\right)$, worin h die Höhe des Querschnitts ist, und

$$\tau_z = \frac{Q\,(h-b_1)}{2\,J_z\cdot\zeta}. \qquad (6.31)$$

te Gleichung zeigt, daß die Spannung τ vom Rande des Flansches nach
aren Gesetz zunimmt und ihre Kennlinie die Form eines Dreiecks hat
b). Befassen wir uns näher mit der Richtung der Schubspannungen in
chen, da wir für diese irgendeine Vorzeichenregel nicht festlegen.
vir an, daß in dem gewählten Schnitt des I-Trägers $M > 0$ und
> 0 ist. Dann ist die Normalkraft N_1 zahlenmäßig größer als N
c) und die tangentiale Kraft dT an der linken Fläche des Elements
in Bild 189, c dargestellt, gerichtet sein. Im Querschnitt $k—m$ werden
spannungen auf Grund des Gesetzes der Gegenseitigkeit nach rechts
sein. Wenn wir ein gleiches Element auf der linken Seite des Flansches
(Bild 189, a) herausschneiden, so wird die Tangentialkraft dT ebenso gerichtet sein, aber an der rechten Fläche des Elements angreifen, und die Spannungen im Querschnitt werden daher nach links gerichtet sein. Wenn wir jetzt gleiche Elemente aus dem unteren Flansch des I-Trägers herausschneiden, so werden die Normalkräfte N_1 und N Zugkräfte sein, so daß die Schubspannungen im unteren Flansch die umgekehrte Richtung haben werden. Im Steg sind sie parallel zur Querkraft, d. h. nach oben gerichtet. In dem Bild 190, in dem die Richtungen aller Spannungen dargestellt sind, sieht man, daß die Spannungen gewissermaßen über den Querschnitt fließen, indem sie in Form zweier Ströme an den Rändern des unteren Flansches beginnen, sich im Steg vereinigen und im oberen
wieder in zwei Ströme aufteilen. Die erwähnte Gesetzmäßigkeit der
der Schubspannungen geht allgemein bei der Biegung nicht geschlos-
nwandiger Profile vor sich (siehe Kapitel 6.12).

90

entiale Belastung

uf den Balken eine tangentiale Belastung längs seiner oberen oder
Oberfläche wirkt, so ergeben sich in den Querschnitten Schubspan-
ch dann, wenn die Querkraft gleich Null ist. Die Schubkräfte im Quer-
lden hierbei ein im Gleichgewicht befindliches System, d. h. ihre
nde ist:

$$\int_F \tau \, dF = 0.$$

chen wir z. B. einen an einem Ende eingespannten Balken von recht-
Querschnitt mit der Höhe h und der Breite b, an dessen oberer Fläche
mäßig verteilte tangentiale Belastung angreift. Ihre Größe, bezogen
ächeneinheit, bezeichnen wir mit τ_0. Nehmen wir zur Vereinfachung der
gen eine Querschnittsbreite $b = 1$ an, dann wird die Größe t der
, bezogen auf die Längeneinheit des Balkens, zahlenmäßig gleich τ_0
191, a).
elastung wird, wie im Abschnitt 5.7 gezeigt worden ist, auf ein gleich-
teiltes Moment von der Größe $m = \frac{th}{2}$ und auf eine gleichmäßig ver-

teilte axiale Belastung t zurückgeführt (Bild 191, b). Für einen beliebigen Querschnitt des Balkens ist:

$$M = mx, \quad Q = 0 \quad \text{und} \quad N = -tx.$$

Zur Ermittlung der Schubspannungen im Balken schneiden wir mittels zweier Querschnitte *1—1* und *2—2* und eines horizontalen Schnittes *3—3* ein rechteckiges Parallelepiped heraus. In Bild 191, c sind die an den Flächen des Parallelepipeds wirkenden Kräfte dargestellt. Die vertikalen Schubkräfte an den Seitenflächen sind nicht dargestellt, da sie in der Gleichgewichtsbedingung $\Sigma X = 0$ nicht enthalten sind. Jede der an den Seitenflächen angreifenden Normalkräfte N_1 und N_2 wird sich in dem betrachteten Falle aus der Kraft infolge der Einwirkung des Biegemomentes und aus einem der Seitenflächen des abgetrennten

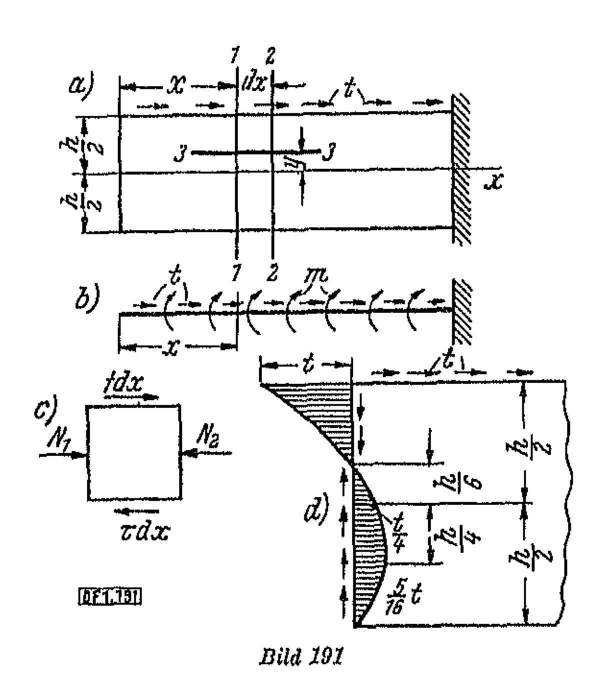


Bild 191

Elementes proportionalen Teil der gesamten Längskraft N im Querschnitt zusammensetzen.

$$N_1 = \frac{MS}{J} + \frac{N\left(\frac{h}{2} - y\right)}{h}; \quad N_2 = \frac{M + dM}{J} S + \frac{N + dN}{h}\left(\frac{h}{2} - y\right).$$

Projiziert man alle Kräfte auf die X-Achse, so erhalten wir:

$$(t - \tau)\, dx = N_2 - N_1 = \frac{dM}{J} S + \frac{dN}{h}\left(\frac{h}{2} - y\right).$$

r die Spannung τ:

$$\tau = t - \frac{dMS}{dxJ} - \frac{dN}{dx}\frac{\left(\frac{h}{2} - y\right)}{h}. \tag{6.32}$$

$\frac{M}{x} = m = \frac{th}{2}$ und $\left|\frac{dN}{dx}\right| = t$ ein, so finden wir nach der Re-

$$\tau = t\left(\frac{\frac{h}{2} + y}{h} - \frac{hS}{2J}\right).$$

ür

$$S = \frac{1}{2}\left(\frac{h^2}{4} - y^2\right) \quad \text{und} \quad J = \frac{h^3}{12}$$

et man zur Abkürzung $\frac{y}{h} = \eta$ (die relative Ordinate), so er-

mformung:

$$\tau = t\left(3\eta^2 + \eta - \frac{1}{4}\right). \tag{6.33}$$

weist auf ein parabolisches Gesetz der Verteilung der Span-
lie äußersten Fasern und die neutrale Achse finden wir:

$$y = +\frac{h}{2}; \qquad \eta = \frac{1}{2}; \qquad \tau = t;$$

$$y = 0; \qquad \eta = 0; \qquad \tau = -\frac{t}{4};$$

$$y = -\frac{h}{2}; \qquad \eta = -\frac{1}{2}; \quad \tau = 0.$$

uktion der τ-Linie ermitteln wir zusätzlich seinen Wert bei

.en zweiten Nullpunkt der Linie, indem wir den rechten Teil der

gleich Null setzen und die erhaltene quadratische Gleichung

$$\text{bei } \eta = -\frac{1}{4}, \qquad \tau = -\frac{5}{16}t;$$

$$-\frac{1}{4} = 0, \quad \text{woraus} \quad \eta_1 = +\frac{1}{6}, \quad \eta_2 = -\frac{1}{2}.$$

Fasern ist die Spannung τ gleich der tangentialen Belastung t,
Grund des Gesetzes der Gegenseitigkeit sein muß. Die τ-Linie
Bild 191, d dargestellt, wo mit Pfeilen außerdem die Richtung
g angegeben ist.

Zur Überprüfung der gefundenen Lösung (6.33) muß man sie in die Gleichgewichtsgleichung

$$\int_F \tau\, dF = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \tau \cdot 1 \cdot dy = 0$$

einsetzen. Führt man die Integration durch, so überzeugen wir uns, daß sich die Gleichheitsbedingung identisch erfüllt. Wenn an der oberen und unteren Fläche des Balkens eine gleichmäßige Belastung t entgegengesetzter Richtung wirkt (Bild 192, a), so bleibt der Gang der Lösung derselbe, aber im rechten Teil der Gleichung (6.32) ist $M = t h x$ und $N = 0$ einzusetzen. Führt man ferner ähnliche Umformungen wie vorher durch, so kommen wir zu der Formel:

$$\tau = t\left(6\eta^2 - \frac{1}{2}\right). \qquad (6.34)$$

Die τ-Linie ist parabolisch in Bild 192, a dargestellt.

Bei gleicher Richtung der tangentialen Belastung an beiden Flächen (Bild 192, b) wird der Balken keine Biegung erleiden, da die Belastungen t auf

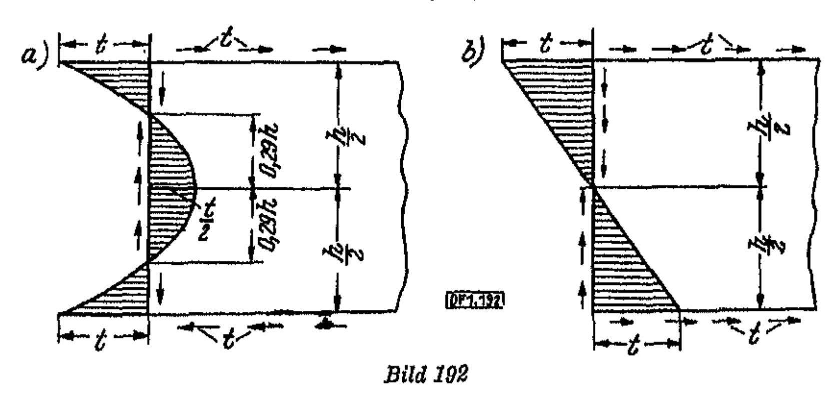


Bild 192

eine in der Achse des Balkens wirkende gleichmäßig verteilte Längskraft von der Intensität $2t$ zurückgeführt werden. Setzt man in (6.32) $N = 2tx$ ein und führt man dieselben Umbildungen durch, so kommen wir zu der Formel

$$\tau = 2t\eta, \qquad (6.35)$$

die ein lineares Gesetz der Schubspannungsverteilung über den Querschnitt angibt (Bild 192, b), wobei dieser Fall statisch dem einfachen Druck gleichwertig ist. Die Formeln (6.34) und (6.35) kann man auch unmittelbar mit Hilfe von (6.33) erhalten, indem man die Einwirkungen der oberen und unteren Belastung addiert.

6.07 Überprüfung der Schubspannungen bei der Berechnung von Balken Hebelarm des inneren Kräftepaares

A. Bei den üblichen Verhältnissen zwischen der Stützweite und der Höhe des Querschnitts übersteigen die größten Normalspannungen im Balken um ein

Vielfaches die größten Schubspannungen. Bei der Wahl der Querschnitte werden deren Abmessungen auf Grund des größten Biegemoments festgelegt, indem man die Formel $W = \frac{M_{max}}{\sigma_{b\,zul}}$ benutzt und alsdann nötigenfalls die Schubspannungen überprüft. Die größten Schubspannungen in den gewöhnlich in der Praxis angewandten Querschnitten ergeben sich auf der Ebene der neutralen Achse. Zu ihrer Ermittlung muß man das statische Moment des halben Querschnitts in bezug auf die neutrale Achse berechnen. Bezeichnet man dieses mit S_0, so erhalten wir die Festigkeitsbedingung des Balkens bezüglich der Schubspannungen in der Form:

$$\tau_{max} = \frac{Q_{max} S_0}{J b_0} \leqq \tau_{zul}, \tag{6.36}$$

worin b_0 die Breite des Querschnitts an der neutralen Achse ist.

Die zulässige Schubspannung τ_{zul} für Stahlträger wird zu 900 kg/cm² bei Ст. Oc. und Ст. 2 und 1000 kg/cm² bei Ст. 3[1]) angenommen. Die Dicke des Steges der gewalzten Träger wird genügend stark ausgeführt, und die Schubspannung τ_{max} erweist sich bei den üblichen Verhältnissen $\frac{h}{l}$ niedriger als die zulässige.

Bei hohen genieteten und geschweißten Trägern ist die Stegstärke im Verhältnis weit geringer als bei den gewalzten Trägern. Daher ist es üblich, die Schubspannungen im Steg der zusammengesetzten Träger zu überprüfen.

Das Holz leistet dem Spalten längs der Fasern wesentlich schlechteren Widerstand als dem Querdurchschneiden der Fasern. Daher können bei der Biegung von Holzbalken die Spannungen, die in der Ebene der neutralen Schicht ein

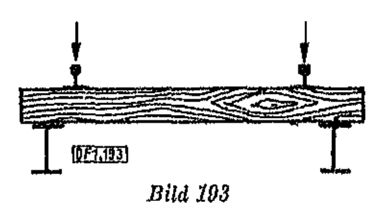


Bild 193

Spalten bewirken können, von Bedeutung sein. Die zulässige Scherspannung bei der Biegung von Balken aus Kiefern- und Fichtenholz (längs der Fasern) wird mit $\tau_{b\,zul} = 20$ kg/cm² angenommen[2]).

Eine Überprüfung der Schubspannungen bei der Berechnung von Balken ist dann erforderlich, wenn das Biegemoment, auf Grund dessen der Querschnitt gewählt wird, klein, die Querkraft aber groß ist. Dies kann entweder bei kleinen Spannweiten und großen Belastungen oder aber unabhängig von der Spannweite bei Anordnung schwerer Belastungen in der Nähe der Auflager vorkommen. Als Beispiel des letzten Falles kann eine Eisenbahnschwelle aus Holz (Bild 193) dienen, die durch das Gewicht einer Lokomotive, das über die Schienen in Form von Einzellasten in der Nähe der Auflager übertragen wird, belastet ist. Ein nur

---

[1]) *Anm. d. deutschen Redaktion:* Deutsche zulässige Schubspannungswerte sind: (St 00.12) $\tau_{zu} =$ 960 kg/cm², (St 37.12) $\tau_{zul} = 1120$ kg/cm², (St 52) $\tau_{zul} = 1680$ kg/cm².

[2]) *Anm. d. deutschen Redaktion:* Die deutschen entsprechenden Werte $\tau_{zul} = 9$ kg/cm².

auf Grund des Biegemoments gewählter Querschnitt des Querträgers würde sich als nicht widerstandsfähig genug gegenüber den Scherspannungen erweisen.

Bei der Berechnung der Verbindungsmittel zusammengesetzter Träger (der Niete, Schweißnähte usw.) muß man die Scherkraft im horizontalen Schnitt ermitteln, die auf einen gewissen Längenabschnitt des Trägers entfällt. Zu diesem Zweck bestimmen wir zuerst die Scherkraft t für die Längeneinheit des Balkens durch Multiplikation der entsprechenden Schubspannung τ_x mit der Breite des Querschnitts

$$t = \tau \cdot b \cdot 1 = \frac{QS}{J}. \tag{6.37}$$

Wenn der Querschnitt des Balkens konstant ist, so ist auch $J = \text{const}$, und für den betrachteten horizontalen Schnitt ist $S = \text{const}$. Dies bedeutet, daß die Längsscherkraft t sich über die Länge des Balkens proportional der Querkraft ändert.

Im Falle einer konstanten Querkraft in irgendeinem Längenabschnitt des Balkens wird die horizontale Scherkraft in diesem Abschnitt $T_a = \frac{QS}{J} a$ sein, worin a die Länge des Abschnitts ist.

Wenn sich die Querkraft im Abschnitt ändert, so wird die Scherkraft durch

$$T = \int_{x_1}^{x_2} t \, dx = \frac{S}{J} \int_{x_1}^{x_2} Q \, dx$$

ausgedrückt, worin x_1 und x_2 die Abszissen des Anfangs und des Endes des Abschnitts sind. Da $Q\,dx = dM$ ist, so erhalten wir, wenn wir die Momente am Anfang und Ende des Abschnitts mit M_1 und M_2 bezeichnen,

$$T = \frac{S}{J} (M_2 - M_1). \tag{6.38}$$

Die letzte Formel ist für Berechnungen sehr gut geeignet. Bei der Berechnung zusammengesetzter Träger ermittelt man zur Vereinfachung nicht selten nur den

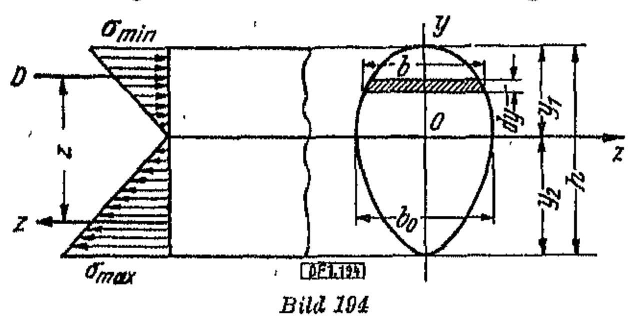


Bild 194

größten Wert der Scherkraft t auf Grund der größten Querkraft in dem am stärksten beanspruchten Abschnitt und nimmt dann diesen als gleichbleibend über die ganze Länge des Abschnitts an.

Der Formel (6.36) kann man eine für den Gebrauch geeignetere Form geben, wenn man den Begriff des Hebelarmes des inneren Kräftepaares, d. h. des Ab-

standes der Resultierenden der Zug- und Druckkräfte im Querschnitt einführt. Bezeichnet man diese Resultierenden mit Z und D (Bild 194), und denkt man daran, daß $|Z| = |D|$ ist, so kann man die Bedingung (6.3) der Äquivalenz der inneren und äußeren Kräfte in die Form

$$\int_F \sigma \, dF \cdot y = Z z = D z = M \tag{6.39}$$

bringen, worin z der Hebelarm des inneren Kräftepaares ist[1]). Die Kräfte Z und D finden wir leicht mit Hilfe derselben Methode, die im Kapitel 6.04 bei der Ableitung der Formeln der Schubspannungen angewendet wurde. Es ist:

$$D = \int_0^{y_1} \sigma b \, dy = \frac{M}{J} \int_0^{y_1} y \, b \, dy = \frac{M S_{\text{oben}}}{J}$$

$$Z = \int_0^{y_2} \sigma \, b \, dy = \frac{M}{J} \int_0^{y_2} y \, b \, dy = \frac{M S_{\text{unten}}}{J},$$

worin S_{oben} und S_{unten} die statischen Momente der oberen und unteren Hälfte des Querschnitts darstellen. Da $|S_{\text{oben}}| = |S_{\text{unten}}| = S_0$ ist, so erhalten wir, wenn wir die Werte Z und D in die Gleichung (6.39) einsetzen,

$$z = \frac{J}{S_0}, \tag{6.40}$$

d. h. der Hebelarm des inneren Kräftepaares ist stets gleich dem Trägheitsmoment dividiert durch das statische Moment der Querschnittshälfte. Aus diesem Grunde kann man die Formel (6.36) wie folgt umschreiben:

$$\tau_{\max} = \frac{Q}{b_0 z}. \tag{6.41}$$

Für den rechteckigen Querschnitt ist $S_0 = \dfrac{b h^2}{8}$ und $z = \dfrac{2}{3} h$. Für den runden Querschnitt finden wir (Kapitel 6.05):

$$S_0 = \frac{2 r^3}{3}; \quad z = \frac{\pi r^4}{4} : \frac{2 r^3}{3} = \frac{3}{8} \pi r \approx 0{,}6 d.$$

Für gewalzte I-Träger ist der Wert des Hebelarmes des inneren Kräftepaares in der I-Profil-Tafel aufgeführt und beträgt im Mittel 0,85 h.

6.08 Balken von gleicher Festigkeit gegen Biegung

Bei der Ableitung der grundlegenden Biegungsformeln wurde angenommen, daß der Querschnitt des Balkens konstant ist. Wenn sich jedoch die Querabmessungen des Balkens gleichmäßig über die Länge ändern, so wird der zur Achse senkrechte Schnitt nicht senkrecht zu einer Seitenfläche stehen. Hieraus kann man schon sofort folgern, daß die Schubspannungen am Querschnitts-

[1]) Hier ist die Bezeichnung *Arm des inneren Kräftepaares* eingeführt, die in den Lehrbüchern für Stahlbeton und in den Berechnungsnormen der Stahlbetonkonstruktionen üblich sind.

umriß, allgemein gesagt, nicht parallel zum Umriß gerichtet sein werden, da das an der Oberfläche des Balkens abgegrenzte Flächenelement dF' (Bild 177) nicht senkrecht zu dem entsprechenden Flächenelement dF des Querschnitts steht und man daher das Gesetz der Gegenseitigkeit der Schubspannungen nicht anwenden kann. Folglich erweist sich die Formel $\tau = \frac{QS}{Jb}$, die, wie bekannt, sehr genaue Ergebnisse für einen Balken mit schmalem rechteckigem Querschnitt liefert, als nicht anwendbar, wenn sich z. B. die Höhe des Querschnitts über die Länge des Balkens ändert. Es ist offensichtlich, daß auch bei Anwendung der Formel der Normalspannung $\sigma = \frac{My}{J}$ bei Balken mit veränderlichem Querschnitt ein mehr oder weniger beträchtlicher Fehler entstehen kann.

Die praktische Bedeutung der Balken mit veränderlichem Querschnitt ist jedoch sehr groß. In einem Balken mit konstantem Querschnitt wird die zulässige Normalspannung tatsächlich nur in den äußersten Fasern des gefährdeten Querschnitts voll ausgenutzt. In dem übrigen Teil des Balkens ist das Material nicht voll und um so weniger angespannt, je kleiner das Biegemoment ist. Wenn man daher die Abmessungen des Querschnitts entsprechend der Abnahme des Biegemoments verringert, so kann man eine bedeutende Ersparnis hinsichtlich des Materialverbrauchs erzielen. Man kann sogar ein solches Gesetz für die Änderung der Querschnittsabmessungen über die Länge des Balkens ermitteln, daß bei der gegebenen Belastung die Spannungen der äußersten Fasern in allen Querschnitten gleich werden. Derartige Balken werden *Balken von gleicher Festigkeit gegen Biegung* genannt.

Wenn man annimmt, daß in einem Balken mit veränderlichem Querschnitt die Normalspannungen dem gleichen linearen Gesetz (6.12) folgen wie auch in einem mit konstantem Querschnitt, so erhalten wir zur Ermittlung der Balkenform von gleicher Festigkeit die Gleichung:

$$W(x) = \frac{M(x)}{\sigma_{b\,zul}},$$

worin $M(x)$ und $W(x)$ Funktionen der Abszisse x des Querschnitts darstellen. Bei gegebener Belastung kann der Wert $M(x)$ leicht gefunden werden, und er wird daher als bekannte Funktion in die Gleichung eingehen. Das Widerstandsmoment muß sich proportional dem Biegemoment ändern, jedoch genügt diese Bedingung zur Bestimmung der Balkenform meistenteils nicht, und es müssen zusätzliche Bedingungen eingeführt werden[1]).

Als Beispiel ermitteln wir die Form eines Balkens von gleicher Festigkeit rechteckigen Querschnitts mit einer konstanten Breite b für den Fall, daß der Balken an einem Ende eingespannt und mit einer gleichmäßigen Belastung belastet ist (Bild 195, a). Dann haben wir:

$$M(x) = \frac{qx^2}{2}, \quad \frac{bh^2}{6} = \frac{qx^2}{2\sigma_{b\,zul}},$$

woraus sich ergibt

$$h = x\sqrt{\frac{3q}{b\,\sigma_{b\,zul}}} \tag{6.42}$$

[1]) Eine Ausnahme bilden die Querschnitte, deren Widerstandsmoment sich als Funktion nur eines Parameters darstellt, z. B. ein runder, quadratischer usw. Querschnitt.

ermittelt, d. h. die Höhe des Querschnitts ändert sich nach einem linearen Gesetz. Der Balken von gleicher Festigkeit hat die Form eines Keiles (Bild 195, b).

In der Elastizitätstheorie ist eine genaue Lösung der Aufgabe über die Biegung eines Keiles infolge einer am Ende angreifenden Last und auch infolge einer durchgehenden Belastung ermittelt worden. Diese Lösung zeigt, daß bei einem kleinen Winkel α die Normalspannungen im Querschnitt einem Gesetz folgen, das dem linearen sehr nahe ist. Bei $\alpha = 20°$ ergibt sich nach der elementaren Theorie für den Wert σ_{max} ein Fehler von etwa 10%. Die Schubspannungen ändern sich dagegen nach einem anderen Gesetz als bei einem Balken mit konstantem Querschnitt. Sie erweisen sich an der neutralen Achse gleich Null und an den äußersten Fasern angenähert gleich $\frac{3Q}{F}$. Auf Grund dieses (und anderer) Ergebnisse der genauen Theorie kann man annehmen, daß bei einer ausreichend allmählichen und gleichmäßigen Änderung der Querschnittsabmessungen die elementare Formel der Normalspannung mit genügender Genauigkeit für die Praxis anwendbar ist. Die Schubspannungen sind, wie wir gesehen haben, in massiven Balken gewöhnlich nicht von entscheidender Bedeutung hinsichtlich der Festigkeit und ändern daher nicht wesentlich die erhaltene Balkenform von gleicher Festigkeit.

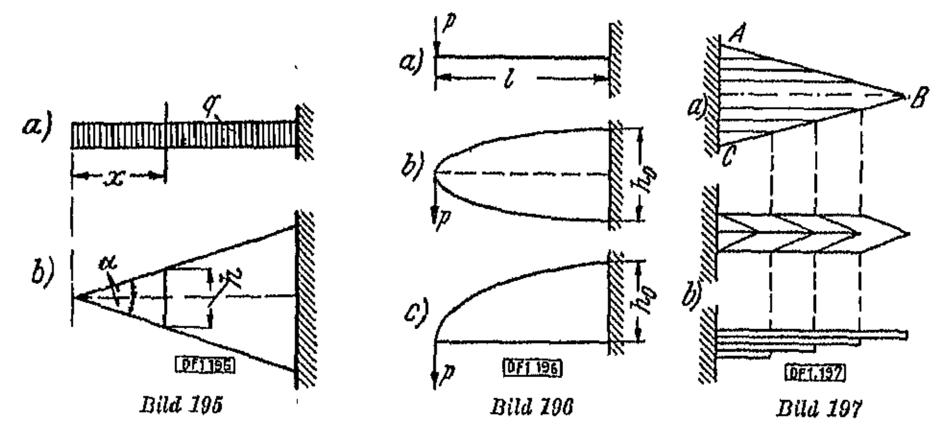


Bild 195 Bild 196 Bild 197

Lösen wir die vorherige Aufgabe für den Fall der Belastung des Balkens mit einer Einzellast am Ende (Bild 196, a).

Dann haben wir:
$$M(x) = Px, \quad \frac{bh^2}{6} = \frac{Px}{\sigma_{bzul}},$$

woraus sich
$$h^2 = \frac{6P}{b\,\sigma_{bzul}}\,x \tag{6.43}$$

ergibt. Die Gleichung (6.43) zeigt, daß sich die Höhe des Balkens von gleicher Festigkeit nach dem parabolischen Gesetz ändern muß (Bild 196, b). Da die Fläche der Parabel gleich $\frac{2}{3}\,lh_0$ ist, so ergibt sich im Vergleich mit dem Balken konstanter Höhe eine Materialersparnis von etwa 33%. Diese Ersparnis hat

schon *Galilei* festgestellt, der eine etwas andere Balkenform mit einer ebenen unteren Fläche und oben mit parabolischen Umrissen vorgeschlagen hat (Bild 196, c).

Wenn wir eine konstante Balkenhöhe beibehalten und die Breite b des Querschnitts ändern, so erhalten wir auf Grund der Formel (6.43):

$$b = \frac{6P}{h^2 \sigma_{bzul}} x. \tag{6.44}$$

Die Breite muß sich nach einem linearen Gesetz ändern, und der Balken von gleicher Festigkeit wird im Grundriß die Form einer dreieckigen Platte haben (Bild 197, a). Wenn wir die Platte in Streifen aufteilen und diese, wie in Bild 197, b dargestellt, aufeinander legen, so erhalten wir eine Blattfeder. Das summarische Widerstandsmoment der Streifen in einem beliebigen Querschnitt wird gleich dem Widerstandsmoment der Platte sein (wenn man die Reibung vernachlässigt). Demzufolge kann man eine Feder angenähert wie einen Balken von gleicher Festigkeit berechnen. Die Querkraft in allen Querschnitten ist $Q = P = \text{const}$, während die Querschnittsfläche an der Angriffsstelle gleich Null wird. Es ist augenscheinlich, daß man zur Aufnahme der Schubspannungen die Form der Platten am Ende ändern muß.

Die praktische Form einer Waggonfeder ist in Bild 198 dargestellt.

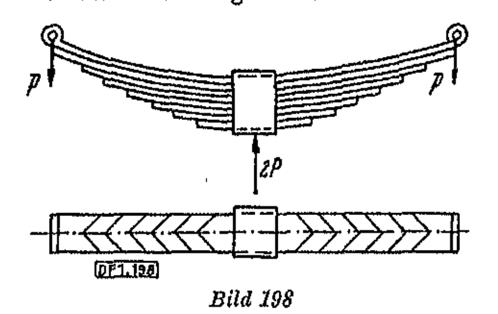


Bild 198

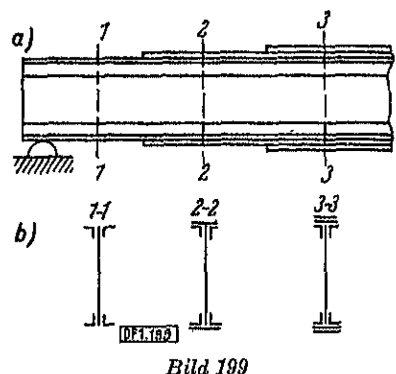


Bild 199

In genieteten I-Trägern erhält man eine Verringerung der Querschnittsabmessungen durch abgestufte Längen der horizontalen Gurtplatten entsprechend der Verringerung des Biegemoments (Bild 199), wodurch eine Gewichtsersparnis erreicht wird. In geschweißten Trägern wird gewöhnlich die Stärke der horizontalen Platte verringert. Wegen der scharfen Querschnittsänderung an den Stufenstellen der Gurtplatten ist eine zusätzliche Überprüfung der Spannungen erforderlich.

Zum Schluß bemerken wir, daß die Balken mit veränderlichem Querschnitt eine geringere Steifigkeit besitzen und bedeutend größere Durchbiegungen als die Balken mit konstantem Querschnitt geben.

6.09 Allgemeiner Fall des ebenen Spannungszustandes Hauptspannungen. Größte Schubspannungen

A. In den vorhergehenden Kapiteln wurden die Spannungen untersucht, die bei der Biegung des Balkens in seinen Querschnitten und auch in den parallel zur neutralen Achse geführten Längsschnitten entstehen. In einigen Fällen

erweisen sich die Spannungen in den zur Balkenachse geneigten Schnitten größer und folglich gefährlicher hinsichtlich der Festigkeit. Bevor wir zu ihrer Ermittlung übergehen, wollen wir den allgemeineren Fall der Wirkung von Kräften auf einen Körper untersuchen. Die hier erhaltenen Ergebnisse wird man bei der späteren Untersuchung der Spannungen bei der Biegung des Balkens leicht anwenden können.

Untersuchen wir einen Körper von der Form einer trapezförmigen Platte mit beliebiger an den Seitenflächen wirkender Belastung (Bild 200). Ordnen wir die Koordinatenfläche xy parallel zur vorderen Plattenfläche an, und nehmen wir die Dicke d der Platte gleich Eins an. Die an den Seitenflächen angreifende Belastung setzen wir gleichmäßig verteilt in Richtung der z-Achse voraus. Bei einer solchen Bedingung kann man rechnen, daß die Verteilung der Spannungen in einer beliebigen zur xy parallelen Ebene die gleiche sein wird. Daher können

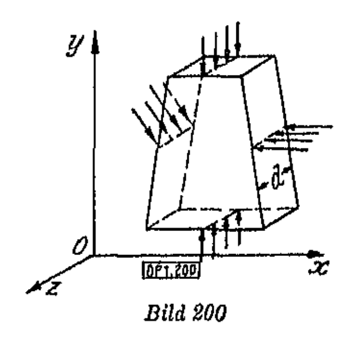


Bild 200

wir die z-Achse formal entfernen und die Erscheinung so betrachten, als ob sie in einer Ebene vor sich geht.

In der Elastizitätstheorie werden zwei entgegengesetzte Fälle unterschieden:
1. Die Dicke d ist sehr klein (eine dünne Platte), und
2. die Abmessung d ist sehr groß, z. B. der Körper einer langen Stützmauer mit einer gleichmäßig über die Länge verteilten Belastung.

Im ersten Falle wird eine Änderung der Plattendicke, die sich durch die Einwirkung einer Seitenbelastung ergibt (wenn die Piossonsche Zahl nicht gleich Null ist), durch nichts behindert. Folglich sind in Richtung der z-Achse keine Spannungen vorhanden. Dieser Fall heißt der *verallgemeinerte ebene Spannungszustand*. Wenn die Abmessung d groß ist, werden die einzelnen Platten, in die der Körper durch zur Koordinatenebene xy parallele Ebenen unterteilt werden kann, und die sich unter gleichen Belastungsbedingungen befinden, versuchen, sich auf gleiche Art in Richtung der z-Achse zu verformen. An einer von den Enden des Körpers ausreichend weit entfernten Platte kann eine Verformung in Richtung der z-Achse wegen der Behinderung von seiten der benachbarten Platten nicht mehr vor sich gehen. Einen solchen Fall nennt man eine *ebene Formänderung*. Das Fehlen der Formänderungen ruft parallel zur z-Achse das Auftreten von Spannungen hervor (einen gegenseitigen Druck der Platten). In der Elastizitätstheorie wird bewiesen, daß diese Spannungen keinen selbständigen Charakter haben und als Funktionen der parallel zur xy-Ebene gerichteten Spannungen anzusehen sind. Folglich wird sowohl im Falle des ebenen Span-

nungszustandes als auch im Falle der ebenen Formänderung die Aufgabe auf die Untersuchung der parallel zur xy-Ebene gerichteten Spannungen zurückgeführt.

B. Nehmen wir an, daß in irgendeinem Punkt a der Platte die Spannungen an den parallel zu den Koordinatenachsen gelegenen elementaren Flächenelementen ab und ac bekannt sind und die Spannungen an dem durch den gleichen Punkt gehenden geneigten Flächenelement ef gefunden werden sollen (Bild 201). Zur Lösung dieser Aufgabe benutzen wir selbstverständlich das allgemeine, im Abschnitt 3 angewandte Verfahren, d. h. wir schneiden am Punkt a ein elementares dreieckiges Prisma abc heraus, dessen Seite bc parallel ef ist. Wegen der unendlich kleinen Abmessungen des Prismas kann man die Spannungen an den Flächenelementen bc und ef als gleich annehmen.

Bezeichnen wir die Kantenlänge bc mit ds und die Kantenlängen ac und ab mit dx und dy. Da die Länge des Prismas in Richtung der z-Achse (die Dicke der Platte) oben gleich Eins angenommen wurde (Absatz A), so werden die

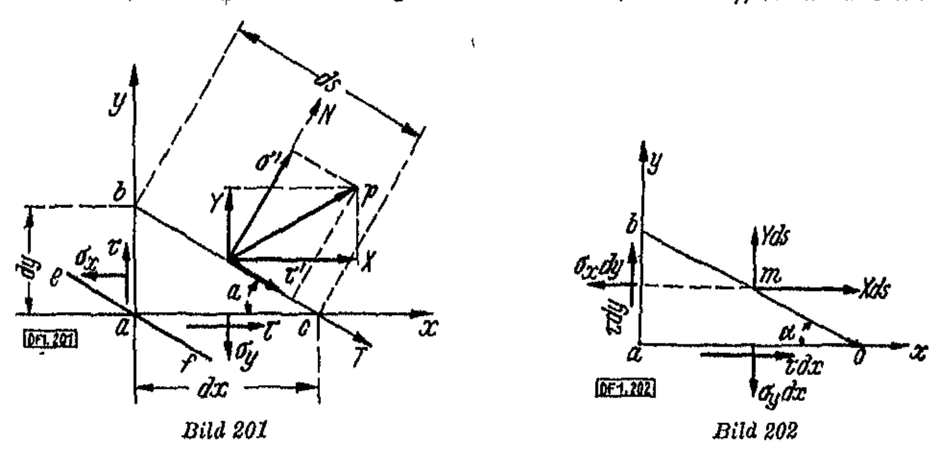


Bild 201 *Bild 202*

Seitenflächen entsprechend ds, dx und dy sein. Vereinbaren wir, den Neigungswinkel der Kante bc zur x-Achse im Sinne des Uhrzeigers abzulesen. Die in Bild 201 eingetragenen Richtungen der Spannungen an den Flächen des Prismas vereinbaren wir als positiv anzusehen. Die volle Spannung p am Flächenelement bc kann man, wie dies im Kapitel 3.03 gezeigt wurde, entweder in die Komponenten σ' und τ' in Richtung der Normalen N und der Tangente T, oder in die Komponenten X und Y in Richtung der Koordinatenachsen zerlegen. Benutzen wir das letztere Verfahren, und stellen wir zwei Gleichgewichtsbedingungen des Prismas auf, indem wir die an ihm angreifenden Kräfte (deren Größe in Bild 202 eingetragen ist) auf die Koordinatenachsen projizieren[1]). Beachtet man, daß $dx = ds \cos\alpha$ und $dy = ds \sin\alpha$ ist, so erhalten wir:

$$\sum X = X\,ds - \sigma_x\,ds \sin\alpha + \tau\,ds \cos\alpha = 0,$$

$$\sum Y = Y\,ds - \sigma_y\,ds \cos\alpha + \tau\,ds \sin\alpha = 0.$$

[1]) Das Eigengewicht des Prismas vernachlässigen wir als einen unendlich kleinen Wert höherer Ordnung.

Hieraus finden wir die Komponenten X und Y der Spannung p:

$$\left.\begin{aligned} X &= \sigma_x \sin\alpha - \tau\cos\alpha, \\ Y &= \sigma_y \cos\alpha - \tau\sin\alpha. \end{aligned}\right\} \qquad (6.45)$$

Jetzt kann man die Werte der Normal- und Tangentialspannung am Flächenelement bc erhalten, indem man die Komponenten x und y auf die Achsen N und T projiziert[1]) (Bild 201):

$$\sigma' = Y\cos\alpha + X\sin\alpha, \quad \tau' = X\cos\alpha - Y\sin\alpha.$$

Setzt man in diese die Werte X und Y aus (6.45) ein, so erhalten wir:

$$\left.\begin{aligned} \sigma' &= \sigma_y \cos^2\alpha + \sigma_x \sin^2\alpha - 2\tau\sin\alpha\cos\alpha, \\ \tau' &= (\sigma_x - \sigma_y)\sin\alpha\cos\alpha - \tau(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha), \end{aligned}\right\} \qquad (6.46)$$

oder, indem man Funktionen des Doppelwinkels einführt:

$$\left.\begin{aligned} \sigma' &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\cos 2\alpha - \tau\sin 2\alpha, \\ \tau' &= \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\sin 2\alpha - \tau\cos 2\alpha. \end{aligned}\right\} \qquad (6.47)$$

Die erhaltenen Gleichungen geben die uns interessierende Beziehung zwischen den Spannungen an dem geneigten Flächenelement und an den zwei zu den Koordinatenebenen parallelen Flächenelementen an. Wenn man an der Seitenfläche eines Körpers ein Prisma auf eine solche Weise herausschneidet, daß die Fläche bc mit der Oberfläche zusammenfällt, so liefern die Gleichungen (6.47) die Abhängigkeit zwischen der Belastung σ' und τ' (d. h. der äußeren Belastung) und den Spannungen σ_x, σ_y und $\tau_x = \tau_y$ an den Schnittebenen[2]).

Bei der Ableitung nehmen wir an, daß die Schubspannungen τ_x und τ_y auf Grund des Gesetzes der Gegenseitigkeit gleich sind. Bemerken wir, daß hierfür keine Notwendigkeit vorlag, da die dritte Gleichgewichtsbedingung des Prismas den Beweis des Gesetzes der Gegenseitigkeit der Schubspannungen liefert. Nehmen wir an, daß die Spannungen τ_x und τ_y verschieden sind, und setzen wir die Gleichung der Momente in bezug auf den Punkt m in der Mitte der Fläche bc (Bild 202) an. Zu der Gleichung gehören nur die Momente der beiden Kräfte $\tau_x\,dx$ und $\tau_y\,dy$, da die Richtungen der übrigen Kräfte durch den Punkt m gehen. Es ist:

$$\tau_y\,dy\,\frac{dx}{2} - \tau_x\,dx\,\frac{dy}{2} = 0,$$

woraus $\tau_x = \tau_y$ wird.

Vermerken wir noch eine wichtige Eigenschaft der Normalspannungen. Außer der Spannung σ' am Flächenelement bc (Bild 201) ermitteln wir die Spannung σ'' an einem zu diesem senkrechten Flächenelement. Hierzu genügt es, in die erste

[1]) Nach dem Lehrsatz über die Projektion der Resultierenden.
[2]) In der Elastizitätstheorie heißen die Gleichungen (6.47) in diesem Falle Oberflächenbedingungen.

der Gleichungen (6.46) an Stelle des Winkels α den Winkel $\alpha + 90°$ einzusetzen. Auf diese Weise erhalten wir:

$$\sigma'' = \sigma_x \cos^2\alpha + \sigma_y \sin^2\alpha + 2\tau \sin\alpha \cos\alpha.$$

Addiert man die Glieder dieser Gleichung und der ersten von den Gleichungen (6.46), so erhalten wir:

$$\sigma' + \sigma'' = \sigma_x + \sigma_y.$$

Hieraus folgern wir, daß *die Summe der Normalspannungen an zwei beliebigen senkrecht zueinander stehenden Flächenelementen, die durch einen gegebenen Punkt geführt sind, eine konstante Größe darstellt:*

$$\sigma' + \sigma'' = \text{const}.$$

C. Gehen wir zu der Ermittlung der größten Normal- und Schubspannung über, die in einem Punkte wirken, an dem ein elementares Prisma abgegrenzt ist. Wie im Kapitel 3.03 erwähnt, heißen die Spannungen σ'_{max} und σ'_{min} Hauptspannungen im gegebenen Punkt und die Flächenelemente (Ebenen), an denen sie wirken, Hauptflächenelemente (Hauptebenen). Dort wurde auch gezeigt, daß die Schubspannungen an den Hauptflächenelementen gleich Null sind. Es ist nicht schwer, sich davon zu überzeugen, daß diese Eigenschaft der Hauptflächenelemente auch im allgemeinen Falle des ebenen Spannungszustandes erhalten bleibt. Die Hauptspannungen liegen tatsächlich dann vor, wenn die Ableitung $\frac{d\sigma'}{d\alpha} = 0$ ist. Schreibt man den Wert der Ableitung

$$\frac{d\sigma'}{d\alpha} = (\sigma_x - \sigma_y)\sin 2\alpha - 2\tau \cos 2\alpha$$

auf, und vergleicht man ihn mit der zweiten der Gleichungen (6.47), so sehen wir, daß, falls die Ableitung $\frac{d\sigma'}{d\alpha}$ den Wert Null annimmt, dann auch die Spannung τ' gleich Null sein muß.

Zur Ermittlung der Größe der Hauptspannungen gehen wir auf folgende Weise vor. Nehmen wir an, daß das Flächenelement bc (Bild 203) das Hauptflächenelement ist, dann ist $\tau' = 0$, und die Gesamtspannung $p = \sigma'$ ist senkrecht zum Flächenelement gerichtet. Die Projektionen der Gesamtspannung auf die Achsen x und y werden in diesem Falle sein:

$$X = p \sin\alpha; \qquad Y = p \cos\alpha.$$

Setzt man diese Werte in (6.45) ein und dividiert man die erhaltenen Gleichungen durch $\cos\alpha$, so erhalten wir nach Umformungen:

$$\left.\begin{aligned} (p - \sigma_x)\operatorname{tg}\alpha + \tau &= 0,\\ p - \sigma_y + \tau \operatorname{tg}\alpha &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{6.48}$$

Als Unbekannte erscheinen hier die Spannung p und der Neigungswinkel α des Hauptflächenelements. Aus der zweiten Gleichung (6.48) erhalten wir:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sigma_y - p}{\tau}. \tag{6.49}$$

Führen wir diesen Wert in die erste Gleichung ein, so kommen wir zu der quadratischen Gleichung

$$p^2 - p(\sigma_x + \sigma_y) + \sigma_x \sigma_y - \tau^2 = 0.$$

Die Lösung dieser Gleichung ist:

$$p = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}\right)^2 - \sigma_x \sigma_y + \tau^2}.$$

Das Plusvorzeichen vor der Wurzel entspricht offensichtlich $p_1 = \sigma'_{max}$ und das Minusvorzeichen $-p_2 = \sigma'_{min}$. Setzt man in dem Ausdruck unter der Wurzel

$$\left(\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}\right)^2 - \sigma_x \sigma_y = \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2,$$

so erhalten wir die Formel der Hauptspannungen in der endgültigen Form:

$$\sigma'_{\substack{max\\min}} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau^2}. \qquad (6.50)$$

Die Formel (6.49) des Neigungswinkels der Hauptflächenelemente lautet:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sigma_y - \sigma'_{\substack{max\\min}}}{\tau}. \qquad (6.51)$$

Setzt man in den rechten Teil von (6.51) σ'_{max} und alsdann σ'_{min} ein, so erhalten wir die Neigungswinkel der entsprechenden Flächenelemente. Der negative Wert

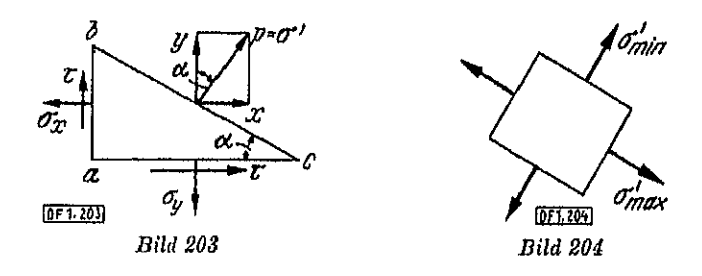


Bild 203 Bild 204

von $\operatorname{tg} \alpha$ weist darauf hin, daß der Winkel α im Gegensinne des Uhrzeigers abzutragen ist.

Zur Ermittlung der größten Schubspannungen in dem betrachteten Punkte schneiden wir nahe desselben mit Hilfe von vier parallel zu den Hauptebenen gerichteten Schnittebenen ein elementares Parallelepiped (d. h. einen unendlich kleinen Balken) heraus (Bild 204). An den Seitenflächen dieses Parallelepipeds sind Schubspannungen nicht vorhanden. Folglich erleidet das Parallelepiped Zug bzw. Druck in zwei aufeinander senkrechten Richtungen (entsprechend den Vorzeichen σ'_{max} und σ'_{min}). In einem solchen Falle sind die größten Schub-

spannungen im gegebenen Punkt, wie dies im Kapitel 3.03 nachgewiesen wurde, gleich der halben Differenz der Hauptspannungen:

$$\tau'_{\substack{\max\\ \min}} = \pm \frac{\sigma'_{\max} - \sigma'_{\min}}{2} = \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau^2}. \tag{6.52}$$

Sie wirken an Flächenelementen, die mit den Seitenflächen des elementaren Parallelepipeds, d. h. mit der Richtung der Hauptflächenelemente, die Winkel von 45° und 135° einschließen.

Es ist nützlich, die nahe Analogie zwischen den abgeleiteten Abhängigkeiten der Theorie des ebenen Spannungszustandes und den grundlegenden Abhängigkeiten der Theorie der Trägheitsmomente herauszustellen (Kapitel 4.06, 4.07). Die Gleichungen (6.46) und (6.47), die die Normal- und Tangentialspannung am geneigten Flächenelement bestimmen, sind tatsächlich den Gleichungen (4.24), die die Trägheitsmomente in bezug auf die gedrehten Achsen ausdrücken, ähnlich. Die Summe der Normalspannungen an zwei senkrecht zueinander stehenden Flächenelementen, die durch einen Punkt geführt sind, ist ebenso ein konstanter Wert wie die Summe der äquatorialen Trägheitsmomente für senkrechte Achsen, die durch den gegebenen Anfangspunkt gehen (4.23). Die Formeln der Hauptspannungen (6.50) und des Neigungswinkels der Hauptflächenelemente (6.51) haben die gleiche Form wie die Formeln der Hauptträgheitsmomente (4.29) und des Neigungswinkels der Hauptachsen (4.30), wobei die Eigenschaften der Hauptflächenelemente den Eigenschaften der Hauptträgheitsmomente analog sind. Die größte Schubspannung im gegebenen Punkt ist gleich der halben Differenz der Hauptspannungen, was vollkommen mit der Abhängigkeit zwischen den größten Zentrifugalmomenten und den Hauptträgheitsmomenten übereinstimmt.

D. Das im vorherigen Punkt angewandte Verfahren zur Ermittlung der größten Schubspannungen ermöglicht es, eine sehr wichtige Schlußfolgerung zu ziehen, die auch in theoretischer Hinsicht interessant ist. Wenn sich ein gegebener Körper im ebenen Spannungszustand befindet, so können wir, wie kompliziert dieser Zustand auch sein mag, in einem beliebigen Punkt mittels der Hauptschnittebenen ein elementares Parallelepiped (einen Balken) herausschneiden, das sich im Zustande des Zugs bzw. Drucks in zwei Richtungen befinden wird.

Hieraus folgt, daß man bei der Untersuchung eines jeden solchen elementaren Balkens, mit anderen Worten *bei der Untersuchung des Spannungszustandes in einem gegebenen Punkt*, voll und ganz alle im Abschnitt 3 in bezug auf den Zug bzw. Druck in zwei Richtungen beschriebenen Methoden anwenden kann. Für jeden Punkt eines Körpers, der sich im ebenen Spannungszustand befindet, kann man z. B. eine Spannungsellipse mit längs der Hauptflächenelemente (Hauptebenen) gerichteten Achsenhälften konstruieren und auf diese Weise ein vollständiges Bild über die Verteilung der Spannungen im gegebenen Punkt geben. Hierbei kann man auch den Mohrschen Kreis benutzen.

Betrachten wir die Anwendung des Mohrschen Kreises zum Auffinden der Hauptflächenelemente und der Hauptspannungen. Diese Aufgabe wird der in Kapitel 3.05 durchgenommenen entgegengesetzt sein. Nehmen wir an, daß uns in irgendeinem Punkte die Spannungen σ_x, σ_y und τ an den parallel zu den

ordinatenebenen gerichteten Flächenelementen bekannt sind, wobei wir zur heren Kennzeichnung annehmen, daß $\sigma_x > \sigma_y > 0$ ist. Tragen wir auf der hse Ox die Strecken $OE = \sigma_x$ und $OD = \sigma_y$ ab (Bild 205). Vom Punkt D s tragen wir senkrecht zu Ox die Strecke $DK = \tau$ auf der positiven Seite der Achse ab, wenn $\tau > 0$ ist, und in negativer Richtung von Y, wenn $\tau < 0$ ist[1]). m Punkt E aus tragen wir eine gleiche Strecke $EM = \tau$ auf der entgegen- setzten Seite ab und zeichnen mit KM, als Durchmesser, einen Kreis. Dann rden die Strecken OA und OB den Wert der Hauptspannungen angeben.

In der Tat ist der Radius des Mohrschen Kreises:

$$AC = CB = KC = \sqrt{DC^2 + KD^2} = \sqrt{\left(\frac{OE - OD}{2}\right)^2 + KD^2}$$
$$= \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau^2}.$$

rner erhalten wir:

$$OC = \frac{OE + OD}{2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2},$$

$$OB = OC + CB = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau^2} = \sigma'_{\max},$$

$$OA = OC - AC = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau^2} = \sigma'_{\min}.$$

r Radius des Kreises gibt den Wert der größten Schubspannungen an. Die chtungen der Hauptflächenelemente werden durch die Linien AK und AM

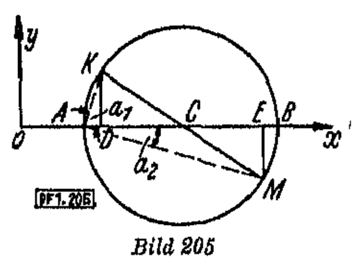


Bild 205

stimmt. Beweisen wir dies. Bezeichnen wir die Winkel KAB und BAM mit und α_2, dann ist $\alpha_1 + \alpha_2 = \sphericalangle KAM = \frac{\pi}{2}$, und aus der Zeichnung erhalten wir:

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = \operatorname{ctg} \alpha_2 = \frac{AE}{EM} = \frac{\sigma_x - \sigma'_{\min}}{-\tau}.$$

a aber $\sigma_x + \sigma_y = \sigma'_{\max} + \sigma'_{\min}$ ist, so ist folglich:

$$\sigma_x - \sigma'_{\min} = \sigma'_{\max} - \sigma_y \quad \text{und} \quad \operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{\sigma_y - \sigma'_{\max}}{\tau}.$$

[1]) Wir erinnern daran, daß die Spannungen τ als positiv anzunehmen sind, wenn sie, wie in Bild 201 gestellt, gerichtet sind, d. h. von dem Scheitelpunkt des rechten Winkels weg, der von den parallel den Koordinatenebenen gerichteten Flächenelementen eingeschlossen ist.

Bei einem Vergleich mit (6.51) sehen wir, daß die Linie AK die Richtung des Flächenelements angibt, an dem σ'_{max} wirkt. Analog erhalten wir:

$$\operatorname{tg} \alpha_2 = \operatorname{ctg} \alpha_1 = \frac{AD}{KD} = \frac{\sigma_y - \sigma'_{min}}{\tau}.$$

Folglich gibt AM die Richtung des Flächenelements an, an dem σ'_{min} wirkt.

6.10 Hauptspannung bei der Biegung. Richtung der Hauptflächenelemente (Hauptebenen). Spannungstrajektorien

A. Die im vorhergehenden Abschnitt erhaltenen Ergebnisse kann man leicht bei der weiteren Untersuchung des Spannungszustandes bei der Biegung anwenden. Zu diesem Zweck schneiden wir aus dem Balken ein Elementarprisma abc (Bild 201) so heraus, daß seine Seitenflächen ab und ac im Quer- und (horizontalen) Längsschnitt des Balkens liegen. Dann werden die Spannungen σ_x und τ bekannt sein und nach den Formeln (6.12) und (6.24) bestimmt. Wenn die Belastung an der oberen Fläche des Balkens, wie das meistens zutrifft, angreift, so wird die Spannung σ_y eine Druckspannung sein und den gegenseitigen Druck der Balkenfasern am Flächenelement ac angeben. Schneidet man ein Prisma aber so heraus, daß die Seitenfläche ac mit der unteren Oberfläche des Balkens zusammenfällt, so werden die Spannungen an dieser Fläche gleich Null sein, da auf die untere Fläche die äußere Belastung nicht einwirkt. Dies bedeutet, daß der gegenseitige Druck der Fasern an der unteren Fläche gleich Null ist und offenbar in Richtung zur oberen Fläche anwächst, wo er am größten sein wird. Bei kontinuierlich verteilter Belastung ist der gegenseitige Druck der Fasern an der oberen Fläche gleich der auf die Flächeneinheit bezogenen Belastung, demnach $\sigma_y = \frac{q}{b}$, worin q die Größe der Belastung auf die Längeneinheit des Balkens und b die obere Breite des Querschnitts darstellen. Die Spannung σ_y wird in diesem Falle im Vergleich mit der Grundbiegungsspannung σ_x (bei den üblichen Verhältnissen der Stützweite und Höhe des Balkens) sehr gering sein. Im Beispiel 34 des Kapitels 6.02 macht σ_y bei einer Belastung $q = 3{,}6$ kg/cm und einer Querschnittsbreite von 15 cm nur $\frac{3{,}6}{15} = 0{,}24$ kg/cm² aus, während die Grundbiegungsspannung σ_x im gefährlichen Querschnitt fast gleich 100 kg/cm² ist. Einen verhältnismäßig großen Wert haben die Spannungen σ_y in den dünnen Stegen hoher I-Träger (an der Stelle des Überganges zum oberen Flansch), aber auch hier ist in der Regel $\sigma_y \leqq \frac{1}{10}\sigma_x$. Bei einer Belastung mit einer Einzellast können die Spannungen σ_y bei kleiner Berührungsfläche der Last sehr groß sein, aber sie haben einen örtlichen Charakter und nehmen schnell mit der Entfernung von der Last ab. So erreicht z. B. der Druck eines Lokomotivrades auf der Schiene 6000—10000 kg/cm² und mehr, der örtliche Charakter dieses Druckes gestattet es, derart hohe Spannungen ohne Nachteil für die Gesamtfestigkeit der Schiene zuzulassen, wenn nur eine gewisse Zugabe der Schienenhöhe für die Abnutzung vorgesehen wird.

Auf Grund der Ausführungen wird in der elementaren Theorie der gegenseitige Druck der Fasern vernachlässigt. Dann erhalten wir die Formeln der Haupt- und größten Schubspannungen bei der Biegung sowie für den Winkel, der von den Hauptflächenelementen und der x-Achse eingeschlossen wird, aus den Formeln (6.50), (6.51) und (6.52), indem man in diesen $\sigma_y = 0$ setzt:

$$\sigma'_{\substack{\max\\\min}} = \frac{\sigma}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2 + \tau^2}; \tag{6.53}$$

$$\tau'_{\substack{\max\\\min}} = \pm \frac{\sigma'_{\max} - \sigma'_{\min}}{2} = \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2 + \tau^2}; \tag{6.54}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = - \frac{\sigma'_{\substack{\max\\\min}}}{\tau}. \tag{6.55}$$

Da der absoluten Größe nach $\sqrt{\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2 + \tau^2} \geqq \frac{\sigma}{2}$ ist, so ist unabhängig von den Vorzeichen σ und τ in einem beliebigen Punkt des auf Biegung beanspruchten Balkens $\sigma'_{\max} \geqq 0$ und $\sigma'_{\min} \leqq 0$. Darum nennt man $\sigma'_{\max}$ die Hauptzugspannung und $\sigma'_{\min}$ die Hauptdruckspannung.

B. Die Normal- und Schubspannungen im Querschnitt eines Balkens hängen von den Werten M und Q sowie vom Abstand des Querschnittspunktes von der neutralen Achse, d. h. von der Koordinate y ab. Da M und Q ihrerseits bei gegebener Belastung von der Abszisse x des Querschnitts abhängen, so folgt hieraus, daß die Spannungen σ und τ in einem beliebigen Punkt des Balkens Funktionen der Koordinaten x und y des Punktes sind:

$$\sigma = f_1(x, y); \qquad \tau = f_2(x, y).$$

Die analytische Ermittlung der Balkenpunkte mit den größten Werten dieser Funktionen bereitet keine Schwierigkeiten und zerfällt in zwei Operationen:

1. Das Auffinden des gefährdeten Querschnitts und
2. die Suche nach den am stärksten angespannten Punkten im gefundenen Schnitt.

Die Normalspannung in einer Berechnung ist die Spannung im Querschnitt mit dem größten Biegemoment für die von der neutralen Achse am weitesten entfernten Punkte. Als Schubspannung in der Berechnung (bei Querschnittsformen, die gewöhnlich in der Praxis zur Anwendung kommen) ist die Spannung auf der Ebene der neutralen Schicht in einem Querschnitt mit der größten Querkraft anzusehen. In vielen praktischen Aufgaben ist durch diese rechnerischen Spannungen die Festigkeit des Balkens völlig charakterisiert. Es kommen aber auch solche Fälle vor, in denen die Hauptspannungen an geneigten Flächenelementen der Größe nach die größten Spannungen an den Flächenelementen des gefährlichsten Querschnitts übersteigen. Daher ergibt sich die Frage über das Aufsuchen der Balkenpunkte, in denen die Hauptspannungen bei gegebener

Belastung die maximalen von allen nur möglichen sein werden. Die Hauptspannungen $\sigma'_{\substack{max\\min}}$ und die größten Schubspannungen $\tau'_{\substack{max\\min}}$ hängen von den Spannungen σ und τ ab und sind folglich auch Funktionen der Koordinaten x und y des Punktes:

$$\sigma'_{max} = \varphi_1(x, y); \qquad \sigma'_{min} = \varphi_2(x, y); \qquad \tau'_{\substack{max\\min}} = \varphi_3(x, y).$$

Diese funktionalen Abhängigkeiten sind bedeutend komplizierter, so daß das analytische Aufsuchen der Punkte, denen die größten Werte der Hauptspannungen entsprechen, große Schwierigkeiten bereitet. Aus diesem Grunde muß man sich in der Praxis von folgenden Überlegungen leiten lassen. Aus den Formeln (6.53) und (6.54) ist zu ersehen, daß die Hauptspannungen in den Punkten groß sein werden, in denen gleichzeitig große Spannungen σ und τ vorhanden sind. Diese Punkte sind offenbar in den Querschnitten gelegen, in denen M und Q gleichzeitig einen großen Wert erreichen. Manchmal befinden sich M_{max} und Q_{max} in ein und demselben Querschnitt (z. B. am Auflagerquerschnitt einer Konsole); im allgemeinen fallen jedoch die Querschnitte mit M_{max} und Q_{max} nicht zusammen. Daher ist es oft erforderlich, die Hauptspannungen in mehreren Querschnitten zu überprüfen, indem man diese so wählt, daß die Werte M und Q gleichzeitig relativ groß sind.

Um in den gewählten Querschnitten die Punkte mit den größten Hauptspannungen zu ermitteln, vergleichen wir die σ- und τ-Linien im Querschnitt. Wenn wir einen rechteckigen oder runden Querschnitt untersuchen, so können wir schon im voraus sagen, daß die Hauptspannungen in einem beliebigen Punkt die in den äußersten Fasern am Flächenelement des Querschnitts wirkende Spannungen σ nicht übersteigen werden. In der Tat, während die Normalspannung nach einem linearen Gesetz von der neutralen Achse zu den äußersten Fasern hin zunehmen, nehmen die Schubspannungen in der gleichen Richtung bis zum Nullwert nach einem parabolischen Gesetz ab. Daher gibt es im Querschnitt keine derartigen Punkte, in denen die Spannungen σ und τ gleich groß sind. Ein anderes Bild ergibt der I-Querschnitt, bei dem die Schubspannungen von der neutralen Achse weg allmählich abnehmen und an der Übergangsstelle zu den Flanschen mit dem Steg noch recht bedeutend sind, wo gleichzeitig große Normalspannungen auftreten (Bild 187).

Aus diesem Grunde kann in einigen Fällen eine Überprüfung der Hauptspannungen notwendig werden.

Wählen wir z. B. einen gewalzten I-Querschnitt für einen kurzen Träger, der in der Nähe der Auflager durch zwei schwere Einzellasten belastet ist (Bild 206) und dessen Hauptspannungen überprüft werden sollen. Das Material ist Ст. О., $\sigma_{zul} = 1400$ kg/cm² und $\tau_{zul} = 900$ kg/cm²; $M_{max} = 8{,}4$ tm und $Q_{max} = 20$ t. Die M- und Q-Linien sind in der Zeichnung dargestellt. Wählen wir den Querschnitt. Das erforderliche Widerstandsmoment ist:

$$W = \frac{840\,000}{1400} = 600 \text{ cm}^3.$$

Vir wählen ein I Nr. 30a[1]), der ein $W = 597\ \text{cm}^3$ hat. Es ist:

$$\sigma_{\max} = \frac{840000}{597} = 1405 > 1400\ \text{kg/cm}^2,$$

vobei die Überbeanspruchung im ganzen 0,35% ausmacht.

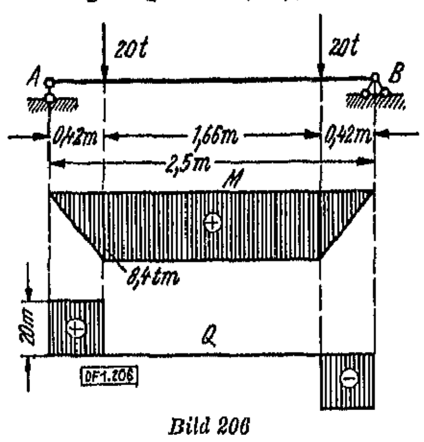


Bild 206

Die Schubspannung an der neutralen Achse ist nach der Formel (6.41):

$$\tau_{\max} = \frac{Q_{\max}}{b_0 z} = \frac{20000}{0{,}9 \cdot 25{,}7} = 867 < 900\ \text{kg/cm}^2.$$

Gehen wir zu der Überprüfung der Haupt- und größten Schubspannungen im Steg über. Sie ist, wie aus der M- und Q-Linie ersichtlich, im Querschnitt

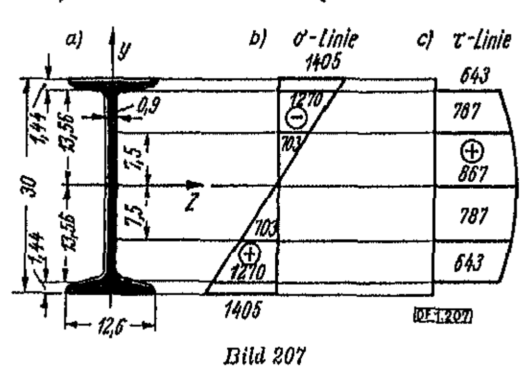


Bild 207

unter einer der Lasten, z. B. unter der linken Last, durchzuführen. Die Abmessungen des Querschnitts sind in Bild 207, a dargestellt. Das statische Moment des Flansches ist:

$$S = 12{,}6 \cdot 1{,}44 \cdot 14{,}28 = 259\ \text{cm}^3.$$

[1]) *Anm. d. deutschen Redaktion:* Ein passendes deutsches Profil ist in den entsprechenden deutschen Tafeln nicht enthalten. Am nächsten kommt der deutsche Normalprofilträger I 30 mit $W_x = 653\ \text{cm}^3$, $b_0 = (d =)\ 10{,}8$ mm, $z = (s_x =)\ 25{,}7$ cm. Die weiteren hier nicht angegebenen Werte sind den betreffenden deutschen Profiltafeln zu entnehmen.

Die Normal- und Schubspannungen am Übergang zu den Flanschen sind:

$$\sigma = \pm \frac{M y}{J} = \pm \frac{840000 \cdot 13,56}{8950} = \pm 1270 \text{ kg/cm}^2,$$

$$\tau = \frac{20000 \cdot 259}{8950 \cdot 0,9} = 643 \text{ kg/cm}^2.$$

Die σ- und τ-Linien in dem zu untersuchenden Querschnitt sind in Bild 207, b dargestellt. Für die Punkte am Übergang zum *unteren* Flansch erhalten wir:

$$\sigma = -1270 \text{ kg/cm}^2,$$

$$\sigma'_{\max} = 635 + \sqrt{635^2 + 643^2} = 635 + 902 = 1537 > 1400 \text{ kg/cm}^2,$$

$$\sigma'_{\min} = 635 - 902 = -267 \text{ kg/cm}^2,$$

$$\tau'_{\max} = \frac{1537 - (-267)}{2} = 902 > 900 \text{ kg/cm}^2.$$

Für die Punkte am Übergang zu dem *oberen* Flansch ist:

$$\sigma = -1270 \text{ kg/cm}^2,$$

$$\sigma'_{\max} = -635 + 902 = +267 \text{ kg/cm}^2,$$

$$\sigma'_{\min} = -635 - 902 = -1537 \text{ kg/cm}^2,$$

$$\tau'_{\max} = 902 \text{ kg/cm}^2.$$

In dem gezeigten Beispiel sind demnach die Hauptspannungen größer als die Spannungen in den äußersten Fasern und übersteigen die zulässige Spannung σ_{zul} um 9,8%. Die Schubspannungen $\tau'_{\max}$ übersteigen ebenfalls ein wenig τ_{zul}. Dies ist die Folge der sehr großen Querkraft im Verhältnis zum Biegemoment, auf Grund dessen die Querschnittsabmessungen bestimmt wurden.

Ein derartiger Fall ist, allgemein gesagt, als Ausnahme anzusehen. In der Regel sind jedoch die Hauptspannungen niedriger als die Spannungen σ in den äußersten Punkten des Querschnitts und erfordern somit keine Überprüfung. Dies ist damit zu erklären, daß die Dicke des Steges bei normalen Profilen stark genug gewählt ist. Bei gewöhnlichen Verhältnissen zwischen den Werten M und Q sind infolgedessen die Schubspannungen nicht groß und ziehen keine großen Hauptspannungen nach sich. Bei genieteten Trägern ist die Dicke des Steges relativ viel kleiner als bei gewalzten. Daher kann eine Überprüfung der Hauptspannungen in solchen genieteten Trägern erforderlich werden. Gewöhnlich wird die Überprüfung an der dem Auflager nächstliegenden Stufe der horizontalen Gurtplatte (Kapitel 6.08) durchgeführt, wo die Querkraft groß ist und die Spannung σ der äußersten Fasern sich infolge der Verringerung der Querschnittshöhe der zulässigen nähert[1]).

---

[1]) *Anm. d. deutschen Redaktion:* In Deutschland ist für Walz- und Blechträger, bei denen gleichzeitig große Momente und Querkräfte auftreten, die Hauptspannung (σ_H) nach folgender Formel zu ermitteln:

$$\sigma_H = \frac{3}{8} \cdot \sigma_b \pm \frac{5}{8} \sqrt{\sigma_b^2 + 4\,\tau^2} \leqq \sigma_{zul}.$$

Diese Formel ist der Gleichung (6.53) ähnlich.

C. In einigen Fällen muß man zum Zwecke einer richtigen Trägerkonstruktion neben dem Wert der Hauptspannungen auch ihre Richtung kennen[1]). Vor allem stellen wir fest, daß in den äußersten Fasern und an der neutralen Achse (bei $Q \neq 0$) die Richtung der Hauptflächenelemente (Hauptebenen) immer ein und dieselbe ist. In der Tat ist für die äußersten Fasern $\tau = 0$. Folglich ist auf Grund der Formel (6.53) eine der Hauptspannungen gleich Null und die andere gleich der Spannung σ im Querschnitt, und zwar ist in der äußersten Zugfaser $\sigma'_{max} = \sigma$ und $\sigma'_{min} = 0$, während in der äußersten Druckfaser umgekehrt $\sigma'_{max} = 0$ und $\sigma'_{min} = \sigma$ ist.

Setzt man in die Formel (6.55) den Wert derjenigen Hauptspannung ein, die nicht gleich Null ist, so ergibt sich $\operatorname{tg} \alpha = \pm \infty$ und $\alpha = \pm 90°$. Dies bedeutet, daß das entsprechende Flächenelement mit dem Querschnitt zusammenfällt. Das andere Flächenelement ist parallel zur Achse des Balkens gerichtet, d. h. es fällt mit seiner Fläche (der oberen oder unteren) zusammen. An der neutralen Achse ist $\sigma = 0$, und folglich ist auf Grund der Formel (6.53)

$$\sigma'_{max} = \tau \quad \text{und} \quad \sigma'_{min} = -\tau,$$

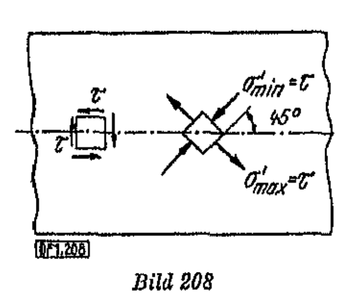


Bild 208

d. h. der Größe nach sind beide Hauptspannungen gleich der Schubspannung. Die Neigungswinkel der Hauptflächenelemente werden nach der Formel (6.55) ermittelt:

$$\operatorname{tg} \alpha = \pm 1 \quad \text{und} \quad \alpha = \pm 45°$$

(ausgenommen ist der Fall der reinen Biegung). Außerdem ist gemäß (6.54) $\tau'_{\substack{max\\min}} = \pm \tau$, und ihre Flächenelemente liegen im Quer- und Längsschnitt. Hieraus folgt, daß ein an der neutralen Achse mit Hilfe von vier unter dem Winkel $\pm 45°$ geneigten Schnitten herausgeschnittenes rechteckiges Element in einer Richtung einen Zug und in der anderen Richtung einen diesem gleichen Druck erleidet (Bild 208). Ein solches durch vertikale und horizontale Schnitte herausgetrenntes Element befindet sich im Zustand der reinen Schiebung. In Punkten zwischen den äußersten Fasern und der neutralen Achse haben die Hauptflächenelemente eine gewisse Zwischenneigung, die von der Belastung und der Querschnittsform abhängt. Es ist z. B. für einen Träger, dessen Berechnung im Punkt B aufgeführt ist, nicht schwer, mit Hilfe der σ- und τ-Linie (Bild 207, b) und der Formel (6.55) festzustellen, daß bei $y = \pm \frac{h}{4} = \pm 7{,}5$ cm die Flächenelemente σ'_{max} entsprechend unter dem Winkel $-33°$ und $-57°$ zur x-Achse geneigt sind.

Um die Änderung der Richtung der Hauptspannungen über die Höhe des Balkens besser zu veranschaulichen, benutzen wir diese Unterlagen und stellen die aus dem Balken mittels der Hauptebenen an den äußersten Fasern, an der

---

[1]) Z. B. zur Verteilung der abgebogenen Armierung in Stahlbetonbalken.

neutralen Achse und in einer Entfernung $y = \pm \frac{h}{4}$ von dieser herausgeschnittenen elementaren Parallelepipeda (Balken) dar (Bild 209, a)[1]).

Aus der Zeichnung geht hervor, daß sich beide Hauptflächenelemente beim Übergang von der äußersten gedrückten zur äußersten gezogenen Faser um 90° im Gegensinne des Uhrzeigers drehen.

Wenn wir den Balkenquerschnitt unter der rechten Einzellast untersuchen würden (Bild 206), so könnten die Werte der Hauptspannungen die gleichen bleiben, aber die Hauptflächenelemente würden sich beim Übergang von der oberen zur unteren Faser im Sinne des Uhrzeigers drehen, da in diesem Querschnitt $\tau < 0$ und das Vorzeichen von $\operatorname{tg} \alpha$ für alle Punkte das entgegengesetzte ist (Bild 209, b). Für einen beliebigen Querschnitt zwischen den Lasten ist $\tau = 0$ (reine Biegung), und die Hauptflächenelemente in einem beliebigen Punkt der Höhe des Querschnitts sind vertikal und horizontal gelegen, wobei eine der Hauptspannungen gleich Null ist.

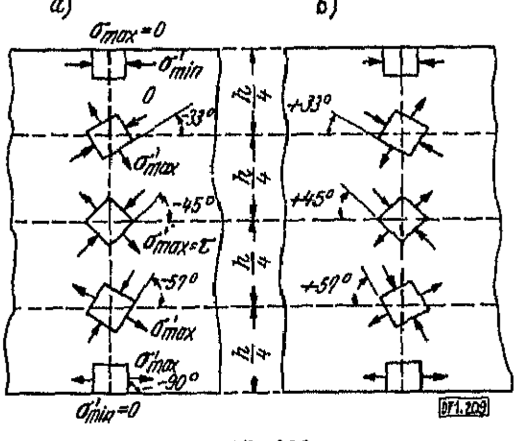


Bild 209

Ein übersichtliches Bild des Spannungszustandes eines auf Biegung beanspruchten Balkens kann man erhalten, wenn man die sogenannten Hauptspannungstrajektorien konstruiert. Wählen wir einen beliebigen Punkt in irgendeinem Querschnitt, und nachdem wir für diesen die Richtung einer der Hauptspannungen ermittelt haben, verlängern wir diese Richtung bis zum Schnitt mit dem benachbarten Querschnitt. Für den erhaltenen Punkt ermitteln wir wiederum die Richtung der Hauptspannung und verlängern diese bis zum Schnitt mit dem nächsten benachbarten Querschnitt. Setzt man diese Konstruktion fort, so erhalten wir (bei unendlich nahgelegenen Querschnitten) eine bestimmte Kurve, die man als *Hauptspannungstrajektorie* bezeichnet. Die Tangente zu dieser Kurve in einem beliebigen Punkt bestimmt die Richtung der Hauptspannung im Berührungspunkt. Es ist klar, daß man durch jeden Balkenpunkt eine Trajektorie jeder der Hauptspannungen führen kann.

Nachdem von uns die Änderung der Hauptspannungsrichtung über die Balkenhöhe untersucht worden ist, wird es nicht schwer, den allgemeinen Charakter der Hauptspannungstrajektorien festzustellen. Die Trajektorien der Hauptzugspannung (Bild 210, a) beginnen an der äußersten Druckfaser unter dem Winkel 90° zur Balkenachse (da hier das Flächenelement σ'_{max} mit der oberen Fläche

---

[1]) Gemäß der oben gewählten Regel sind die positiven Winkel α im Sinne des Uhrzeigers und die negativen im Gegensinne des Uhrzeigers abgetragen.

usammenfällt), schneiden die neutrale Schicht unter einem Winkel von 45° und vereinigen sich mit der Richtung der äußersten Zugfaser (oder schneiden unter einem rechten Winkel den Querschnitt, in dem $Q = 0$ ist, worauf sie weiter zu der Druckfaser zurückkehren). Die Trajektorien der Hauptdruckspannung Bild 210, b) haben einen ähnlichen Charakter¹). Aus dem Vorhergehenden ist klar, daß die Richtung der Hauptspannungen zwischen den äußersten Fasern und der neutralen Schicht von der Belastung und der Querschnittsform abhängt.

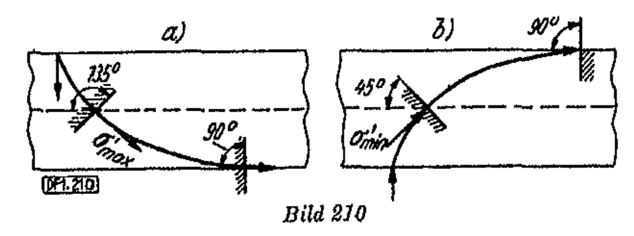


Bild 210

In Bild 211 sind die Trajektorien der Hauptspannungen in einem infolge einer durchgehenden Belastung auf Biegung beanspruchten Balken mit rechteckigem Querschnitt dargestellt. In Bild 212 sind die Trajektorien der Hauptspannungen in einem gebogenen Tragbalken gezeigt, in dem Abschnitte eines positiven und negativen Biegemoments vorhanden sind. In beiden Zeich-

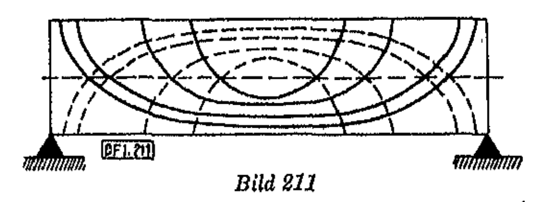


Bild 211

nungen sind die Trajektorien σ'_{max} durch ausgezogene und die Trajektorien σ'_{min} durch punktierte Linien dargestellt. Auf ähnliche Weise kann man auch die Trajektorien der größten Schubspannungen τ'_{max} und τ'_{min} untersuchen.

Aus all dem früher Gesagten geht klar hervor, daß die Trajektorien der Hauptspannungen immer zwei Systeme von orthogonalen Kurven darstellen. Die

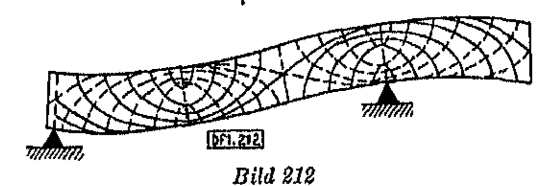


Bild 212

Trajektorien der größten Schubspannungen sind ebenfalls untereinander orthogonal und halbieren in einem beliebigen Punkt des Balkens die von den Trajektorien der Hauptspannungen eingeschlossenen Winkel.

¹) In Bild 210 ist angenommen, daß in dem dargestellten Balkenabschnitt $M > 0$ und $Q > 0$ ist.

Die Trajektorien der Hauptspannungen sind nicht nur in theoretischer Hinsicht interessant. In vielen Fällen erleichtern sie das richtige Konstruieren und die zweckmäßige Verteilung des Materials in Trägern und in komplizierteren Konstruktionen (Fundamenten, Wehren, Anschlußblechen in den Knotenpunkten stählerner Brücken usw.). Bei der Verteilung der Stahlarmierung in Stahlbetonbalken richtet man sich z. B. nach den Trajektorien der Hauptzugspannungen. Bei der Biegung von Stahlbetonbalken mit einer Längsarmierung (Bild 176) beginnt gewöhnlich die Zerstörung in der Nähe der Auflager durch Bildung von schrägen Rissen, die senkrecht zu den σ'_{max}-Trajektorien gerichtet sind und infolge des schwachen Zugwiderstandes des unbewehrten Betons entstehen. Um die Tragfähigkeit des Balkens zu erhöhen, ist es erforderlich, an den Auflagern eine zusätzliche Armierung anzuordnen, deren Richtung sich den σ'_{max}-Trajektorien nähert (Bild 211 und 212). Zu diesem Zweck wird ein Teil der Stäbe der Längsbewehrung des Balkens zu den Auflagern hin (gewöhnlich unter dem Winkel von 45°), wie in Bild 213 dargestellt, abgebogen. Balken mit

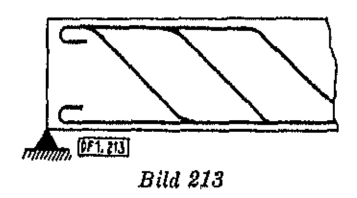


Bild 213

abgebogenen Stäben nehmen eine viel größere Belastung auf als bei Vorhandensein von nur einer geraden Längsbewehrung.

6.11 Berechnung zusammengesetzter Träger. Genietete und geschweißte Träger

A. Es wird bei der Berechnung der zusammengesetzten Träger angenommen, daß die Verbindungselemente (Nieten, Schweißnähte) einen starren Zusammenhang der Einzelteile gewährleisten, so daß der Träger als Ganzes arbeitet. Daher werden die gleichen Spannungsformeln wie auch bei den nicht zusammengesetzten Trägern angewendet. Die Schwächung des Querschnitts durch Nietlöcher wird durch Einführung eines Nettoträgheitsmomentes J_{netto} in die Berechnung berücksichtigt, das man durch Abzug der Trägheitsmomente der Lochflächen vom Bruttoträgheitsmoment J_{brutto} erhält. Diese Art der Berücksichtigung der Schwächungen ist aber nur eine Näherung, da sie die Konzentration der Spannungen an den Löchern außer acht läßt. Für plastische Materialien ist diese Methode auf Grund der im Kapitel 2.11 erwähnten Überlegungen durchaus zulässig. Betrachten wir an Beispielen die grundlegenden Berechnungsverfahren für genietete und geschweißte Stahlträger.

Die genieteten Träger bestehen aus einem vertikalen Steg, vier Gurtwinkeln und aus einem oder mehreren Paaren von horizontalen Gurtblechen (Bild 214).

Indem wir nicht auf die Einzelheiten der Berechnung und Konstruktion der genieteten Träger, die in den Lehrbüchern für Stahlkonstruktionen und Brücken

dargelegt werden, eingehen, geben wir hier nur den allgemeinen Gang der Spannungsüberprüfung und die Bestimmung der Teilung der Gurtniete an, die die Winkel mit dem Steg verbinden.

Nehmen wir an, daß ein genieteter Träger berechnet werden soll, der mit zwei Lasten von je 54 t, die symmetrisch zu den Auflagern gelegen sind, belastet

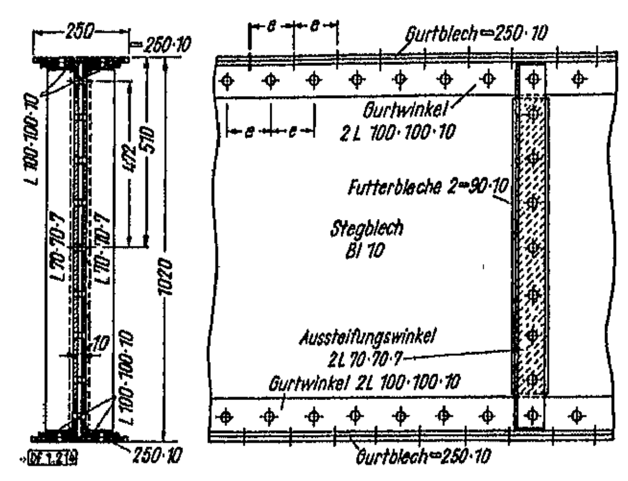


Bild 214

ist (Bild 215)[1]. Das Eigengewicht des Trägers soll als klein im Vergleich mit der Auflast vernachlässigt werden. Die zulässigen Spannungen für das Material des Trägers (Ст. Ос) sind:

$$\sigma_{b\,zul} = 1400 \text{ kg/cm}^2$$

und

$$\tau_{zul} = 900 \text{ kg/cm}^2,$$

und die der Niete (bei gestanzten Löchern)

$$\tau_{a\,zul} = 1000 \text{ kg/cm}^2$$

und

$$\sigma_{l\,zul} = 2400 \text{ kg/cm}^2.$$

Im Querschnitt unter der Last ist:

$$M'_{max} = 54 \cdot 1{,}65 = 89{,}1 \text{ tm} \quad \text{und} \quad Q'_{max} = 54 \text{ t}.$$

Der gewählte Querschnitt des Trägers besteht aus einem Steg ▭ 1000 · 10, vier Winkeln ∟ 100 · 100 · 10 und zwei horizontalen Gurtblechen ▭ 250 · 10. Die Gesamthöhe des Querschnitts ist $h = 1020$ mm (Bild 214).

Das Trägheitsmoment des zusammengesetzten Querschnitts ist

$$J_{brutto} = \frac{1 \cdot 1000^3}{12} + 4\,(179 + 19{,}2 \cdot 47{,}2^2) + 2\,(25 \cdot 1 \cdot 50{,}5^2)$$

$$= 83\,300 + 171\,300 + 127\,600 = 382\,200 \text{ cm}^4.$$

[1]) Ein solcher Belastungsfall kommt z. B. für den Querträger der Fahrbahn einer Eisenbahnbrücke vor.

Der Querschnitt wird durch die Löcher für die Niete, die die Gurtbleche mit n Winkeln und letztere mit dem Steg verbinden, geschwächt. Die Niete werden den beiden Winkelschenkeln versetzt angeordnet (Bild 214).

In die Berechnung führen wir die Schwächung durch die Löcher der vertikalen ete als die ungünstigere ein. Außerdem muß man eine senkrechte Reihe von chern im Steg für die Niete, mit denen die sogenannten Aussteifungswinkel festigt werden, berücksichtigen. Da die Anordnung dieser Niete im voraus ht bekannt ist, so ist es gestattet, die Stegschwächung mit 18%[1]) des Trägtsmomentes des Steges anzunehmen, während die Schwächung des Gurtes h. der Winkel und Gurtbleche) auf Grund der Fläche der Nietlöcher berechnet

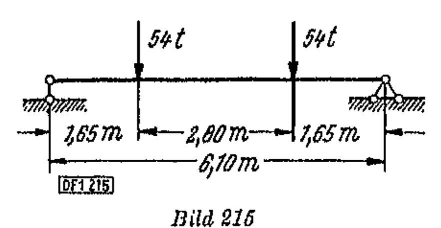


Bild 215

d. Wählen wir den Durchmesser der Niete zu $d = 20$ mm, so berechnen wir Schwächung des Querschnitts, wobei wir das Trägheitsmoment der Niether in bezug auf ihre eigenen Schwerachsen als gering vernachlässigen:

$$_{\text{Abzug}} = 0{,}18 \cdot 83\,300 + 4 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 50^2 = 55\,000 \text{ cm}^4;$$

$$J_{\text{netto}} = 382\,200 - 55\,000 = 327\,200 \text{ cm}^4;$$

$$W = \frac{327\,200}{51} = 6420 \text{ cm}^3; \quad \sigma_{\max} = \frac{8\,910\,000}{6420} = 1390 < 1400 \text{ kg/cm}^2.$$

nnach ist der Querschnitt richtig gewählt worden. Überprüfen wir die Schubnnung im Steg in der Ebene der neutralen Achse. Hierbei ist es üblich, $_{\text{utto}}$ und J_{brutto} in die Berechnung einzuführen. Berechnen wir das statische ment des halben Trägerquerschnittes:

$$= 25 \cdot 50{,}5 + 2 \cdot 19{,}2 \cdot 47{,}2 + 50 \cdot 1 \cdot 25 = 1260 + 1810 + 1250 = 4320 \text{ cm}^3.$$

wird $$\tau_{\max} = \frac{QS_0}{Jb} = \frac{54\,000 \cdot 4320}{382\,200 \cdot 1} = 610 < 900 \text{ kg/cm}^2.$$

Gehen wir zur Berechnung der Teilung (Abstände) der Gurtniete über, die Winkel mit dem Steg verbinden. Bei der Biegung des Balkens sind die izontalen Gurtbleche und Winkel (die miteinander durch vertikale Niete bunden sind) bestrebt, sich gegenüber dem Steg zu verschieben. Dieses Verieben verhindern die horizontalen Gurtniete, die folglich auf Abscheren r Lochleibung beansprucht sind. Die Schubkraft auf 1 cm Trägerlänge kann n nach der gleichen Formel (6.37) wie beim vollen Balken ermitteln. Es ist:

$$t = \frac{QS_1}{J};$$

---

[1]) *Anm. d. deutschen Redaktion:* Nach deutchen Vorschriften 15 %.

setzt man den Wert des statischen Moments S_1 der Gurtfläche (in Bild 216 schwarz angelegt) in die Formel ein, demnach

$$S_1 = 1260 + 1810 = 3070 \text{ cm}^3,$$

so ist:
$$t = \frac{54000 \cdot 3070}{382200} = 434 \text{ kg/cm}.$$

Bezeichnen wir die Teilung der Gurtnieten mit e. Da in den äußersten Abschnitten des Balkens die Querkraft konstant ist, so werden die Schubkräfte gleichmäßig

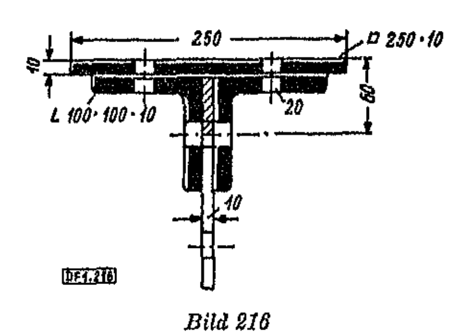


Bild 216

über die Länge des horizontalen Schnittes in der Ebene der Mitten der Gurtniete verteilt sein. Die Scherkraft auf einen Niet ermittelt sich wie folgt:

$$T = te = 434 \cdot e \text{ kg}.$$

Diese Kraft darf den Widerstand des Nietes auf Abscheren bzw. Lochleibung nicht übersteigen.

Zur Ermittlung der Nietteilung e haben wir zwei Bedingungen:

1. $T \leqq 2 \cdot \frac{\pi d^2}{4} \tau_{a\,zul}$ (auf Abscheren, wobei in Betracht gezogen ist, daß die Niete zweischnittig sind) und

2. $T \leqq d \delta \sigma_{l\,zul}$ (auf Lochleibung).

Mit δ ist die Stärke des Steges bezeichnet, die immer geringer ist als die Stärke zweier Winkel.

Aus der ersten Bedingung finden wir:

$$e \leqq 2 \, \frac{3{,}14 \cdot 2^2}{434 \cdot 4} \cdot 1000 = 14{,}4 \text{ cm}$$

und aus der zweiten Bedingung:

$$e \leqq \frac{2 \cdot 1 \cdot 2400}{434} = 11{,}1 \text{ cm}.$$

In der Praxis nimmt man die Nietteilung zu $4d \cdots 8d$ an. In dem betrachteten Falle kann man $e = 10$ cm $= 5d$ annehmen. Die vertikalen Niete, die die Gurtplatten mit den Winkeln verbinden, werden gewöhnlich mit dem gleichen Ab-

stand e in den Zwischenräumen zwischen den horizontalen Nieten angeordne obgleich sich bei einer Berechnung eine bedeutend größere Teilung der vertikale Niete ergeben würde. Dies wird zur Gewährleistung einer dichten Verbindun der Gurtplatten mit den Winkeln gemacht[1]).

Die Überprüfung der Hauptspannungen wird für den Steg in der Ebene de Gurtniete durchgeführt, da nämlich in dieser Ebene die Schubkraft von de Gurtung durch die Gurtniete auf den Steg übertragen wird. Die Überprüfun wird, wie im Absatz B des Kapitels 6.10 erwähnt, an der Abstufungsstelle de Gurtbleche vorgenommen. In dem betrachteten Beispiel ist es nicht zweckmäßig die Gurtbleche zu unterbrechen, da der Träger nur kurz ist. Jedoch weist de Charakter der Belastung, bei dem sich M_{max} und Q_{max} im gleichen Querschnit (unter der Last) befinden, auf eine wünschenswerte Überprüfung der Haupt spannungen hin.

Ermitteln wir die Spannung σ in der Ebene der Nietachse:

$$\sigma = \frac{M y}{J_{netto}} = \frac{8910000 \cdot 45}{327200} = 1224 \text{ kg/cm}^2.$$

Zur Ermittlung der Schubspannungen in der gleichen Ebene muß man zu den statischen Moment des Gurtes das statische Moment des oberhalb der Nietachs gelegenen Teiles des Steges hinzufügen (in Bild 216 schraffiert). Dann ist:

$$S = 3070 + 1 \cdot 5 \cdot 47{,}5 = 3310 \text{ cm}^3; \qquad \tau = \frac{54000 \cdot 3310}{382200 \cdot 1} = 468 \text{ kg/cm}^2.$$

Die Hauptspannung im Steg ist:

$$\sigma'_{max} = 612 + \sqrt{612^2 + 468^2} = 1382 < 1400 \text{ kg/cm}^2.$$

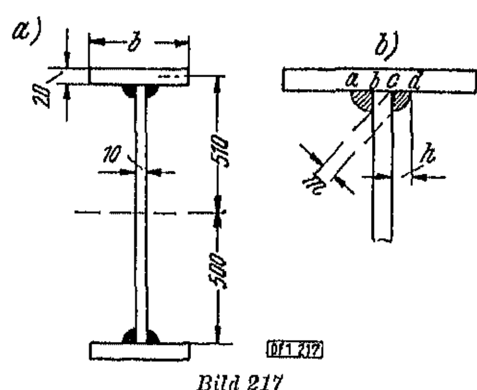


Bild 217

B. Die Gurte. geschweißter Träger werden meistenteils aus einem dicke horizontalen Blech hergestellt, das mittels zweier Kehlnähte mit dem Steg ver bunden wird (Bild 217, a). Wählen wir den Querschnitt eines geschweißter Trägers mit der gleichen Belastung und Stützweite sowie aus dem gleicher Material (Bild 215). Wählen wir, wie einen Steg von = 1000 · 10, desser

[1]) *Anm. d. deutschen Redaktion:* In Deutschland üblich (Angaben aus „Stahl im Hochbau", IX. Aufl. S. 351) $e_{max} \leqq 8d$ für den Druckgurt und $e_{max} \leqq 10d$ für den Zuggurt.

rägheitsmoment $J_{Steg} = 83300\ cm^4$ (Absatz A) ist. Nehmen wir für die hori-ntalen Gurte eine Dicke von $\delta = 20$ mm an, und ermitteln wir ihre erforderliche reite b. Aus Absatz A übernehmen wir den Wert des erforderlichen Trägheits-oments des Querschnitts $J = 327200\ cm^4$. Zieht man von diesem J_{Steg} ab und lbiert man den Rest, so finden wir das erforderliche Trägheitsmoment eines urtes $J_{Gurt} = \frac{1}{2}(J - J_{Steg}) = 122000\ cm^4$. Vernachlässigt man das Trägheits-oment des Gurtes in bezug auf seine eigene Schwerachse, so ermitteln wir b aus er Gleichung $b \cdot \delta \cdot 51^2 = 122000$ und erhalten hieraus $b = 23{,}5$ cm. Nehmen ir abgerundet für $b = 24$ cm an, dann wird das Trägheitsmoment des Trägers $= 83300 + 2 \cdot 2 \cdot 24 \cdot 51^2 = 333000\ cm^4$ sein, so daß sich eine kleine Reserve genüber dem erforderlichen Trägheitsmoment ergibt.

Bestimmen wir jetzt die Dicke der Schweißnähte an den Gurtungen, indem wir raussetzen, daß die Schweißung mit dünnumhüllten Elektroden ausgeführt ird und $\tau_{schw\,zul} = 800\ kg/cm^2$ ist¹). Die auf die Längeneinheit bezogene Schub-aft zwischen dem Gurt und dem Steg ermitteln wir wie früher nach der Formel $= \frac{Q \cdot S_g}{J}$; das statische Moment des Gurtes ist $S_g = 2 \cdot 24 \cdot 51 = 2448\ cm^3$, ıd daher $t = \frac{54000 \cdot 2448}{333000} = 397$ kg/cm. Die Schubkräfte werden von den ähten aufgenommen, die in den Ebenen der Schweißung ab und cd auf Ab-heren beansprucht werden (Bild 217, b). Bei Kehlnähten wird in die Berech-ıng die Stärke $m = 0{,}7\,h$ eingeführt (siehe Absatz A des Kapitels 3.11). olglich ist die auf die Längeneinheit des Trägers bezogene Dicke zweier Nähte eich $1{,}4\,h$, worin h die Kathete der Naht ist. Aus der Gleichung $t = \tau_{schw\,zul} \cdot 1{,}4\,h$ nden wir die erforderliche Stärke der Naht $h = \frac{397}{800 \cdot 1{,}4} = 0{,}36$ cm. Die Gurt-ähte werden jedoch hier aus konstruktiven Gründen nicht unter 6 mm Stärke ısgeführt.

12 Biegung von Balken mit unsymmetrischem Querschnitt. Schubmittelpunkt

A. Es wurde bei allen vorhergehenden Ableitungen angenommen, daß der uerschnitt des Balkens in bezug auf die Wirkungsebene der Belastung sym-etrisch ist. Weisen wir jetzt nach, daß bei einer reinen Biegung die Formeln .11) und (6.12) auch für einen Querschnitt von beliebiger Form ihre Gültigkeit ehalten, wenn die Belastung in einer der Hauptträgheitsebenen des Balkens egt, d. h. in einer Ebene, die durch die Längsachse des Balkens und eine der auptträgheitsachsen seines Querschnitts geht.

Nehmen wir z. B. an, daß das Biegemoment in der Hauptebene yOx wirkt Bild 218), und daß der Querschnitt des Balkens in bezug auf die y-Achse nsymmetrisch ist. Wegen des Fehlens der Symmetrie haben wir zunächst keine ısreichenden Begründungen vorauszusetzen, daß die neutrale Achse senkrecht ır y-Achse gerichtet ist und mit der anderen Hauptachse z zusammenfällt.

¹) *Anm. d. deutschen Redaktion:* Die Bezeichnungen für die Schweißnahtspannungen sind in Deutsch-nd ϱ_1, ϱ_2 und ϱ, dabei ist $\varrho_1 = M/W$, $\varrho_2 = A/\Sigma(a \cdot l)$ und $\varrho = \sqrt{\varrho_1^2 + \varrho_2^2}$. Die Bedeutung der ızelnen Formelanteile sind aus der DIN 4100 zu ersehen, wo auch die zulässigen Werte für ϱ gemäß n Arten der Schweißnähte und ihrer Beanspruchungen angegeben sind.

Daher nehmen wir zuerst an, daß die neutrale Achse z' mit der z-Achse einen gewissen Winkel α einschließt (Bild 218). Die Formel (6.7) der Normalspannung nimmt die Form

$$\sigma = -\frac{Ey'}{\varrho} \tag{6.56}$$

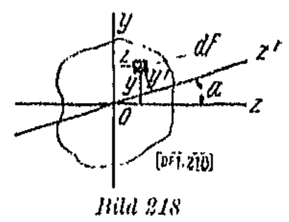


Bild 218

an, worin y' wie früher den Abstand des Flächenelements dF von der neutralen Achse bezeichnet. Aber jetzt ist y' nicht mehr als Koordinate des Flächenelements anzusehen. Setzt man (6.56) in die statische Gleichung (6.1) ein, so kommt zu der früheren Folgerung, daß die neutrale z'-Achse durch den Schwerpunkt des Querschnitts geht und folglich mit der Hauptachse z einen gemeinsamen Punkt (den Koordinatenanfang) hat. Die Strecke y' kann durch die Koordinaten des Flächenelements wie folgt ausgedrückt werden:

$$y' = y\cos\alpha - z\sin\alpha.$$

Die Spannung am Flächenelement dF ist

$$\sigma = -\frac{Ey'}{\varrho} = \frac{E}{\varrho}(z\sin\alpha - y\cos\alpha).$$

Setzen wir diesen Wert in die statische Gleichung (6.2) ein:

$$\int\limits_F \sigma\, dF z = \frac{E}{\varrho}\int\limits_F (z\sin\alpha - y\cos\alpha)\, z\, dF$$

$$= \frac{E}{\varrho}\left[\sin\alpha\int\limits_F z^2\, dF - \cos\alpha\int\limits_F yz\, dF\right] = 0.$$

Da die Achsen y und z die Hauptachsen sind, so ist

$\int\limits_F yz\, dF = J_{yz} = 0$ und folglich $\frac{E}{\varrho}\sin\alpha\int\limits_F z^2\, dF = 0$; es ist aber $\frac{E}{\varrho} \neq 0$ und $\int\limits_F z^2 dF = J_y$ ein an sich positiver Wert. Dies bedeutet, daß $\sin\alpha = 0$ und $\alpha = 0$ ist, d. h. die neutrale Achse fällt auch im Falle eines unsymmetrischen Querschnitts mit der Hauptachse z zusammen.

Hieraus folgt, daß die Biegungsebene des Balkens[1]) wie früher mit der Wirkungsebene der äußeren Kräfte zusammenfällt, worauf wir früher wegen der Symmetrie des Querschnitts schlossen. Es muß nochmals hervorgehoben werden, daß die erhaltene Folgerung bei unsymmetrischen Querschnitten nur im Falle der reinen Biegung zu Recht besteht. Im Falle der Querbiegung (d. h., wenn im Querschnitt neben dem Biegemoment auch eine Querkraft vorhanden ist) wird die Erscheinung komplizierter.

---

[1]) D. h. die Ebene, die sowohl die gerade als auch gebogene Balkenachse enthält.

B. Bei der Untersuchung der Schubspannungen im Kapitel 6.05 wurde festgestellt, daß bei der Querbiegung die Resultierende der elementaren tangentialen Kräfte im Querschnitt auf die Querkraft

$$Q_r = Q = \int \tau_y dF$$

zurückgeführt wird und ihr äquivalent ist, d. h. in Richtung der Hauptachse y des Querschnitts gerichtet ist. Dies erweist sich als richtig, wenn der Querschnitt in bezug auf die y-Achse symmetrisch ist, längs welcher die Belastung gerichtet ist, da in diesem Falle die Komponenten $\tau_z dF$ der Schubspannungen im Querschnitt sich gegenseitig das Gleichgewicht halten.

Wenn der Querschnitt in bezug auf die Achse, längs welcher die Belastung gerichtet ist, unsymmetrisch ist, so fällt die Resultierende Q_r der Schubspannungen, obgleich sie der Querkraft Q gleich ist, mit dieser nicht zusammen und ist dieser parallel gelegen. Aus diesem Grunde tritt dann zu der Querbiegung noch die Drehung hinzu. Zur Untersuchung dieser Erscheinung im allgemeinen Falle muß man die Größe und Richtung der Schubspannungen in allen Punkten des Querschnitts kennen, was nur mit Hilfe einer genaueren Methode der Elastizitätstheorie erreichbar ist. In einigen Fällen jedoch kann man angenäherte Ergebnisse auf dem elementaren Wege erhalten. Betrachten wir die in der Praxis weitgehend zur Anwendung kommenden dünnwandigen Profile (die nicht geschlossenen), zu denen der größte Teil der Walzprofile gehört. Für diese Querschnitte kann man genügend genau die Richtung der Schubspannungen bei der Biegung angeben. Da die Seitenfläche des Balkens gemäß der Bedingung der Aufgabe frei von Schubspannungen ist (eine Tangentialbelastung ist nicht vorhanden), so sind in den Punkten des Querschnitts an seinem Umriß (z. B. die Punkte A und B auf Bild 219) die Schubspannungen immer längs der Umrißlinie gerichtet (Ka-

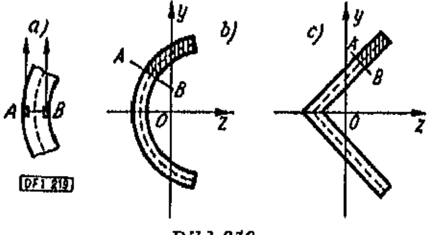


Bild 210

pitel 6.04). Wenn jedoch der Querschnitt die Form eines schmalen Streifens mit einer geraden oder krummen Achsenlinie hat (z. B. der in Bild 219, b dargestellte Querschnitt), so ist es offensichtlich, daß Größe und Richtung der Spannung sich nur unbedeutend längs einer beliebigen, zur Achsenlinie des Streifens senkrechten Geraden $A-B$ ändern können. Das gleiche trifft für Querschnitte zu, die aus mehreren Streifen gebildet sind, deren Breite (Dicke) im Vergleich zu den Abmessungen des ganzen Querschnitts nicht groß ist (wenn man aus der Betrachtung die Verbindungsstellen der Streifen miteinander ausschließt). Als Beispiel kann ein im Kapitel 6.05 untersuchter I-Träger oder ein Winkel (Bild 219, c) dienen. Auf Grund des Gesagten kann man bei dünnwandigen Querschnitten die im Kapitel 6.04 dargelegte angenäherte Methode von *Shurawski* anwenden, wenn man die grundlegenden Voraussetzungen derselben auf folgende Weise verallgemeinert:

Die Schubspannungen bei der Biegung eines dünnwandigen Balkens sind parallel zur Achsenlinie des Querschnitts gerichtet und gleichmäßig längs der Senkrechten zu dieser verteilt.

Diese Voraussetzungen wurden schon im Kapitel 6.05 beim I-Querschnitt benutzt. Hierbei führten wir, indem wir aus dem Balken mit Hilfe von zwei Querschnitten und einem dritten Längsschnitt ein Element herausschnitten, den Längsschnitt horizontal durch den Steg und vertikal durch die Flanschen, d. h. in beiden Fällen senkrecht zur Achsenlinie des Querschnitts. Die Schubspannung in den Stegen und Flanschen wurde durch ein und dieselbe Formel (6.24) ausgedrückt:

$$\tau = \frac{QS}{Jb}.$$

Diese Formel behält ihre Gültigkeit auch im allgemeinen Falle des nicht geschlossenen dünnwandigen Profils, wenn man den Längsschnitt immer senkrecht zur Achsenlinie des Profils zieht (Bild 219, b und c) und in die Formel das statische Moment des durch diesen Schnitt abgetrennten Profilteiles einsetzt (in Bild 219, b und c schraffiert). Hierbei werden die Schubspannungen gewissermaßen als Strom erscheinen, dessen Bett der Querschnitt ist. Ihre Resultierende Q_τ wird, wie oben erwähnt, im unsymmetrischen Querschnitt nicht durch den Schwerpunkt des Querschnitts gehen, sondern durch irgendeinen Punkt, der manchmal sogar außerhalb der Umgrenzung des Querschnitts liegen kann. Dieser Punkt heißt *Schubmittelpunkt* oder Zentrum der Querschnittssteifigkeit[1]).

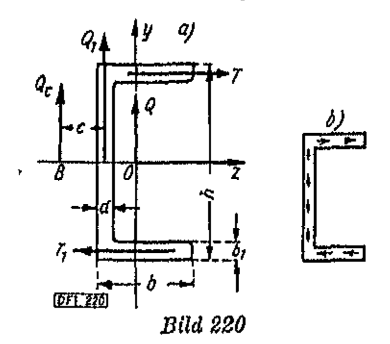


Bild 220

Für eine Reihe von dünnwandigen Querschnitten ist es nicht schwer, die Lage des Schubschnittpunktes angenähert zu bestimmen. Betrachten wir zuerst ein [-Eisen, das von einer in der Hauptebene yOz liegenden Belastung auf Biegung beansprucht wird (Bild 220, a). Wenn in dem gewählten Querschnitt $Q > 0$ ist, so werden die Schubspannungen im Steg nach oben gerichtet sein. Ihre Resultierende Q_1 wird (mit genügender Annäherung) gleich der Kraft Q und längs der Achse des Steges gerichtet sein. Der Strom der Schubspannungen im Querschnitt hat das in Bild 220, b dargestellte Aussehen. Die Spannungen in den Flanschen werden nach der Formel (6.31), die im Kapitel 6.05 für die Flansche eines

[1]) Die Frage über den Schubmittelpunkt der dünnwandigen Profile ist ausführlich in der Arbeit des Prof. B. З. Власов, „Тонкостенные упругие стержни", стройиздат 1940 (W. S. Wlassow, „Dünnwandige elastische Stäbe", Stroiisdat., 1940) untersucht. Außerdem siehe die Arbeiten von Л. С. Лейбенсон и. И. Зволинки „Технические заметки". ЦАГИ №45 (L. S. Leibenson und I. Swolinski, „Technische Aufzeichnungen, ZAGI Nr. 45), und Курс упругости П. Ф. Папковича. Оборонгиз, 1939 (Lehrbuch der Elastizitätstheorie von P. F. Papkowitsch, Oborongis, 1939).

I-Querschnittes abgeleitet wurde, ermittelt, und ihre Kennlinie wird die in Bild 189, b dargestellte Form haben. Es ist $\tau_z = \frac{Q\,(h - b_1)}{2\,J_z}\,\zeta$. Die Spannungen im *oberen* Flansch werden auf die nach rechts gerichtete horizontale Tangentialkraft T zurückgeführt:

$$T = \int_0^{b-d} \tau_z b_1\, d\zeta = \frac{Q\,(h - b_1)}{2\,J_z}\, b_1 \int_0^{b-d} \zeta\, d\zeta = \frac{Q b_1\,(h - b_1)\,(b - d)^2}{4\,J_z}.$$

Am Schnitt des *unteren* Flansches wird eine gleiche, aber entgegengesetzt gerichtete Kraft T_1 wirken (Bild 220, a).

Auf diese Weise sind die Schubspannungen im Querschnitt des [-Eisens auf eine längs des Steges wirkende vertikale Kraft $Q_1 = Q$ und ein Kräftepaar (T, T_1) mit dem Moment:

$$m = T\,(h - b_1) = \frac{Q b_1\,(h - b_1)^2\,(b - d)^2}{4\,J_z}$$

zurückgeführt. Dieses Kräftesystem kann man durch eine im Punkte B angreifende Resultierende $Q_\tau = Q$ ersetzen, wobei wir die Entfernung c dieses Punktes von der Achse des Steges aus der Gleichheitsbedingung der Momente der Kraft Q_τ und des Kräftepaares (T, T_1) ermitteln. Es ist:

$$m = Q c$$

oder

$$Q c = \frac{Q b_1\,(h - b_1)^2\,(b - d)^2}{4\,J_z},$$

und hieraus ergibt sich der Abstand des Schubmittelpunktes B von der Stegachse

$$c = \frac{b_1\,(h - b_1)^2\,(b - d)^2}{4\,J_z}. \qquad (6.57)$$

Diesen Abstand muß man nach links abtragen (Bild 220, a), damit die Momente der Kraft Q_τ und des Kräftepaares (T, T_1) in bezug auf das Vorzeichen gleich sind. Folglich befindet sich der Schubmittelpunkt des [-Eisens außerhalb des Querschnitts auf der den Flanschen entgegengesetzten Seite.

Betrachtet man den gleichschenkligen Winkel (Bild 221, a), so kann man sofort feststellen, daß der Schubmittelpunkt im Schnittpunkt der Schenkelachsen liegt, da eben in diesem Punkt die Resultierende der Schubkräfte angreift, die wie in dem Bild gezeigt, gerichtet ist. Für einen ⅃‾-Querschnitt, dessen Hauptachsen zu den Flanschen geneigt sind (Bild 221, b), kann man leicht feststellen, daß der Schubmittelpunkt mit dem Schwerpunkt zusammenfällt. Hier sind die Schubkräfte in beiden Flanschen gleich (wegen der schiefen Symmetrie des Querschnitts in bezug auf die Z-Achse), aber zum Unterschied von [-Eisen auf eine Seite gerichtet, und ihre Resultierende greift daher im Schwerpunkt an, durch den auch die Resultierende der Kräfte im Steg geht.

Interessant ist der Fall des runden Ringquerschnitts. Solange dieser Querschnitt nicht aufgeschnitten ist (Bild 222, a), ist eine vertikale Hauptzentralachse die Symmetrieachse. Die Schubspannungen sind symmetrisch verteilt, und der Schubmittelpunkt B fällt mit dem Schwerpunkt 0 zusammen. Wenn wir aber den

Ring zerschneiden (Bild 222, b), wird der Strom der Schubspannungen, wie bereit erwähnt, nach einer Seite gerichtet sein. Man kann nachweisen, daß hierbei de Schubmittelpunkt auf die äußere Seite des Ringes übergeht. Sein Abstand von Schwerpunkt O ist gleich $2R$, wo R der mittlere Radius des Ringes ist.

Es ist völlig klar, daß bei allen Querschnitten, die zwei Symmetrieachse besitzen, der Schubmittelpunkt mit dem Schwerpunkt zusammenfällt. Bei Quer schnitten mit einer Symmetrieachse liegt der Schubmittelpunkt, wie dies aus den Vorhergehenden zu ersehen ist, auf dieser Achse.

C. Stellen wir nun die Bedingung auf, bei der die Querbiegung nicht von eine Drehung begleitet wird. Wenn die Belastung des Balkens in der Hauptebene angeordnet ist, so geht in einem beliebigen Querschnitt die Querkraft Q, d. h. die

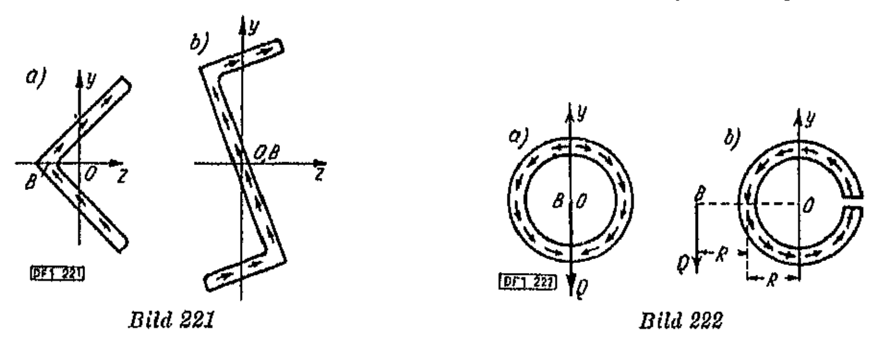


Bild 221 *Bild 222*

Resultierende der äußeren Kräfte des abgetrennten Teils, durch den Schwerpunkt des Querschnitts. Die Resultierende Q_τ der über den Querschnitt verteilten elementaren Schubkräfte geht, wie auf Grund des vorhergehenden zu sehen ist, immer durch den Schubmittelpunkt. Bei Querschnitten, die in bezug auf beide Hauptachsen symmetrisch sind, fallen die Kräfte Q und Q_τ in ihrer Richtung zusammen und sind einander äquivalent. Bei Querschnitten mit einer Symmetrieachse trifft dies nur dann zu, wenn die Belastung längs der Symmetrieachse, auf der der Schubmittelpunkt liegt, gerichtet ist. Wenn die Belastung jedoch in der anderen Hauptebene wirkt, so fallen die Kräfte Q und Q_τ nicht zusammen und sind lediglich zueinander parallel gelegen (Bild 220, a). Dies bedeutet, daß in diesem Falle die Bedingung der Äquivalenz der linken äußeren und der am Querschnitt verteilten Kräfte verletzt wird, auf der alle vorherigen Ableitungen der Biegungstheorie aufgebaut waren. Die Biegung des Balkens in der Belastungsebene wird von einer Drehung der Querschnitte um die Balkenachse, d. h. von einer *Torsion* begleitet, wobei als Ergebnis in den Querschnitten ein komplizierteres System von Schubspannungen (und in den dünnwandigen Querschnitten auch hinsichtlich der Normalspannungen) entsteht, das schon den äußeren Kräften des abgetrennten Teiles äquivalent sein wird.

Um die Drehung auszuschließen und eine einfache Querbiegung zu verwirklichen, muß man die Belastung aus der Hauptebene yOx (Bild 220, a) in die ihr parallele Ebene, die durch die Schubmittelpunkte der Querschnitte geht, verlegen. Dann werden die Kräfte Q und Q_τ äquivalent sein, und die Verteilung der Normal- und Schubspannungen im Querschnitt wird den früher abgeleiteten

ɔrmeln (6.12) und (6.24) entsprechen. Auf diese Weise ist als allgemeine edingung einer einfachen Querbiegung des Balkens die Anordnung der äußeren räfte in einer durch den Schubmittelpunkt gehenden und parallel zu einer der auptträgheitsebenen gerichteten Ebene anzusehen. Wenn diese Bedingung cht erfüllt wird, so können die zusätzlichen Torsionsspannungen die Arbeits- dingungen des Balkens bedeutend verschlechtern. In der Praxis kann man dem urch Anordnung von Querverbindungen oder Streben entgehen, die eine rehung der Balkenquerschnitte, d. h. eine Torsion verhindern. Solche auf diese 'eise verstärkten Balken (z. B. [-Eisen) kann man mit ausreichender Genauig- it auf einfache Biegung berechnen.

13 Berechnung von Balken auf Grund ihrer Tragfähigkeit

A. Bisher bewerteten wir die Festigkeit eines Balkens durch Vergleich der in m wirkenden größten Spannungen mit der für das gewählte Material bei der egung zugelassenen Spannung. Die Festigkeitsbedingung hatte die Form:

$$\sigma_{max} = \frac{M_{max}}{W} \leqq \sigma_{b\,zul}.$$

Den Wert der zulässigen Spannung erhält man, wie bekannt, durch Division er aus dem Versuch ermittelten Bruchspannung durch den gewählten Sicher- eitskoeffizienten (Sicherheitsgrad). Für plastische Werkstoffe, die einen *Fließ- unkt* besitzen (z. B. zähe Stähle), wird der Sicherheitsgrad gewöhnlich nicht auf e Bruchfestigkeit, sondern auf die Fließgrenze σ_F bezogen, die folglich als renzwert des Festigkeitswiderstandes des Werkstoffes anzusehen ist. Bezeichnen ır diesen Koeffizienten mit ν_F, dann ist:

$$\sigma_{b\,zul} = \frac{\sigma_F}{\nu_F}. \tag{6.58}$$

ierbei wird die Grenze des Festigkeitswiderstandes des Balkens bestimmt urch den Wert des Biegemoments M_F, bei dem die Spannungen in den äußersten asern die Fließgrenze erreichen. Wenn man annimmt, daß die Proportionalitäts- enze und die Fließgrenze des Werkstoffs zusammenfallen[1]), so ist:

$$M_F = W\sigma_F$$

ıd das zulässige Moment

$$M_{zul} = W\,\sigma_{b\,zul} = W\,\frac{\sigma_F}{\nu_F} = \frac{M_F}{\nu_F}. \tag{6.59}$$

Aus den Gleichungen (6.58) und 6.59) ist zu ersehen, daß bei der Berechnung ıf Grund der zulässigen Spannungen der Sicherheitsgrad des ganzen Balkens ı ganzen gleich dem Sicherheitsgrad seines am stärksten angespannten Punktes ıgenommen wird. Wenn dies für den Zug eines Balkens völlig richtig ist, bei m die Spannung in allen Fasern gleichzeitig die Fließgrenze erreicht, so erücksichtigt die Berechnung auf Grund der zulässigen Spannung bei der ıwendung auf die Biegung nicht die zusätzliche Gewähr an Festigkeit, die die

[1]) Siehe Kapitel 2.15.

plastische Arbeit des Werkstoffs oberhalb der Proportionalitätsgrenze bietet. Daher ist es für Werkstoffe, die einen Fließpunkt besitzen, richtiger, in den Berechnungen auf Biegung von dem Sicherheitsgrad des gesamten Balkens im ganzen auszugehen. Diese Berechnungsmethode nennt man die *Berechnung von Balken auf Grund ihrer Tragfähigkeit.* Sie stützt sich auf die *Prandtlsche Hypothese* über die idealelastisch-plastische Arbeit des Werkstoffs (siehe Bild 60), gemäß der der Werkstoff bis zur Fließgrenze dem *Hookeschen Gesetz* folgt und die Spannung bei der weiteren Zunahme der Formänderung konstant und gleich der Fließgrenze σ_F bleibt. Außerdem wird angenommen, daß die Querschnitte des Balkens nicht nur während des elastischen, sondern auch des elastisch-plastischen und plastischen Stadiums der Arbeit des Balkens eben[1]) bleiben (Hypothese von Bernoulli).

B. Betrachten wir zuerst einen Balken mit symmetrischem Querschnitt, z. B. einen I-Träger. Wenn das Biegemoment im gefährdeten Querschnitt den Wert $M_F = W\sigma_F$ erreicht, so folgen die Normalspannungen noch dem linearen Gesetz, und ihre Kennlinie hat die in Bild 223, a dargestellte Form. Hierbei ist die Tragfähigkeit des Balkens noch nicht erschöpft, d. h. für die weitere Zunahme der Formänderungen und Durchbiegung des Balkens ist eine Erhöhung der Belastung erforderlich. Wenn wir die Belastung erhöhen, so wird die Spannung der äußersten

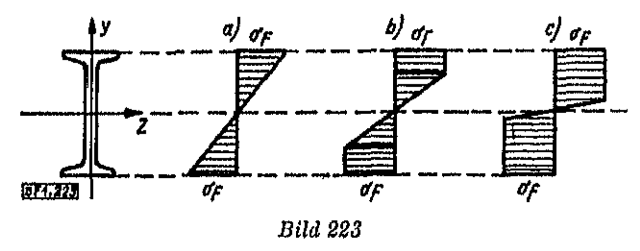


Bild 223

Fasern konstant bleiben, aber die Spannung in den übrigen Fasern wird zunehmen und ebenfalls aufhören anzuwachsen, wenn die Fließgrenze erreicht ist. Der Querschnitt teilt sich in drei Zonen auf: an den Rändern werden sich die Zonen der plastischen Verformungen und in der Mitte der elastische Kern befinden (Bild 223, b). Hierbei muß während der ganzen Zeit die Bedingung der Äquivalenz der äußeren Kräfte und der Kräfte am Querschnitt des Balkens

$$\int_F \sigma\, dF\, y = M$$

erhalten bleiben, auf Grund welcher man die Grenze der elastischen und plastischen Zone ermitteln kann.

Bei einer weiteren Zunahme der Belastung wird sich diese Grenze der neutralen Achse nähern. Im Grenzfall wird der Werkstoff über die ganze Höhe des Querschnitts in das plastische Arbeitsstadium übergehen. Die Spannungslinie, die diesem Moment entspricht, ist in Bild 223, c dargestellt. Zwischen den Zonen der plastischen Formänderungen befindet sich eine geringe elastische Schicht, die man in der Berechnung nicht zu berücksichtigen braucht. Eine weitere Zunahme

[1]) Dies ist durch zahlreiche Versuche bestätigt.

der Verformungen wird schon ohne Erhöhung der Belastung vor sich gehen. Im gefährdeten Querschnitt bildet sich ein sogenanntes *Fließgelenk* oder *plastisches Gelenk*, dessen Erscheinung die Erschöpfung der Tragfähigkeit des Balkens anzeigt. Das entsprechende (Grenz-) Biegemoment bezeichnen wir mit M_{Gr}. Da der Querschnitt symmetrisch ist, werden die Momente der Zug- und Druckkräfte im Querschnitt in bezug auf die neutrale Achse gleich sein. Das Grenzmoment wird daher auf folgende Weise ermittelt:

$$M_{Gr} = 2\int_0^{\frac{h}{2}} \sigma_F\, b\, dy\, y = 2\,\sigma_F\, S_0 = \sigma_F\, W_{pl}. \tag{6.60}$$

In der Formel ist S_0 das statische Moment der Querschnittshälfte.

Nehmen wir den gleichen Sicherheitsgrad ν_F in bezug auf das Grenzmoment M_{Gr} an, so erhalten wir das zulässige Moment:

$$M_{\text{zul}} = \frac{M_{Gr}}{\nu_F} = \frac{2\sigma_F S_0}{\nu_F} = \frac{\sigma_F W_{pl}}{\nu_F}. \tag{6.61}$$

Vergleicht man diese Formel mit (6.59), so sehen wir, daß bei der Berechnung der Balken auf ihre Tragfähigkeit die Rolle des Widerstandsmomentes W das verdoppelte statische Moment $2\,S_0$ der Querschnittshälfte spielt, das in den Formeln (6.60) und (6.61) der Analogie wegen mit W_{pl} bezeichnet ist und das *plastische Widerstandsmoment* genannt wird. Das zulässige Biegemoment vergrößert sich in diesem Falle im Verhältnis:

$$\frac{W_{pl}}{W} = \frac{2S_0}{W} = \frac{2S_0\,\frac{h}{2}}{J} = \frac{h}{z},$$

worin z der Hebelarm des inneren Kräftepaares ist[1]) (Kapitel 6.10).

Für den rechteckigen Querschnitt ist $z = \frac{2}{3}\,h$, und das zulässige Moment vergrößert sich folglich $1^1/_2$mal. Bei I-Trägern ist $z = 0{,}84\,h \cdots 0{,}86\,h$. Dies bedeutet, daß der Übergang zur Berechnung auf Tragfähigkeit es ermöglicht, die zulässige Belastung der I-Träger um 14…16% zu erhöhen.

Wenn der Querschnitt in bezug auf die Hauptzentralachse z unsymmetrisch ist (Bild 224, a), so verschiebt sich die neutrale Achse beim Übergang in das plastische Arbeitsstadium und geht nicht mehr durch den Schwerpunkt. Aus der Bedingung $\int_F \sigma\, dF = 0$ finden wir tatsächlich für den Grenzzustand (Bild 224, b):

$$\sigma_F \int_0^{y_1} b\, dy \;-\; \sigma_F \int_0^{y_2} b\, dy = 0. \tag{6.62}$$

Die Integrale stellen die Flächen F_1 und F_2 der oberen und unteren Querschnittshälfte dar. Gemäß (6.62) müssen diese Flächen gleich sein[2]), d. h. die neutrale Achse teilt den Querschnitt in zwei gleichgroße Teile auf. Dies bedeutet, daß sie bei einem unsymmetrischen Querschnitt mit der z-Achse nicht zusammenfällt.

---

[1]) Im elastischen Stadium der Arbeit des Balkens.
[2]) Beim symmetrischen Querschnitt ist diese Bedingung immer erfüllt.

Bei der Berechnung muß man zuerst die Lage der neutralen Achse ermitteln und in bezug auf diese die statischen Momente S_1 und S_2 des oberen und unteren Querschnittsteiles finden. Dann wird sich die Formel (6.61) des zulässigen Moments auf folgende Weise ändern:

$$M_{zul} = \frac{\sigma_F (S_1 + S_2)}{\nu_F}.$$

Die Entwicklung der plastischen Verformungen und ihre Verbreitung von den äußersten Fasern in das Innere des Querschnitts erfordert eine gewisse Zeit, und daher setzt die dargelegte Berechnungsmethode ein genügend langsames Anwachsen der Belastung, d. h. ihre statische Einwirkung voraus. Die Berechnungsnormen für Stahlkonstruktionen (vom Jahre 1946) schreiben eine Berechnung nach dem Grenzmoment (6.60) bisher nur für gewalzte Träger bei statischer Belastung vor[1]). Hierbei wird die Aufmerksamkeit auf die Sicherung der Träger gegen den Verlust der Stabilität der ebenen Biegungsform gerichtet. In einer Reihe von Fällen kann der Verlust der Stabilität eintreten, bevor sich in dem gefährlichen Querschnitt das plastische Gelenk bildet, und daher wird dann die zulässige Belastung nicht von den Grenzmoment (6.60), sondern von der kritischen Belastung, die den Verlust der Stabilität hervorruft, abhängen.

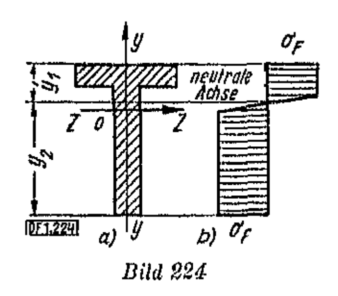


Bild 224

C. Befassen wir uns kurz mit den Schubspannungen, die sich im elastisch-plastischen Stadium der Arbeit des Balkens entsprechend dem angenommenen Gesetz über die Verteilung der Normalspannungen ergeben (Bild 223, b) Schneiden wir aus dem Balken (wie im Kapitel 6.04) eine dunne Lage mit Hilfe

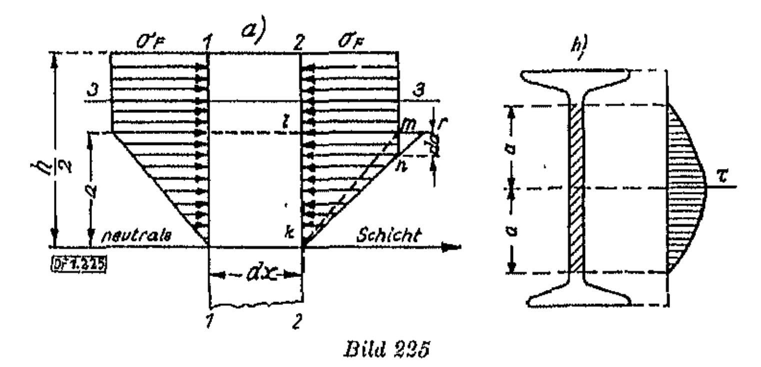


Bild 225

von zwei benachbarten Schnitten *1—1* und *2—2* heraus. Die Normalspannungslinien in diesen Schnitten (für die obere Hälfte des Balkens) sind in Bild 225, a unter der Annahme dargestellt, daß $M > 0$ ist und eine positive Zunahme dM auf der Strecke dx erfährt. Aus diesem Grunde nähert sich die Zone der pla-

[1]) *Anm. d. deutschen Redaktion:* Man vergleiche in diesem Zusammenhang die Berichte und Ergebnisse vom II. Kongreß der Internat. Vereinigung für Brückenbau und Hochbau in Berlin 1936 (Schlußbericht Berlin 1938).

tischen Formänderungen am Schnitt *2—2* um die Strecke da der neutralen Zone, worin a die halbe Höhe des elastischen Kerns am Schnitt *1—1* ist.

Führt man einen horizontalen Schnitt *3—3* durch die plastische Zone, so überzeugen wir uns, daß die Schubspannung an der unteren Fläche des durch den Schnitt abgetrennten Elements gleich Null ist, da die auf die Seitenflächen des Elements wirkenden Normalkräfte gleich sind und sich das Gleichgewicht halten.

Hieraus folgt, daß Schubspannungen nur im Bereich des elastischen Kerns des Querschnitts vorhanden sind, der die Querkraft Q voll und ganz aufnimmt. Aus dem Bild 225, a ist zu erkennen, daß mit dem Annähern des horizontalen Schnittes *3—3* vom obersten Punkt des elastischen Kerns bis zur neutralen Schicht die Differenz dN der Normalkräfte an den Seitenflächen des Elements von Null bis zum größten Wert anwächst, der durch das Produkt der Fläche des Dreiecks kmn und der Breite des Schnittes bestimmt wird (wobei man die letztere im Bereich des elastischen Kerns als konstant annimmt).

Verlängert man die Seite kn dieses Dreiecks bis zum Schnitt mit der oberen Grenze des elastischen Kerns, und ersetzen wir die tatsächliche $klmn$-Linie der Normalspannungen durch die dreieckige Linie klr. Hierzu sind wir berechtigt, da die der Kennlinie hinzugefügte Dreiecksfläche mnr als unendlich kleine Größe höherer Ordnung anzusehen ist (im Vergleich mit der Fläche kmn). Nach dieser geringen Umbildung erhalten wir genau das gleiche Bild der Verteilung der Normalspannungen an der linken und rechten Seitenfläche des elastischen Kerns, das wir in Bild 181 bei der Ableitung der Formel der Schubspannung im elastischen Stadium der Arbeit des Balkens hatten. Hieraus folgt, daß wir zu der gleichen Formel (6.24) der Schubspannung kommen, wenn wir den horizontalen Schnitt *3—3* im Bereich des elastischen Kerns führen und alle im Kapitel 6.04, Absatz B, durchgeführten Berechnungen wiederholen. Die geometrischen Werte S und J werden jetzt jedoch nicht durch die Abmessungen des ganzen Querschnitts, sondern nur durch die seines elastischen Kerns bestimmt. Es ist:

$$\tau = \frac{QS_a}{J_a b}. \tag{6.63}$$

Hier ist $J_a = \frac{b(2a)^3}{12} = \frac{2ba^3}{3}$ das Trägheitsmoment des elastischen Kerns. S_a das statische Moment des Flächenteiles des Kerns, der oberhalb des Schnittes *3—3* gelegen ist.

Die Formel (6.63) ist in bezug auf einen I-Querschnitt voll anwendbar, wenn die Grenze der elastischen Zone mit der plastischen im Bereich des Steges liegt. Die τ-Linie hat hierbei gewöhnlich eine parabolische Form (Bild 225, b).

Bei der Berechnung von Stahlträgern auf Grund des Grenzmomentes (6.60) schreiben die Normen eine Überprüfung der Schubspannungen im Querschnitt mit dem größten Biegemoment vor, wobei τ_{max} den Wert $0{,}4\,\sigma_{zul}$ nicht übersteigen soll.

7 Elastische Linie des Balkens

7.1 Differentialgleichung der elastischen Linie

A. Als wir uns mit den Fragen der Verteilung und Berechnung der Spannungen im durchgebogenen Balken befaßten, richteten wir unser Augenmerk auf die Formänderungen nur in dem Maße, als es für die Ermittlung der Spannungen erforderlich war. Die Frage über die Formänderungen bei der Biegung ist jedoch an sich sehr wichtig, da wir nämlich

1. an die zu entwerfenden Teile der Bauwerke nicht nur Forderungen der Festigkeit, sondern auch der Steifigkeit (Starrheit) stellen, d. h. es wird verlangt, daß ihre elastischen Formänderungen infolge der Wirkung der Belastung möglichst klein sind[1]), und
2. schon wissen, daß das Studium der Formänderungen bei der Lösung statisch unbestimmter Aufgaben notwendig ist. In der Praxis kommt es doch oft vor, daß wir auf statisch unbestimmte Fälle der Biegung von Balken stoßen.

In diesem Abschnitt wird die Frage über die Formänderungen der auf Biegung beanspruchten Balken und Stäbe ausführlich behandelt.

Vor allem wollen wir uns mit der folgenden sehr wichtigen Überlegung befassen. Gemäß der Hypothese von *Bernoulli*, die der ganzen Biegetheorie zugrunde liegt, bleiben die ebenen Querschnitte des Balkens nach der Biegung eben und senkrecht zu seiner gebogenen Achse. Wenn wir daher die Form der gebogenen Achse des Balkens kennen, so ist es schon nicht schwer, die Verschiebung eines im gewählten Querschnitt gelegenen Punktes zu finden, insbesondere, wenn man die geringen Änderungen des Querschnitts selbst, die im Kapitel 6.01 erwähnt worden sind, vernachlässigt. Im weiteren wollen wir daher unsere ganze Aufmerksamkeit auf die Untersuchung der gebogenen Achse des Balkens konzentrieren. Wenn die Biegeerscheinung im Bereich der elastischen Eigenschaften des Baustoffs verläuft, so werden alle Verschiebungen der Punkte des Balkens und insbesondere seiner Achse elastisch sein. Von diesem Gesichtspunkt aus hat *J. Bernoulli* die gebogene Achse des Balkens oder Stabes die *elastische Linie* (curva elastica) genannt. Diese Bezeichnung ist auch zur Zeit sehr verbreitet.

Die OX-Achse werden wir, wie auch früher, in Richtung der Achse des Balkens (vor seiner Durchbiegung) annehmen, während wir die OY-Achse in der Richtung der Wirkung der Belastungen annehmen (Bild 226). Beschränken wir uns auf den Fall eines Balkens mit symmetrischem Querschnitt, wobei die Ebene xOy als

---

[1]) Praktische Regeln zur Berechnung auf Festigkeit und Steifigkeit sind in den Normen für das Projektieren angegeben. Eine Reihe nützlicher Methoden für die Praxis ist in der Arbeit von И. Н. Кудрявцев, „к вопросу об учёте жёсткости при расчёте балочных перекрытий" (строительная промышленность № 10 за 1930 г. и № 2/3 за 1931 г) [J. N. Kudrawzew, „Zur Frage über die Berücksichtigung der Steifigkeit bei der Berechnung von Überdeckungen durch Träger" dargelegt. (Bau-Industrie Nr. 10, Jahrg. 1930, und Nr. 2/3, Jahrg. 1931.)]

Symmetrieebene erscheint. Dann kommen wir leicht zu der Folgerung, daß sich die Balkenachse unter der Einwirkung der Belastung in der Symmetrieebene durchbiegen wird, und daß ihre Punkte keine Verschiebung in Richtung der Oz-Achse erleiden (Bild 226). Wenn die Formänderungen des Balkens sehr gering sind, wie dies fast immer für Teile von Bauwerken und Maschinen zutrifft, so kann man offenbar annehmen, daß sich die Punkte der Balkenachse nur in Richtung der Oy-Achse verschieben. Tatsächlich gehört die Balkenachse zur neutralen Schicht, deren Fasern keine Verlängerungen aufweisen. Folglich können sich Verschiebungen der Punkte der Balkenachse in Richtung der Ox-Achse nur auf

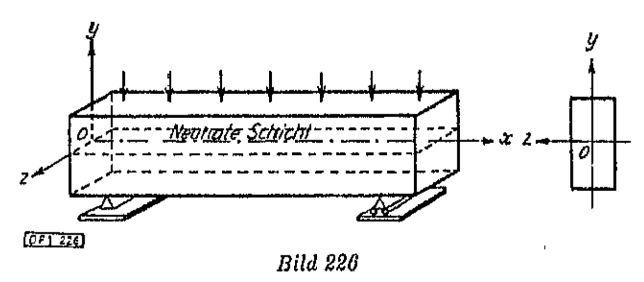


Bild 226

Grund der Krümmung der Balkenachse selbst ergeben. Wenn diese Krümmung geringfügig ist, so kann man ihren Einfluß vernachlässigen. Die Verschiebung eines Punktes der Balkenachse in Richtung der Oy-Achse werden wir *Durchbiegung* nennen und mit dem Buchstaben v bezeichnen (Bild 227). Die größte Durchbiegung nennt man *Pfeilhöhe* und bezeichnet sie mit dem Buchstaben f:

$$v_{\max} = f.$$

Die Gleichung der elastischen Linie kann man in der allgemeinen Form wie folgt aufschreiben:

$$v = f(x). \tag{7.1}$$

Ihrem physikalischen Wesen nach muß die elastische Linie über die Stetigkeit hinaus eine glatte Kurve sein. Der Begriff der Stetigkeit ist klar. Der Begriff der *Glattheit* besteht darin, daß die elastische Linie nirgends einen Brechpunkt haben

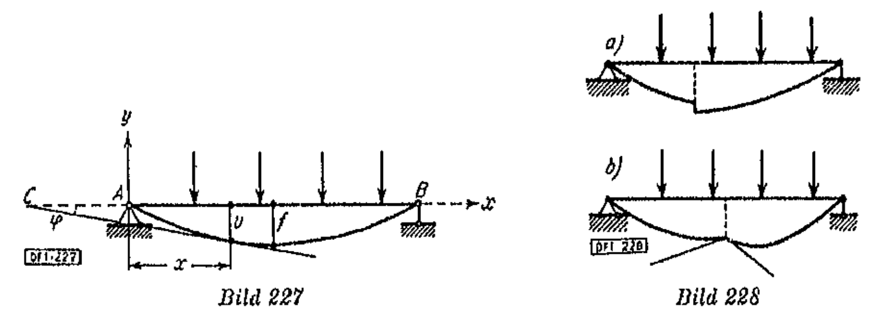


Bild 227 *Bild 228*

kann, d. h. in jedem Punkt derselben muß es eine ganz bestimmte Tangente geben. In Bild 228, a ist ein Fall angeführt, bei dem keine Stetigkeit vorliegt; in Bild 228, b dagegen ein Fall, bei dem die elastische Linie des Balkens wohl eine stetige, nicht aber eine glatte Kurve ist.

Das Bild einer Funktion ist eine glatte Kurve, wenn die Funktion $v = f(x)$ und ihre erste Ableitung $v' = \frac{dv}{dx} = f'(x)$ über die ganze Strecke der Balkenachse stetig sind.

B. Im Kapitel 6.01 haben wir die grundlegende Abhängigkeit zwischen der Krümmung, der Steifigkeit und dem Biegemoment festgelegt:

$$\frac{1}{\varrho} = \pm \frac{M}{EJ}. \tag{7.2}$$

Die Abhängigkeit (7.2) haben wir bei der Untersuchung der reinen Biegung erhalten. Im Kapitel 6.04 haben wir jedoch darauf hingewiesen, daß diese Abhängigkeit auch auf die Querbiegung ausgedehnt werden kann, da man den Einfluß der Querkraft Q, die die Krümmung der Querschnitte bewirkt, oft wegen seiner Geringfügigkeit vernachlässigen kann.

Eine genauere Untersuchung[1]) zeigt, daß der Einfluß der Querkraft Q auf die Formänderungen des Balkens um so kleiner ist, je größer das Verhältnis der Stützweite l des auf Biegung beanspruchten Balkens zu der Höhe h des Querschnitts ist. So macht z. B. im Falle eines rechteckigen Querschnitts bei $l/h > 10$ der Einfluß der Querkraft auf die Durchbiegung gewöhnlich nicht mehr als 3% von der durch das Biegemoment hervorgerufenen Durchbiegung aus.

Benutzt man die Abhängigkeit (7.2), so kann man die Form der elastischen Linie studieren. Dies ist besonders leicht durchzuführen, wenn in irgendeinem Abschnitt des Balkens das Biegemoment $M = \text{const}$ und $EJ = \text{const}$ ist, dann

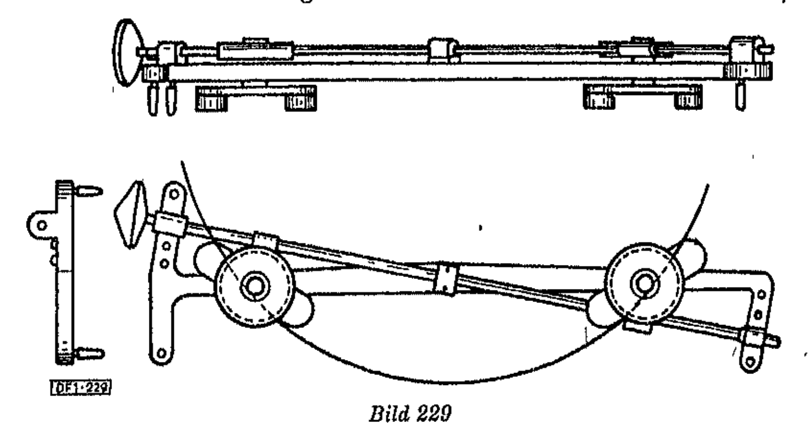


Bild 229

ist offensichtlich auch die Krümmung konstant, und daher wird sich in dem gegebenen Abschnitt der Balken in Form eines Kreisbogens mit dem Radius

$$\varrho = \frac{EJ}{M}$$

durchbiegen[2]).

Wenn das Biegemoment M ein veränderlicher Wert ist und seine funktionale Abhängigkeit von der Abszisse x bekannt ist, so ist es nicht schwer, aus der

[1]) Der Einfluß der Schiebungen auf die Durchbiegung ist weiter im II. Teil des Lehrbuches behandelt.
[2]) Auf diesem Prinzip ist der Zirkel von *Resal* aufgebaut, dessen Konstruktion aus dem Bild 229 klar hervorgeht.

Gleichung (7.2) die Differentialgleichung der elastischen Linie des Balkens zu erhalten. Vorläufig wollen wir uns mit der Wahl der Vorzeichen in der Gleichung (7.2) befassen. Die Krümmung $1/\varrho$ sehen wir als positiv an, wenn das Krümmungszentrum in Richtung der positiven Achse Oy gelegen ist. Anders ausgedrückt, die Krümmung ist positiv, wenn die Kurve mit ihrer konkaven Seite auf die positive Seite der Oy-Achse gerichtet ist, und negativ im umgekehrten Falle. Dann wird die Wahl des Vorzeichens in der Gleichung (7.2) von der gewählten Richtung der Koordinatenachsen und der eingeführten Vorzeichenregel für das Biegemoment abhängen. Im Kapitel 6.02 haben wir jedoch schon das Vorzeichen des Biegemoments an die Richtung der Konkavität der Kurve nach oben oder unten gebunden. Berücksichtigt man dies, so kommen wir zu der Folgerung:

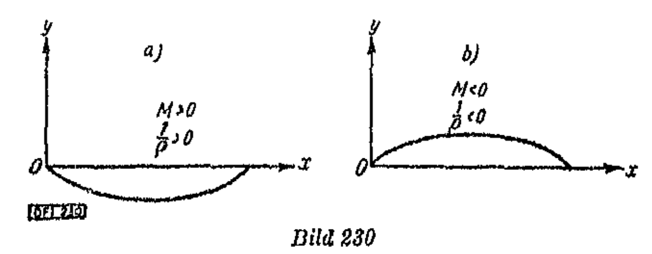


Bild 230

1. Wenn die OY-Achse nach oben gerichtet ist, so werden die Krümmung $1/\varrho$ und das Biegemoment immer das gleiche Vorzeichen haben (Bild 230, a, b), und in der Abhängigkeit (7.2) ist das Pluszeichen beizubehalten:

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{M}{EJ}; \qquad (7.2a)$$

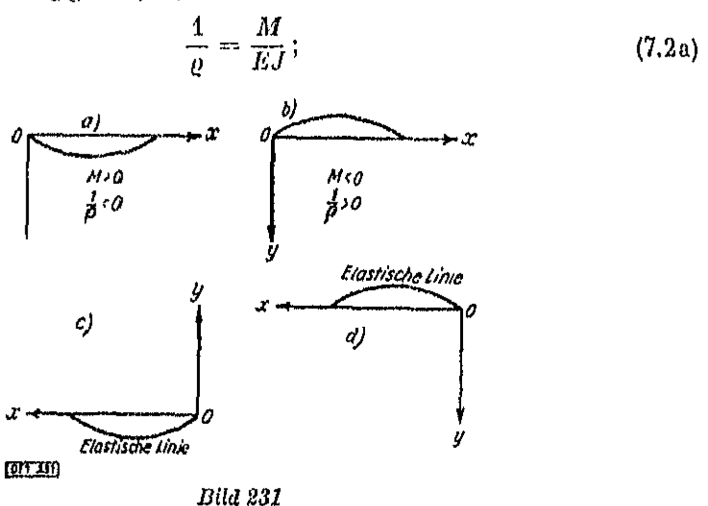


Bild 231

2. Wenn die OY-Achse nach unten gerichtet ist, so werden $1/\varrho$ und M immer verschiedene Vorzeichen haben (Bild 231, a, b), und wir erhalten:

$$\frac{1}{\varrho} = -\frac{M}{EJ}. \qquad (7.2b)$$

Zur Übung schlagen wir dem Leser vor, zu klären, welches Vorzeichen man in der Gleichung (7.2) in den in Bild 231, c und d dargestellten Fällen wählen muß.

Aus der Abhängigkeit (7.2) erhalten wir unmittelbar die Differentialgleichung der elastischen Linie, wenn wir die aus der Differentialrechnung bekannte Formel der Krümmung der Kurve $y = f(x)$ benutzen, nämlich

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{y''}{(1 + y'^2)^{3/2}}. \tag{7.3a}$$

In dieser Formel ist das Vorzeichen von $1/\varrho$ gleich dem Vorzeichen von y'', und die von uns festgelegte Vorzeichenregel der Krümmung ist beachtet[1]). Wie wir bereits vereinbart haben, ist noch die Bezeichnung y in v zu ändern:

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{v''}{(1 + v'^2)^{3/2}}. \tag{7.3b}$$

In den Balken sind die Durchbiegungen größtenteils nach unten gerichtet. Wenn wir übereinkommen, die OY-Achse ebenfalls nach unten zu richten, um diese gewöhnlichen Durchbiegungen positiv zu erhalten, so muß man offensichtlich die Gleichung (7.2b) benutzen. Setzt man in diese den Ausdruck der Krümmung (7.3b) ein, so erhalten wir:

$$\frac{v''}{(1 + v'^2)^{3/2}} = -\frac{M}{EJ}. \tag{7.4}$$

Dies ist die übliche nichtlineare Differentialgleichung zweiter Ordnung. Bei ihrer Lösung erhält man elliptische Integrale oder sogar kompliziertere Funktionen. Darum ist ihre Benutzung bei praktischen Anwendungen erschwert. Sie kann jedoch leicht durch eine angenäherte Gleichung, die sich einfacher integrieren läßt, ersetzt werden[2]).

Bei praktischen Anwendungen werden gewöhnlich die Forderungen gestellt, daß die Durchbiegungen im Verhältnis zur Stützweite sehr klein sein und z. B. $^1/_{500}$ der Stützweite nicht übersteigen sollen. Hierbei werden die Neigungswinkel φ der Tangenten sehr klein sein und die Größe von 1° nicht erreichen. Wenn wir annehmen, daß der größte Neigungswinkel φ der Tangente zur elastischen Linie des Balkens sogar 1° erreicht hat, dann ist

$$\operatorname{tg} 1° = 0{,}017 = \frac{dv}{dx} = v'.$$

Zum Nenner der linken Hälfte der Gleichung (7.4) gehört das Quadrat dieses Wertes, das bei dem hier gewählten Beispiel $0{,}017^2 = 0{,}000289$ ausmacht.

Dieser Wert ist im Vergleich zu der Zahl 1, die im Nenner der linken Seite der Gleichung (7.4) steht, so klein, daß man ihn ohne Einbuße ausreichender Genauigkeit für praktische Zwecke fortlassen kann. Dann nimmt die Gleichung (7.4) die Form

$$v'' = -\frac{M}{EJ} \tag{7.5}$$

---

[1]) $y'' > 0$ im Falle der auf die positive Seite der OY-Achse gerichteten Konkavität, und umgekehrt.

[2]) Die Integrationsmethoden der genauen Gleichung (7.4) sind in den Lehrbüchern der Elastizitätstheorie dargelegt. Siehe z. B. В. А. Ляв, „Математическая теория упругости", Москва, 1935 (A. Ljaw, „Die mathematische Elastizitätstheorie", Moskau 1935), und С. П. Тимошенко, „Курс теории упругости", Петроград 1916 (S. P. Timoschenko, „Lehrbuch der Elastizitätstheorie", Petrograd 1916). Siehe auch den II. Teil Abschn. 1, dieses Lehrbuches.

n, worin M die uns bekannte, durch die Momentenlinie dargestellte Funktion on x ist. Es hat sich eine lineare Differentialgleichung ergeben, deren Inteiration keine Schwierigkeiten bietet. Wenn auch die Gleichung (7.5) nur als ngenäherte anzusehen ist, so ist dennoch die Genauigkeit, die sie liefert, für raktische Zwecke voll ausreichend. Die Differentialgleichung (7.4) ist dagegen ur in Ausnahmefällen bei genaueren Untersuchungen zu benutzen.

.2 Integration der Differentialgleichung der elastischen Linie

A. Im weiteren werden wir stets von folgender angenäherten Differentialleichung (7.5) ausgehen:

$$EJv'' = -M.$$

m Kapitel 6.04 sind noch zwei Differentialgleichungen

$$\frac{dM}{dx} = Q \tag{7.6}$$

nd

$$\frac{dQ}{dx} = -q(x) \tag{7.7}$$

bgeleitet worden, worin $q(x)$ die Größe der kontinuierlich verteilten Belastung arstellt. Auf diese Weise haben wir ein System zusammenhängender Differentialleichungen (7.5), (7.6) und (7.7). Gegeben ist hier die Belastung $q(x)$, und als esucht sind die Funktionen Q, M und v anzusehen, die durch aufeinanderolgende Integration ermittelt werden. Im Kapitel 5.6 ist aber festgelegt orden, daß die Integration der Gleichungen (7.6) und (7.7) durch die Kontruktion der M- und Q-Linien verwirklicht wird. Wenn die M-Linie schon onstruiert ist, d. h. das Biegemoment als Funktion von x bekannt ist, so kann nan unmittelbar zur Integration der Gleichung (7.5) schreiten.

Die Bestimmung der elastischen Linie mit Hilfe der Gleichung (7.5) kann am infachsten in den Fällen durchgeführt werden, wenn

$$M = f(x) \tag{7.8}$$

ber die ganze Länge des Balkens ein und denselben analytischen Ausdruck beiehält.

Eine Reihe solcher Fälle ist schon vorher durchgenommen worden, so z. B.

im Beispiel 24 (Bild 140) $M = -Px$,

im Beispiel 25 (Bild 141) $M = -\dfrac{qx^2}{2}$,

im Beispiel 26 (Bild 142) $M = \dfrac{qx}{2}(l - x)$,

im Beispiel 27 (Bild 143) $M = \dfrac{q_0 x}{6l}(l^2 - x^2)$,

im Beispiel 32, Kapitel 5.7, Bild 145, Formel (5.26)

$$M = M_A \frac{l - x}{l} + M_B \frac{x}{l}.$$

iese Ausdrücke des Biegemoments sind gültig über die ganze Strecke des alkens.

Setzt man in (7.5) an Stelle von M einen Wert (7.8) als Funktion von x ein, so finden wir durch aufeinanderfolgende Integration

$$EJv' = \int M\,dx + C_1, \tag{7.9}$$

$$EJv = \int \left[\int M\,dx\right] dx + C_1 x + C_2, \tag{7.10}$$

worin C_1 und C_2 beliebige Konstanten der Integration sind. Zu ihrer Ermittlung muß man zwei Bedingungen haben, die die Werte der Funktion v oder ihrer ersten Ableitung v' an den Enden des Balkens angeben. Diese Bedingungen werden wir *Grenz- oder Randbedingungen* des Balkens nennen.

Im Abschnitt 5 haben wir nur zwei mögliche statisch bestimmte Fälle der Biegung eines Balkens (siehe das Ende des Absatzes C des Kapitels 5.1) behandelt:

Die Konsole (Freiträger) (Bild 232, a) und den einfachen Balken (Bild 232, b).

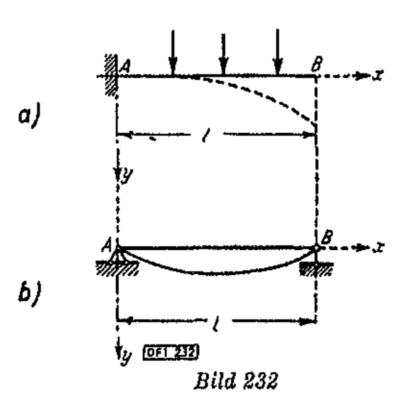


Bild 232

Unabhängig von der gegebenen Belastung des Balkens finden wir in jedem dieser Fälle ohne Mühe zwei Randbedingungen, indem wir die Stützungsarten des Balkens an den Enden berücksichtigen.

1. Bei der Konsole (Bild 232, a) ist die Durchbiegung am linken Ende gleich Null; ebenfalls gleich Null ist der Neigungswinkel der Tangente zur Ox-Achse.

Demnach haben wir folgende Randbedingungen:

$$\text{bei } x = 0 \text{ ist } v = 0 \text{ und } v' = 0.$$

2. Bei dem einfachen Balken (Bild 232, b) sind die Durchbiegungen an den Enden A und B gleich Null. Wir erhalten folglich ebenfalls zwei Randbedingungen:

$$\text{bei } x = 0 \text{ ist } v = 0,$$
$$\text{bei } x = l \text{ ist } v = 0.$$

Bestimmt man aus den Randbedingungen die beliebigen Konstanten C_1 und C_2, und setzt man ihre Werte in die Gleichung (7.10) ein, so erhalten wir die endgültige Gleichung der elastischen Linie, die allen Bedingungen der gegebenen Aufgabe entspricht.

Die Gleichung (7.9) ermöglicht es, den Winkel der Tangente zur Balkenachse in einem beliebigen Punkt zu finden, oder wir können wegen des geringen Wertes

Neigungswinkels φ der Tangente, indem wir $v' = \operatorname{tg}\varphi \approx \varphi$ annehmen, en, daß die Gleichung (7.9) den Wert des Winkels φ selbst angibt:

$$EJ\varphi = \int M\,dx + C_1. \tag{7.11}$$

Beispiele

spiel 36

Intersuchen wir einen Balken von der Stützweite l, der mit dem linken Ende in der nd eingespannt und am rechten Ende mit der Kraft P belastet ist (Bild 233). Das Bild a zeigt die ungefähre Form der gebogenen Balkenachse AC_1B_1; die Biegemomenten-

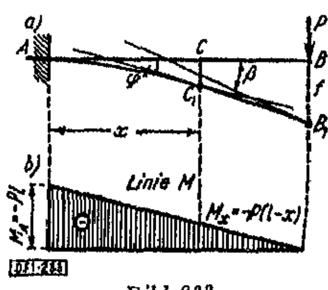


Bild 233

ist in Bild 233, b aufgeführt. Das Biegemoment im Querschnitt im Abstande x vom ›n Ende ist:

$$M = -P\,(l - x).$$

›tzt man den Ausdruck des Biegemoments in die Differentialgleichung der elastischen e ein, so erhalten wir:

$$EJv'' = -[-P\,(l - x)]$$

$$EJv'' = P\,(l - x) = Pl - Px.$$

griert man, so erhalten wir:

$$EJv' = Plx - \frac{Px^2}{2} + C_1 \tag{7.12}$$

$$EJv = Pl\,\frac{x^2}{2} - \frac{Px^3}{6} + C_1x + C_2. \tag{7.13}$$

›nutzen wir die Randbedingungen:

1. bei $x = 0$ ist $v' = 0$, und aus der Gleichung (7.12) finden wir $C_1 = 0$;
2. bei $x = 0$ ist $v = 0$, und aus der Gleichung (7.13) finden wir $C_2 = 0$.

ıuf nehmen die Gleichungen (7.12) und (7.13) die Form an:

$$\varphi \approx \operatorname{tg}\varphi = v' = \frac{1}{EJ}\left(Plx - \frac{Px^2}{2}\right), \tag{7.14}$$

$$v = \frac{1}{EJ}\left(Pl\,\frac{x^2}{2} - P\,\frac{x^3}{6}\right). \tag{7.15}$$

Es ist günstig, die erhaltenen Formeln (7.14) und 7.15) durch die dimensionslose relative Abszisse $\xi = \frac{x}{l}$ auszudrücken, die sich in den Grenzen $0 \leqq \xi \leqq 1$ ändert:

$$\varphi \approx \operatorname{tg} \varphi = v' = \frac{1}{EJ}\left(Plx - \frac{Px^2}{2}\right) = \frac{Pl^2}{2\,EJ} \cdot \xi\,(2 - \xi), \tag{7.14a}$$

$$v = \frac{1}{EJ}\left(Pl\frac{x^2}{2} - P\frac{x^3}{6}\right) = \frac{P\,l^3}{6\,EJ}\,\xi^2\,(3 - \xi). \tag{7.15a}$$

Zur Ermittlung des Neigungswinkels β und der Durchbiegung f am Ende muß man der Abszisse x den Wert l geben (die relative Abszisse $\xi = 1$):

$$\beta = \frac{P\,l^2}{2\,EJ}, \tag{7.16}$$

$$f = \frac{Pl^3}{3\,EJ}. \tag{7.17}$$

Für praktische Zwecke ist es günstig, die Formeln für die Neigungswinkel und die Durchbiegungen durch das Biegemoment am Auflager auszudrücken. Im vorliegenden Beispiel ist $M_A = -Pl$. Dann ist:

$$\beta = \frac{Pl^2}{2\,EJ} = -\frac{(-Pl)\,l}{2\,EJ} = -\frac{1\,M_A\,l}{2\,EJ}, \tag{7.16a}$$

$$f = \frac{Pl^3}{3\,EJ} = -\frac{(-Pl)\,l^2}{3\,EJ} = -\frac{13\,M_A\,l^2}{3\,EJ}. \tag{7.17a}$$

Richten wir unsere Aufmerksamkeit schließlich noch auf die wünschenswerte Überprüfung der durchgeführten Berechnungen durch den Vergleich der Dimensionen der linken und rechten Teile der erhaltenen Formeln. Für die Formeln (7.16) und (7.17) erhalten wir z. B.:

$$\beta = \frac{|\,\text{Kraft}\,| \cdot |\,\text{Länge}\,|^2}{\left|\frac{\text{Kraft}}{\text{Länge}}\right|_2 \cdot |\,\text{Länge}\,|^4} = (\text{Bogenmaß}),$$

$$f = \frac{|\,\text{Kraft}\,| \cdot |\,\text{Länge}\,|^3}{\left|\frac{\text{Kraft}}{\text{Länge}}\right|_2 \cdot |\,\text{Länge}\,|^4} = (\text{Länge}).$$

Beispiel 37

Untersuchen wir jetzt einen Balken von der Spannweite l, der frei auf zwei Lagern aufliegt und über die ganze Länge mit einer gleichmäßig verteilten Last von der Größe q belastet wird.

In Bild 234 ist die elastische Linie dargestellt. Das Biegemoment in einem beliebigen Querschnitt des Balkens ist:

$$M = \frac{ql}{2}\,x - \frac{qx^2}{2}.$$

Die Differentialgleichung der elastischen Linie hat das Aussehen:

$$EJv'' = -\frac{ql}{2}\,x + \frac{qx^2}{2}.$$

Integriert man diese, so erhalten wir:

$$EJv' = -\frac{q\,l\,x^2}{4} + \frac{qx^3}{6} + C_1, \tag{7.18}$$

$$EJv = -\frac{q\,l\,x^3}{12} + \frac{qx^4}{24} + C_1x + C_2. \tag{7.19}$$

Zur Ermittlung der beliebigen Konstanten der Integration C_1 und C_2 stehen folgende Randbedingungen zur Verfügung:

1. bei $x = 0$ ist $v = 0$,
2. bei $x = l$ ist $v = 0$.

Aus der Gleichung (7.19) finden wir, wenn man $x = 0$ setzt, $C_2 = 0$. Setzt man $x = l$, so erhalten wir:

$$C_1 = \frac{ql^3}{24}.$$

Dann nehmen die Gleichungen (7.18) und (7.19) die Form an:

$$\varphi \approx \operatorname{tg} \varphi = v' = \frac{1}{EJ}\left[-\frac{qlx^2}{4} + \frac{qx^3}{6} + \frac{ql^3}{24}\right], \tag{7.20}$$

$$v = \frac{1}{EJ}\left[-\frac{qlx^3}{12} + \frac{qx^4}{24} + \frac{ql^3}{24}x\right]. \tag{7.21}$$

Durch die dimensionslose Abszisse $\xi = \frac{x}{l}$ ausgedrückt, wird:

$$\varphi \approx \operatorname{tg} \varphi = \frac{ql^3}{24EJ}(-6\xi^2 + 4\xi^3 + 1), \tag{7.20a}$$

$$v = \frac{ql^4}{24EJ}\xi(1 - 2\xi^2 + \xi^3). \tag{7.21a}$$

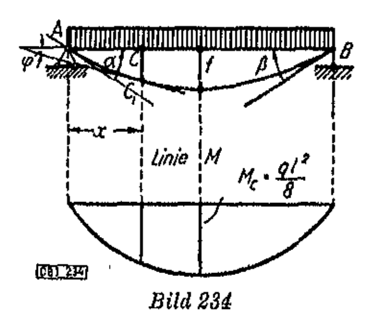


Bild 234

Die größten Neigungswinkel ergeben sich an den Auflagern bei $\xi = 0$ und $\xi = 1$, und die 'feilhöhe ergibt sich in der Mitte der Öffnung bei $\xi = \frac{1}{2}$, d. h.

1. bei $\xi = 0$ ist $\alpha = \frac{ql^3}{24EJ}$, (7.22)

2. bei $\xi = 1$ ist $\beta = -\frac{ql^3}{24EJ}$, (7.23)

3. bei $\xi = \frac{1}{2}$ ist $f = \max v = \frac{5ql^4}{384EJ}$. (7.24)

Wegen der Symmetrie der elastischen Linie in bezug auf die Balkenmitte nehmen wir an, aß sich die Stelle mit der größten Durchbiegung in der Mitte des Balkens befindet, d. h. i $x = \frac{l}{2}$ oder bei $\xi = \frac{1}{2}$. Es ist nicht schwer, eine Überprüfung der Richtigkeit dieser nahme durchzuführen, indem man sich darauf stützt, daß im Maximumpunkt die erste

Ableitung der Funktion gleich Null sein muß, d. h. die Tangente zur Kurve muß parallel zur OX-Achse gerichtet sein. Setzt man in die Formel (7.20a) den Wert $\xi = \frac{1}{2}$ ein, so erhalten wir tatsächlich $\varphi = 0$.

7.3 Ermittlung der elastischen Linie in schwierigen Fällen

A. Die im Kapitel 7.2 durchgenommene Methode wird in dem Falle kompliziert, wenn die Funktion

$$M = f(x)$$

in verschiedenen Balkenabschnitten eine verschiedene analytische Form aufweist. Im Abschnitt 5 sind wir schon etliche Male auf ähnliche Fälle gestoßen.

Im Beispiel 28 des Kapitels 5.5 z. B. teilt die Einzellast den Balken in zwei Abschnitte auf, wobei in jedem von ihnen M anders ausgedrückt wird. Im Beispiel 29 desselben Kapitels haben wir drei derartige Abschnitte. In solchen Fällen verlangt die Anwendung der von uns in den vorhergehenden Beispielen angewandten Methode, daß wir für jeden Abschnitt eine besondere Differentialgleichung aufstellen und diese einzeln integrieren. Das Integral jeder Differentialgleichung wird zwei beliebige Konstanten enthalten. Wenn der Balken in n Abschnitte aufgeteilt ist, so führen wir auf diese Weise $2n$ beliebige Konstanten ein. Zu ihrer Bestimmung braucht man außer den zwei Randbedingungen an den Enden des Balkens noch $2n-2$ Bedingungen. Wir können sie festlegen, wenn wir die Bedingungen der Kontinuität und der Glattheit der elastischen Linie in den Grenzpunkten der einzelnen Balkenabschnitte untersuchen. Wenn wir mit v_{m-1} und v'_{m-1} die Ordinate der Durchbiegung und ihre erste Ableitung im Endpunkt des $(m-1)$-ten Abschnitts und mit v_m und v'_m die gleichen Werte am Anfang des m-ten Abschnitts bezeichnen, so werden die Bedingungen des Zusammenhangs der benachbarten Abschnitte:

$$v_{m-1} = v_m \quad \text{und} \quad v'_{m-1} = v'_m \tag{7.25}$$

sein.

Bei einer Unterteilung des Balkens in n-Abschnitte werden wir $n-1$ Grenzpunkte haben und $(2n-2)$ Bedingungen des Zusammenhangs nach der Art von (7.25) aufstellen. Zusammen mit den Randbedingungen an den Enden ergibt dies

$$2(n-1) + 2 = 2n$$

Bedingungen zur Ermittlung von $2n$ beliebigen Konstanten der Integration. Den Gang der Lösung werden wir mit folgendem Beispiel erläutern.

B. Beispiel 38

Betrachten wir einen Balken von der Stützweite l, der mit einer im Abstande a vom linken Auflager angreifenden Einzellast P belastet ist $\left(\text{wobei } a > \frac{l}{2}\right)$ (Bild 235).

Hier muß man den Balken in zwei Abschnitte unterteilen:

$$0 \leqq x \leqq a \quad \text{und} \quad a \leqq x \leqq l.$$

itt ist das Biegemoment in dem im Abstand x vom linken
Querschnitt:

$$M = \frac{Pb}{l}\,x.$$

chung der elastischen Linie des Balkens hat daher die Form:

$$EJv'' = -\frac{Pb}{l}\,x.$$

egration durch, so erhalten wir:

$$EJv' = -\frac{Pbx^2}{2l} + C_1, \tag{7.26}$$

$$EJv = -\frac{Pbx^3}{6l} + C_1x + C_2. \tag{7.27}$$

itt ist das Biegemoment:

$$M = \frac{Pb}{l}\,x - P(x-a).$$

Bild 235

hung der elastischen Linie ist:

$$EJv'' = -\frac{Pb}{l}\,x + P(x-a).$$

rhalten wir:

$$EJv' = -\frac{Pbx^2}{2l} + \frac{P(x-a)^2}{2} + C_3, \tag{7.28}$$

$$EJv = -\frac{Pbx^3}{6l} + \frac{P(x-a)^3}{6} + C_3x + C_4. \tag{7.29}$$

Ermittlung der vier beliebigen Konstanten der Integration C_1,

an den Balkenenden. Bei $x = 0$ ist $v = 0$. Benutzt man die
ergibt sich für $C_2 = 0$.

Bei

oder w

Führt
wir, da
gleich

woraus

Fern
Gleichu

ist, wo
ergibt.

Aus

Setzen
erhalte

Im zw

Auf
Absch

Bei $x = l$ ist $v = 0$. Aus der Gleichung (7.29) ergibt sich

$$0 = -\frac{Pbl^3}{6l} + \frac{P(l-a)^3}{6} + C_3 l + C_4,$$

oder wir erhalten, wenn wir die Bezeichnung $l - a = b$ einführen,

$$C_3 l + C_4 = \frac{Pb}{6}(l^2 - b^2). \tag{7.30}$$

Führt man die Bedingungen des Zusammenhangs im Punkte C ein, so finden wir, daß bei $x = a$ die Werte v', die die Gleichungen (7.26) und (7.28) liefern, gleich sein müssen, demnach ist:

$$-\frac{Pba^2}{2l} + C_1 = -\frac{Pba^2}{2l} + C_3,$$

woraus $C_1 = C_3$ folgt.

Ferner müssen bei $x = a$ die Werte v der Durchbiegung, die sich aus den Gleichungen (7.27) und (7.29) ergeben, ebenfalls übereinstimmen, so daß

$$-\frac{Pba^3}{6l} + C_1 a + C_2 = -\frac{Pba^3}{6l} = C_3 a + C_4$$

ist, woraus sich
$$C_4 = C_2 = 0$$
ergibt.

Aus (7.30) erhalten wir aus diesem Grunde

$$C_1 = C_3 = \frac{Pb(l^2 - b^2)}{6l}.$$

Setzen wir die gefundenen Werte C_1, C_2, C_3 und C_4 in (7.26) bis (7.29) ein, so erhalten wir im ersten Abschnitt die Gleichungen:

$$\varphi \approx v' = \frac{1}{EJ}\left[-\frac{Pbx^2}{2l} + \frac{Pb(l^2 - b^2)}{6l}\right] = \frac{Pb}{6EJl}[(l^2 - b^2) - 3x^2] \tag{7.31}$$

$$\text{und} \quad v = \frac{1}{EJ}\left[-\frac{Pbx^3}{6l} + \frac{Pb(l^2 - b^2)}{6l}x\right] = \frac{Pbx}{6EJl}[(l^2 - b^2) - x^2]. \tag{7.32}$$

Im zweiten Abschnitt:

$$\varphi \approx v' = \frac{1}{EJ}\left[-\frac{Pbx^2}{2l} + \frac{P(x-a)^2}{2} + \frac{Pb(l^2 - b^2)}{6l}\right] \tag{7.33}$$

$$\text{und} \quad v = \frac{1}{EJ}\left[-\frac{Pbx^3}{6l} + \frac{P(x-a)^3}{6} + \frac{Pb(l^2 - b^2)}{6l}x\right]. \tag{7.34}$$

Auf diese Weise hat die Gleichung der elastischen Linie im ersten und zweiten Abschnitt die verschiedene analytische Form (7.32) und (7.34). Die Gleichungen

7.31) bis (7.34) kann man wie früher durch dimensionslose Abszissen ausdrücken. Für den Angriffspunkt der Last ist:

$$m = \frac{a}{l} \text{ und } n = \frac{b}{l}, \text{ wobei } m + n = 1$$

ınd für den Punkt, in dem wir die Durchbiegung suchen, ist

$$\xi = \frac{x}{l} \text{ und } \eta = \frac{l - x}{l}, \text{ wobei } \xi + \eta = 1 \text{ ist.}$$

Dann erhalten wir für den ersten Abschnitt aus den Gleichungen (7.31) und (7.32):

$$v' = \frac{P l^2}{6 E J} [-3 n \xi^2 + n(1 - n^2)] = \frac{P l^2}{6 E J} n[m(1 + n) - 3 \xi^2] \tag{7.35}$$

nd

$$v = \frac{P l^3}{6 E J} [-n \xi^3 + n(1 - n^2) \xi] = \frac{P l^3}{6 E J} n \xi [m(1 + n) - \xi^2]. \tag{7.36}$$

iese Gleichungen bestehen zu Recht bei $0 \leqq x \leqq a$, d. h. bei $0 \leqq \xi \leqq m$.

Für den zweiten Abschnitt ist:

$$v' = \frac{P l^2}{6 E J} [3(\xi - m)^2 - 3 n \xi^2 + m n(1 + n)] \tag{7.37}$$

ıd

$$v = \frac{P l^3}{6 E J} [(\xi - m)^3 - n \xi^3 + m n(1 + n) \xi]. \tag{7.38}$$

iese Gleichungen haben bei $m \leqq \xi \leqq 1$ Gültigkeit.

Den Neigungswinkel α am linken Auflager finden wir aus der Gleichung (7.31). immt man für $x = 0$ an, so ergibt sich:

$$\alpha = \frac{P b (l^2 - b^2)}{6 E J l} = \frac{P b (l - b)(l + b)}{6 E J l} = \frac{P a b (l + b)}{6 E J l} \tag{7.39}$$

er in dimensionslosen Abszissen:

$$\alpha = \frac{P l^2}{6 E J} m n (1 + n) \text{ [1]}. \tag{7.39a}$$

Den Neigungswinkel β am rechten Auflager finden wir aus der Gleichung (7.33), lem wir $x = l$ setzen:

$$\beta = \frac{1}{E J}\left[-\frac{P b l^2}{2 l} + \frac{P (l - a)^2}{2} + \frac{P b (l^2 - b^2)}{6 l}\right] = -\frac{P a b (l + a)}{6 E J l}. \tag{7.40}$$

i dimensionsloser Abszisse ist:

$$\beta = -\frac{P l^2}{6 E J} m n (m + 1) \text{ [2]}. \tag{7.40a}$$

[1] Dies ergibt sich aus (7.35), wenn man $\xi = 0$ annimmt.
[2] Dieses Ergebnis erhält man auch aus (7.37), wenn man in dieser $\xi = 1$ setzt.

C. Ermitteln wir die Stelle und Größe der Pfeilhöhe.

Die größte Durchbiegung ist dort, wo der Neigungswinkel der Tangente zur elastischen Linie des Balkens Null wird. Vorher muß man klären, in welchem der beiden Abschnitte des Balkens sich die größte Durchbiegung befinden wird. Man kann den Beweis führen, daß sie immer im größeren Abschnitt liegen wird.

Nehmen wir beispielsweise an, daß der erste Abschnitt größer als der zweite ist, d. h.

$$a > \frac{l}{2} \quad \text{oder} \quad m > \frac{1}{2}. \tag{7.41}$$

Für den ersten Abschnitt haben die Gleichungen (7.35) und (7.36) Gültigkeit; wir erhalten v_{max}, wenn für $v' = 0$ gesetzt wird. Dann finden wir aus (7.35):

$$m(1+n) - 3\xi^2 = 0$$

oder

$$\xi = \sqrt{\frac{m(n+1)}{3}}. \tag{7.42}$$

Dieser Abszisse wird tatsächlich die größte Durchbiegung entsprechen, wenn sie ebenfalls im ersten Abschnitt liegt, d. h. wenn

$$\xi \leqq m \text{ ist.}$$

Es ist in der Tat:

$$n < \frac{1}{2} \quad \text{und} \quad n+1 < \frac{3}{2}.$$

Ersetzen wir in (7.42) $(n+1)$ durch $\frac{3}{2}$, so kommen wir zu folgender Ungleichung:

$$\xi < \sqrt{\frac{m \cdot 3}{3 \cdot 2}} = \sqrt{\frac{m}{2}} = \sqrt{\frac{m^2}{2m}} = m\sqrt{\frac{1}{2m}}. \tag{7.43}$$

Gemäß (7.41) ist $2m > 1$. Setzt man unter der Wurzel 1 an Stelle von $2m$, so erhalten wir:

$$m\sqrt{\frac{1}{2m}} < m \cdot 1.$$

Vergleichen wir dies mit (7.43), so finden wir:

$$\xi < m,$$

was auch zu beweisen war.

Auf diese Weise wird bei einer rechts von der Mitte des Balkens gelegenen Last sich die Pfeilhöhe $f = v_{max}$ links von der Last ergeben. Ihre Abszisse wird durch die Formel (7.42) bestimmt. Setzt man den Wert ξ in die Formel (7.36) ein, so finden wir:

$$f = v_{max} = \frac{Pl^3}{6EJ}\, n\sqrt{\frac{m(n+1)}{3}}\left[m(n+1) - \frac{m(n+1)}{3}\right]$$

oder

$$f = \frac{Pl^3}{9EJ}\, m\, n(n+1)\sqrt{\frac{m(n+1)}{3}}. \tag{7.44}$$

Wir erinnern daran, daß beim Gebrauch dieser Formel die Abschnitte des Balkens so zu bezeichnen sind, daß

$$a > \frac{l}{2}, \text{ d. h. } m > \frac{1}{2}$$

ist. Hierbei ist es gleichgültig, ob a der rechte oder der linke Abschnitt ist.

In der Praxis kann man, wo sich auch die Last P befinden mag, als v_{max} ohne merklichen Fehler die Durchbiegung in der Mitte des Balkens annehmen. Es folgt daraus, daß sich die Durchbiegung in der Nähe ihres maximalen Wertes sehr wenig ändert und der Punkt mit v_{max} sich in der Nähe der Mitte befindet. Aus der Formel (7.42) ist tatsächlich zu ersehen, daß falls die Last P fast an das rechte Auflager herankommt, d. h. wenn wir annehmen, daß

$$n = 0 \quad \text{und} \quad m = 1 \text{ ist,}$$

dann wird

$$\xi = \sqrt{\frac{1}{3}} = 0{,}577.$$

Demnach ist der Punkt mit der größten Durchbiegung im ganzen um $0{,}077\,l = \frac{1}{13}\,l$ von der Mitte der Öffnung entfernt.

D. Diese Überlegung ist in den Fällen sehr wichtig, in denen am Balken mehrere Lasten angreifen und das Auffinden des Querschnitts mit der größten Durchbiegung kompliziert wird. Dann ist es bequem, als größte Durchbiegung den angenäherten Wert $v_1 = f'$ in der Mitte des Balkens anzunehmen.

Bei einer Last wird der Wert f' auf Grund der Formel (7.36) ermittelt, indem man $\xi = \frac{1}{2}$ setzt. Es ist:

$$f' = \frac{P l^3}{6EJ}\, n\, \frac{1}{2}\left[(1 - n)(1 + n) - \frac{1}{4}\right] = \frac{P l^3}{48EJ}\, n\,(3 - 4n^2) \qquad (7.45)$$

oder nach der Formel (7.32) bei $x = \frac{l}{2}$:

$$f' = \frac{1}{EJ}\left[-\frac{Pb\left(\frac{l}{2}\right)^3}{6l} + \frac{Pb(l^2 - b^2)}{6l}\cdot\frac{l}{2}\right] = \frac{Pb(3l^2 - 4b^2)}{48EJ}. \qquad (7.45\text{a})$$

Im Falle mehrerer Lasten $P_1, P_2, \ldots, P_i, \ldots, P_N$ wird f' nach der Formel

$$f' = \frac{l^3}{48EJ}\sum_{i=1}^{N} P_i n_i (3 - 4n_i^2) \qquad (7.46)$$

ermittelt, oder in absoluten Abszissen wird

$$f' = \frac{1}{48EJ}\sum_{i=1}^{N} P_i b_i (3l^2 - 4b_i^2). \qquad (7.47)$$

Für den bequemen praktischen Gebrauch der Formeln (7.39), (7.40) und (7.45) drücken wir sie durch das Moment unter der Last $M_c = \frac{Pab}{l}$ aus. Dann erhalten wir für

$$\alpha = \frac{Pab(l+b)}{6EJl} = \frac{Pab}{l}\frac{1}{EJ}\frac{l+b}{6} = K_1\frac{M_c l}{EJ}, \tag{7.39b}$$

worin $K_1 = \frac{1+n}{6}$ ist. Analog erhalten wir für:

$$\beta = -\frac{Pab(l+a)}{6EJl} = -K_2\frac{M_c l}{EJ}, \tag{7.40b}$$

worin $K_2 = \frac{1+m}{6}$ ist. Es ist:

$$f = \frac{Pb(3l^2-4b^2)}{48EJ} = K_3\frac{M_c l^2}{EJ}, \tag{7.45b}$$

worin $K_3 = \frac{3-4n^2}{48(1-n)}$ ist.

Die Werte der Koeffizienten K_1, K_2 und K_3 sind in der folgenden Tafel 10 aufgeführt.

Tafel 10

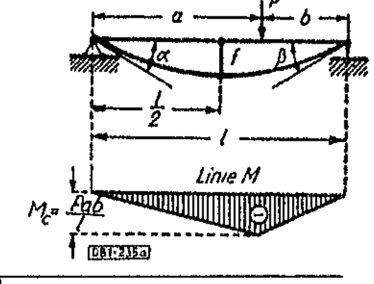
Die Koeffizienten K zur Ermittlung der Drehwinkel der Auflagerquerschnitte und der Pfeilhöhe eines Balkens auf zwei Stützen bei $a > b$,

d. h. $a > \frac{l}{2}$, ergeben sich aus den Formeln:

$$\alpha = K_1\frac{M_c l}{EJ},$$

$$\beta = -K_2\frac{M_c l}{EJ},$$

$$f = K_3\frac{M_c l^2}{EJ}.$$



Relative Abszissen		K_1	K_2	K_3	Bemerkungen
$m = \frac{a}{l}$	$n = \frac{b}{l}$				
1,0	0	0,167	0,333	0,0625 $\left(\frac{1}{16}\right)$	$m = \frac{a}{l}$ und $n = \frac{b}{l}$
0,9	0,1	0,183	0,317	0,0684	sind die relativen Abszissen der Angriffspunkte der Last
0,8	0,2	0,200	0,300	0,0740	
0,7	0,3	0,217	0,283	0,0787	m ändert sich von 1 bis 0,5
0,6	0,4	0,233	0,267	0,0818	
0,5	0,5	0,250	0,250	0,0833 $\left(\frac{1}{12}\right)$	n ändert sich von 0 bis 0,5

3ei der Benutzung der Formeln (7.39) und (7.45) zur Ermittlung der Werte α, β l f muß man beachten, daß man diese, obgleich sie unter der Bedingung $a > \frac{l}{2}$ geleitet sind, auch bei beliebiger Lage der Last benutzen kann, wenn man nur a und m die größere von den Entfernungen der Last von den Auflagern und b und n die kleinere annimmt.

Venn die Last P in der Mitte des Balkens angreift, d. h. $a = \frac{l}{2}$ und $m = \frac{1}{2}$ so wird sich $v_{\max}$ unter der Last befinden.

Dann ist tatsächlich nach (7.42):

$$\xi = \frac{1}{2},$$

l aus (7.44) finden wir:

$$f = \frac{Pl^3}{48EJ}. \tag{7.48}$$

Methode von Clebsch

A. Im vorherigen Kapitel haben wir gesehen, daß schon bei einer Unter-ung des Balkens in zwei Abschnitte die Ermittlung der beliebigen Konstanten npliziert wird. Bei einer größeren Anzahl derselben wird diese Operation 3erdem sehr zeitraubend, und die von uns durchgenommene Methode zur stimmung der Biegelinie erweist sich für die Praxis als sehr ungeeignet. Es daher nicht verwunderlich, daß sich die Gedanken der Forscher schon lange die Suche nach einer einfacheren und gedrängteren Methode zur Aufstellung Gleichung der elastischen Linie konzentrierten.

Schon in der ersten Hälfte des vorigen Jahrhunderts schlug *Clebsch* eine egrationsmethode der Differentialgleichung der elastischen Linie für den Fall , daß der Balken nur mit einer Reihe von Einzellasten belastet ist. Er wies ch, daß die Anzahl der beliebigen Konstanten in diesem Falle leicht auf nur ei zurückgeführt werden kann. Die Clebschsche Methode wird auf die Aus-rung von zwei sehr einfachen Regeln zurückgeführt.

.. Das Biegemoment muß stets nur durch die linken (oder nur durch die hten) Kräfte ausgedrückt werden. Z. B. für den Fall von zwei Lasten (Bild 236) l von drei Abschnitten muß es auf folgende Weise ausgedrückt werden:

ersten Abschnitt $M = Ax$, $(0 \leqq x \leqq a_1)$

zweiten Abschnitt $M = Ax - P_1(x - a_1)$, $(a_1 \leqq x \leqq a_2)$ (7.49)

dritten Abschnitt $M = Ax - P_1(x - a_1) - P_2(x - a_2)$; $(a_2 \leqq x \leqq l)$.

2. Bei der aufeinanderfolgenden Integration dieses Ausdrucks darf man nicht Klammern auflösen, sondern das Binom $(x - a_m)$ als neue Veränderliche an-men:

$$\int P(x - a_m)\,dx = P\int (x - a_m)\cdot d(x - a_m) = P\,\frac{(x - a_m)^2}{2} + C,$$

$$\int P\,\frac{(x - a_m)^2}{2}\,dx = \frac{P}{2}\int (x - a_m)^2\,d(x - a_m) = P\,\frac{(x - a_m)^3}{6} + Cx + D.$$

Die Ergebnisse der Anwendung dieser Regeln kann man leicht an dem in Bild 236 dargestellten Beispiel bewerten.

Unter Benutzung der Ausdrücke (7.49) setzen wir die Differentialgleichungen der elastischen Linie an:

Für den ersten Abschnitt $EJv'' = -Ax$,
für den zweiten Abschnitt $EJv'' = -Ax + P_1(x - a_1)$,
für den dritten Abschnitt $EJv'' = -Ax + P_1(x - a_1) + P_2(x - a_2)$.

Integriert man einmal, so erhalten wir entsprechend:

für den ersten Abschnitt $$EJv' = -A\frac{x^2}{2} + C_1, \tag{7.50}$$

für den zweiten Abschnitt $$EJv' = -A\frac{x^2}{2} + P_1\frac{(x - a_1)^2}{2} + C_2, \tag{7.51}$$

für den dritten Abschnitt $$EJv' = -A\frac{x^2}{2} + P_1\frac{(x - a_1)^2}{2} + P_2\frac{(x - a_2)^2}{2} + C_3. \tag{7.52}$$

Bild 236

Integriert man nochmals, so erhalten wir:

für den ersten Abschnitt $$EJv = -A\frac{x^3}{6} + C_1x + D_1, \tag{7.53}$$

für den zweiten Abschnitt $$EJv = -A\frac{x^3}{6} + P_1\frac{(x - a_1)^3}{6} + C_2x + D_2, \tag{7.54}$$

für den dritten Abschnitt $$EJv = -A\frac{x^3}{6} + P_1\frac{(x - a_1)^3}{6} + P_2\frac{(x - a_2)^3}{6} + C_3x + D_3. \tag{7.55}$$

Zuerst wollen wir die Bedingungen des Zusammenhangs der benachbarten Abschnitte einführen.

1. Bei $x = a_1$, d. h. in dem Grenzpunkt des ersten und zweiten Abschnitts müssen die Werte v' übereinstimmen, d. h. die Werte der rechten Teile von (7.50) und (7.51) müssen untereinander gleich sein. Vergleicht man diese, so kommt man sofort zu dem Schluß, daß

$$C_1 = C_2 \tag{7.56}$$

ist.

2. Bei $x = a_2$ müssen die rechten Teile von (7.51) und (7.52) übereinstimmen. Hieraus finden wir, daß

$$C_2 = C_3 \tag{7.57}$$

und folglich

$$C_1 = C_2 = C_3 = C \tag{7.58}$$

ist, worin mit C der gemeinsame Wert der Konstanten C_1, C_2 und C_3 bezeichnet ist.

3. Bei $x = a_1$ müssen die Werte der rechten Teile von (7.53) und (7.54) übereinstimmen. Berücksichtigt man (7.56), so finden wir, daß

$$D_1 = D_2$$

ist.

4. Bei $x = a_2$ vergleichen wir analog die Werte der rechten Teile von (7.54) und (7.55) und finden bei Berücksichtigung von (7.57) $D_2 = D_3$, d. h.

$$D_1 = D_2 = D_3 = D. \tag{7.59}$$

Auf diese Weise bleiben nur die Konstanten C und D aus den Randbedingungen zu ermitteln.

Bei $x = 0$ ist $v = 0$. Aus (7.53) und (7.59) erhalten wir:

$$D_1 = D_2 = D_3 = D = 0.$$

Bei $x = l$ ist $v = 0$. Benutzt man (7.55) und bezeichnet man

$$l - a_1 = b_1 \quad \text{und} \quad l - a_2 = b_2,$$

so wird:

$$-A\,\frac{l^3}{6} + P_1\,\frac{b_1^3}{6} + P_2\,\frac{b_2^3}{6} + C_3 l = 0,$$

woraus

$$C_3 = \frac{1}{6}\,A l^2 - P_1\,\frac{b_1^3}{l} - P_2\,\frac{b_2^3}{l} = C_1 = C_2 = C$$

ist.

Setzt man die ermittelten Werte der Konstanten C und D in die Gleichungen (7.50) bis (7.55) ein, so erhalten wir Gleichungen der elastischen Linie in allen Abschnitten derselben. Dieses Verfahren kann auf den Fall einer beliebigen Anzahl von Lasten erweitert werden. Man kann es auch auf den Fall erweitern, wenn einzelne Abschnitte des Balkens mit kontinuierlich verteilten Belastungen belegt sind oder in einigen Punkten einzelne Kräftepaare angreifen. Wir werden jedoch nicht Einzelheiten dieser Fälle untersuchen, da im weiteren eine allgemeinere Methode der Integration aufgeführt wird, bei der es nicht notwendig ist, für jeden Abschnitt des Balkens eine besondere Differentialgleichung aufzustellen, und bei der die Anzahl der willkürlichen Integrationskonstanten nicht höher als vier für einen beliebigen Belastungsfall sein wird (siehe den II. Teil des Lehrbuches).

7.5 Graphoanalytische Methode. Fiktive Belastung

A. Die wesentlichste Eigenschaft der in den Kapiteln 7.2 bis 7.4 dargelegten Methode besteht darin, daß zuerst die Lösung in Form eines allgemeinen Integrals der Differentialgleichung der elastischen Linie betrachtet wird und

alsdann die bei der Integration eingeführten willkürlichen Konstanten aus den Randbedingungen ermittelt werden. Wir haben schon gesehen, daß eine solche Methode bei komplizierten Belastungen zu umfangreich ist, da sie mit der Einführung einer großen Zahl von willkürlichen Konstanten und einer gleichen Anzahl von Gleichungen zu ihrer Bestimmung verbunden ist. Das Verfahren von *Clebsch* stellt den ersten Versuch dar, diese Schwierigkeit zu umgehen.

Der nächste wichtige Schritt ist von Prof. *O. Mohr* gemacht worden, der die Möglichkeit aufgezeigt hat, die allgemeine Lösung der Differentialgleichung der elastischen Linie nicht zu untersuchen und hiermit die willkürlichen Konstanten nicht einzuführen. Die Mohrsche Methode ermöglicht es, sofort die spezielle Lösung zu finden, die gleichzeitig sowohl der Differentialgleichung der Aufgabe

$$EJv'' = \pm M$$

als auch den Randbedingungen entspricht. Die andere Besonderheit der Mohrschen Methode ist darin zu sehen, daß sie sowohl analytisch als auch geometrisch dargelegt werden kann. Der letztere Weg ermöglicht es, eine bequeme rein

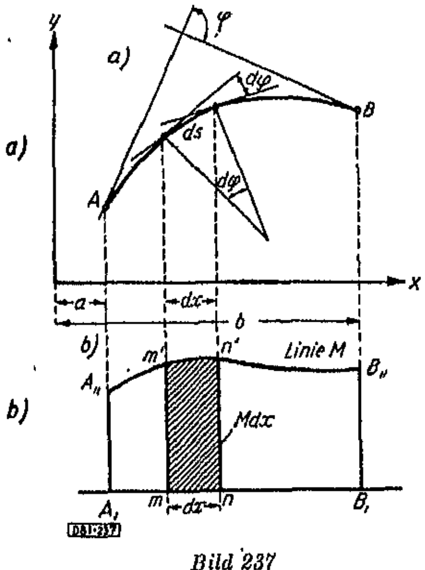


Bild 237

graphische Methode zur Konstruktion der elastischen Linie zu geben. Die Mohrsche Methode nennt man daher oft die graphoanalytische Methode. Zur Vereinfachung der Darlegung betrachten wir sie zuerst als analytische Methode.

Nehmen wir an, daß ein in irgendeiner Form gelagerter Balken sich unter der Einwirkung der gegebenen Belastung durchgebogen hat. In Bild 237, a soll AB einen Teil der gebogenen Achse und A_1B_1 (Bild 237, b) den entsprechenden Abschnitt der Momentenlinie darstellen. Wählen wir auf der Kurve AB ein Element ds, und bezeichnen wir mit $d\varphi$ den Winkel, den die benachbarten Krüm-

mungsradien oder die Tangenten einschließen (Neigungsänderung der benachbarten Tangenten), dann ist:

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{d\varphi}{ds},$$

und hieraus

$$d\varphi = \frac{1}{\varrho}\, ds. \tag{7.60}$$

Benutzen wir die grundlegende Abhängigkeit

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{M}{EJ} \tag{7.61}$$

und beachten wir außerdem, daß $ds = dx \cdot \sqrt{1 + v'^2}$ ist,

wobei wegen der außerordentlichen Kleinheit von v' im Vergleich mit dem Wert 1

$$ds \approx dx \tag{7.62}$$

ist.

Setzt man (7.61) und (7.62) in (7.60) ein, so erhalten wir:

$$d\varphi = \frac{M}{EJ}\, dx = \frac{1}{EJ}\, M\, dx. \tag{7.63}$$

Der Multiplikator $M\,dx$ drückt die von den benachbarten Querschnitten eingeschlossene Fläche des Elements $mm'n'n$ der Biegemomentenlinie aus (Bild 237, b).

Zur Ermittlung des Winkels φ, der von den durch die willkürlich gewählten Punkte A und B gezeichneten Tangenten eingeschlossen wird, genügt es, die Neigungsänderungswinkel der benachbarten Elemente des Abschnitts AB der Achse zu addieren (Bild 237, a). Demnach ist:

$$\varphi = \lim \sum d\varphi = \int_A^B d\varphi,$$

wobei sich das Integral auf den Bogen AB bezieht. Setzen wir den Wert $d\varphi$ aus (7.63) ein, so erhalten wir:

$$\varphi = \int_a^b \frac{M\, dx}{EJ}. \tag{7.64}$$

Die Grenzen der Integration a und b sind die Abszissen des Anfangs und des Endes des Abschnitts. Wenn der Balken eine konstante Steifigkeit hat, so ist:

$$\varphi = \frac{1}{EJ}\int_a^b M\, dx, \tag{7.65}$$

worin das Integral $\int_a^b M\, dx$ die Fläche $A_I A_{II} B_{II} B_I$ des Teiles der Momentenlinie darstellt, der von den Querschnitten A und B eingeschlossen ist (Bild 237, b).

Im weiteren ist es angebracht, die Momentenlinie als Linie irgendeiner *fiktiven Belastung* anzusehen. Manchmal nennt man diese Belastung auch die *Momenten-*

belastung. Ihre Ordinate stellt das Biegemoment im gegebenen Punkt dar und hat die Dimension

$$|\text{Kraft}| \cdot |\text{Länge}|.$$

Die fiktive Belastung auf einem gewissen Abschnitt AB, d. h.

$$\int_a^b M dx$$

hat die Dimension

$$|\text{Kraft}| \cdot |\text{Länge}|^2.$$

Die Formel (7.65) zeigt, daß der Winkel φ gleich der fiktiven Belastung auf dem Abschnitt AB dividiert durch die Steifigkeit EJ ist.

Wenn die Steifigkeit eine veränderliche Größe ist, so konstruieren wir an Stelle der M-Linie die Linie des Wertes:

$$\frac{M}{EJ} = \frac{1}{EJ_0} M \frac{EJ_0}{EJ} = \frac{Mk}{EJ_0},$$

worin EJ_0 eine beliebige konstante Steifigkeit darstellt, die im Mittel an die veränderliche Steifigkeit des Balkens nahe herankommt, und $k = \frac{EJ_0}{EJ}$ ein veränderlicher Wert ist.

Dann erhalten wir an Stelle von (7.65):

$$\varphi = \frac{1}{EJ_0} \int_a^b Mk\, dx. \tag{7.66}$$

In diesem Falle haben wir es mit einer fiktiven Belastung von der Größe Mk zu tun.

Die Formeln (7.65) und (7.66) sind als Ausgangsformeln bei der Mohrschen Methode anzusehen. Im weiteren legen wir sie für den Fall eines Balkens von konstanter Steifigkeit dar. Zum Fall der veränderlichen Steifigkeit gelangt man leicht, indem man überall das Biegemoment M durch den Wert Mk ersetzt.

B. Betrachten wir einen Freiträger, d. h. einen Balken mit einem linken eingespannten und einem rechten freien Ende, der unter der Einwirkung einer beliebigen Belastung steht, und stellen wir uns die Aufgabe, den Neigungswinkel φ_x der Tangente und die Durchbiegung v_x in einem Punkte in einer Entfernung x vom linken Ende zu finden (Bild 238).

Benutzt man die Ableitungen unter Punkt A für den Winkel φ_x, so erhalten wir unmittelbar:

$$\varphi_x = \frac{1}{EJ_0} \int_0^x M(\xi)\, d\xi = \frac{\Phi_x}{EJ},$$

worin das Integral $\int_0^x M(\xi)\, d\xi = \Phi_x$ gleich der links vom Querschnitt, in dem der Winkel φ_x bestimmt wird, gelegenen Fläche $abcd$ der Momentenlinie oder gleich der Summe der linken fiktiven Belastung ist, die wir wegen der Analogie mit der Querkraft mit $\bar{Q}$ bezeichnen werden.

$\overline{Q}$ hat offenbar die Dimension

$$|\text{Kraft}| \cdot |\text{Länge}|^2.$$

Auf diese Weise ist:
$$\varphi_x = \frac{\Phi_x}{EJ} = \frac{\overline{Q}}{EJ}, \tag{7.67}$$

d. h. *der Neigungswinkel der Tangente zur gebogenen Achse in einem beliebigen Querschnitt einer mit dem linken Ende in einer Wand eingespannten Konsole ist*

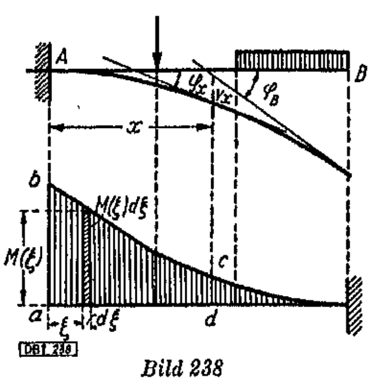


Bild 238

gleich der Summe der linken fiktiven Belastung, d. h. der fiktiven Querkraft $\overline{Q}$ *geteilt durch die Steifigkeit EJ.*

Beispiel 39

Für den in Bild 239 dargestellten Freiträger wollen wir den Neigungswinkel der Tangente an der gebogenen Achse in dem in einer Entfernung x vom linken Auflager gelegenen Querschnitt ermitteln.

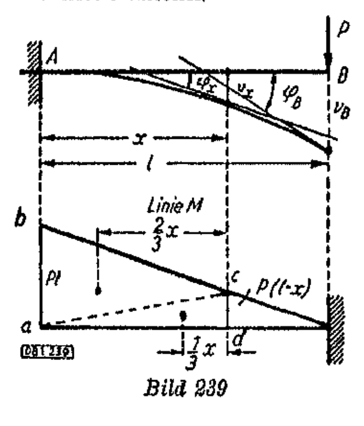


Bild 239

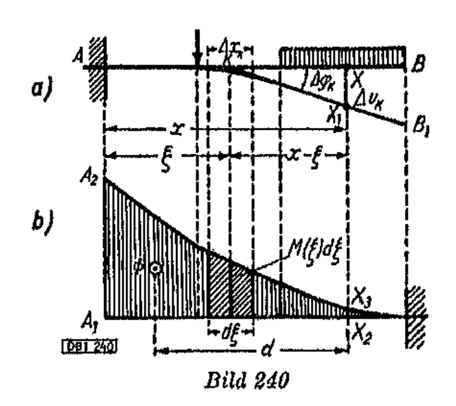


Bild 240

Wir haben
$$\varphi_x = \frac{\text{Fl. } abcd}{EJ}.$$

Unterteilt man die Fläche des Trapezes in zwei Dreiecke, so erhalten wir:

$$\varphi_x = \frac{\text{Fl. } \Delta abc + \text{Fl. } \Delta acd}{EJ} = \frac{1}{EJ}\left[\frac{Plx}{2} + \frac{P(l-x)\,x}{2}\right] = \frac{Pl^2}{2EJ}\left[2\,\frac{x}{l} - \left(\frac{x}{l}\right)^2\right].$$

Der Neigungswinkel am Ende B (bei $x = l$) ist

$$\varphi_B = \varphi_{x=l} = \frac{v l^2}{2EJ}.$$

Wir empfehlen dem Leser zur Übung den Neigungswinkel φ_B unmittelbar, ohne vorherige Ermittlung des Neigungswinkels im Querschnitt x zu berechnen.

C. Teilen wir die Balkenachse in eine möglichst große Anzahl von Abschnitten geringer Länge

$$\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_k, \ldots, \Delta x_{n-1}, \Delta x_n$$

auf und bezeichnen die Neigungsänderungswinkel dieser Abschnitte bei der Biegung mit

$$\Delta\varphi_1, \Delta\varphi_2, \Delta\varphi_3, \ldots, \Delta\varphi_k, \ldots, \Delta\varphi_{n-1}, \Delta\varphi_n .$$

Nehmen wir zunächst an, daß nur im Punkt K (Bild 240, a) des Abschnitts Δx_k ein Neigungsänderungswinkel $\Delta\varphi_k$ entstanden ist und daß links und rechts von diesem Abschnitt der Balken gerade geblieben ist. Aus dem Bild 240 ergibt sich, daß die Durchbiegung Δv_k im Punkt X sich leicht aus dem rechteckigen Dreieck KXX_1 ermitteln und durch den Neigungsänderungswinkel $\Delta\varphi_k$ sowie die Strecke $x - \xi$ vom Punkt K bis zum Punkt X ausdrücken läßt. Es ist:

$$\Delta v_k = \Delta\varphi_k (x - \xi).$$

Es ist klar, daß sich die gesamte Durchbiegung v im Punkt X durch Addition der einzelnen Durchbiegungen Δv_k auf Grund der auf der Strecke von A bis X entstandenen Neigungsänderungswinkel ergibt, d. h.

$$v_x = \lim \sum \Delta\varphi_k (x - \xi) = \int_A^X d\varphi_k (x - \xi) = \frac{1}{EJ} \int_0^x M(\xi)\, d\xi (x - \xi).$$

Das Produkt $M(\xi)\, d\xi (x - \xi)$ kann man als das statische Moment des Flächenelements $M(\xi)\, d\xi$ der Momentenlinie in bezug auf den Punkt X auffassen, in dem wir die Durchbiegung bestimmen. Dann ist das Integral $\int_0^x M(\xi)\,(x - \xi)\, d\xi$ das statische Moment der Fläche $A_1A_2X_3X_2$ der links vom Querschnitt X gelegenen Momentenfläche in bezug auf diesen Querschnitt.

Bezeichnet man auf Grund der Analogie mit dem Biegemoment

$$\int_0^x M(\xi)\,(x - \xi)\, d\xi \text{ mit } \overline{M}_x,$$

so erhalten wir:

$$v_x = \frac{1}{EJ} \int_0^x M(\xi)\,(x - \xi)\, d\xi = \frac{\overline{M}_x}{EJ} = \frac{\Phi d}{EJ}, \qquad (7.68)$$

worin Φ die links vom gegebenen Querschnitt gelegene Momentenfläche und d den Schwerpunktsabstand der Fläche Φ vom gegebenen Querschnitt darstellen. $\overline{M} = \Phi d$ hat offenbar die Dimension:

$$|\text{Kraft}| \cdot |\text{Länge}|^3.$$

Auf diese Weise *ist die Durchbiegung in einem beliebigen Punkt eines mit dem linken Ende in der Wand eingespannten Freiträgers gleich dem statischen Moment des linken Teils der Momentenlinienfläche in bezug auf den Querschnitt, in dem wir die Durchbiegung suchen* (oder dem Moment $\overline{M}$ der linken fiktiven Belastung), *dividiert durch die Steifigkeit EJ.*

D. Mit dem Ziele, daß die oben eingeführten Werte $\overline{M}$ und $\overline{Q}$ dem Biegemoment und der Querkraft völlig analog sind, weisen wir nach, daß sie sich auf irgendeinen Balken beziehen, der die durch die Momentenlinie dargestellte Belastung trägt. Nennen wir diesen Balken den *fiktiven Balken*, der dem gegebenen wirklichen Balken entspricht. Die Konstruktion desselben klären wir auf Grund der von uns erhaltenen Formeln (7.67) und (7.68)

$$\varphi_x = \frac{\overline{Q}}{EJ}$$

und

$$v_x = \frac{\overline{M}}{EJ},$$

die auf die innige Abhängigkeit zwischen den Faktoren der Formänderung φ_x und v_x des tatsächlichen Balkens und den Kräften $\overline{M}$ und $\overline{Q}$ im Querschnitt

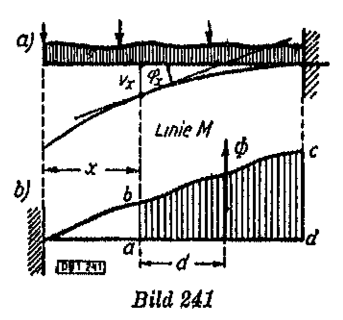


Bild 241

des fiktiven Balkens hinweisen. Da das linke Ende des wirklichen Balkens in der Tat (Bild 240) eingespannt ist, so ist dort:

$$v_A = 0 \quad \text{und} \quad \varphi_A = 0,$$

d. h. am fiktiven Balken haben wir am linken Ende

$$\overline{M}_A = 0 \quad \text{und} \quad \overline{Q}_A = 0.$$

Diese Bedingungen werden erfüllt, wenn wir das linke Ende frei lassen.

Am rechten Ende des wirklichen Balkens ist:

$$v_B = \frac{\overline{M}_B}{EJ} \neq 0$$

und

$$\varphi_B = \frac{\overline{Q}_B}{EJ} \neq 0,$$

worin $\overline{M}_B$ und $\overline{Q}_B$ entsprechend das Moment und die Summe der gesamten fiktiven Belastung am rechten Ende des fiktiven Balkens darstellen. Da diese nicht gleich Null sind, so spannen wir dieses Ende des Balkens in der Wand ein (Bild 240, b). Wir merken uns, daß der fiktive Balken, der dem Freiträger entspricht, ebenfalls ein Freiträger ist, der mit dem anderen Ende eingespannt ist. Die Berechnung der Durchbiegung und des Neigungswinkels der Tangente zur Achse in einem beliebigen Punkt des tatsächlichen Freiträgers wird auf Grund von (7.67) und (7.68) auf die Ermittlung von $\overline{M}$ und $\overline{Q}$ im entsprechenden Punkt des fiktiven Freiträgers zurückgeführt. Es ist klar, daß man die gleichen Formeln (7.67) und (7.68) auch bei Freiträgern benutzen kann, die mit dem rechten Ende in der Wand eingespannt sind (Bild 241, a), wobei unter $\overline{Q}$ und $\overline{M}$ die äußeren Kräfte im gegebenen Querschnitt des Freiträgers infolge der rechten fiktiven Momentbelastung zu verstehen sind. Der fiktive Freiträger muß jetzt mit dem linken Ende eingespannt sein (Bild 241, b).

Beispiel 40

Für den in Bild 239 dargestellten Freiträger ist die Durchbiegung im Querschnitt x (wobei wir das Trapez $abcd$ wie früher in zwei Dreiecke unterteilen)

$$v_x = \frac{1}{EJ} \cdot \left[\frac{Plx}{2} \cdot \frac{2}{3}\, x + \frac{P\,(l-x)\,x}{2} \cdot \frac{x}{3}\right] = \frac{Pl^3}{6EJ}\left[2\left(\frac{x}{l}\right)^2 + \left(1-\frac{x}{l}\right)\left(\frac{x}{l}\right)^2\right].$$ [1]

Die Durchbiegung des Endes B (bei $x = l$) ist:

$$v_B = f = \frac{Pl^3}{3EJ}.$$

Wir empfehlen dem Leser zur Übung, die Durchbiegung f unmittelbar, ohne vorherige Ermittlung der Durchbiegung im Querschnitt x zu berechnen.

E. Führen wir jetzt folgende Vorzeichenregeln ein:

1. Die Durchbiegung v nehmen wir als positiv an, wenn sie nach unten gerichtet ist. Den Winkel φ sehen wir als positiv an, wenn sich die Tangente im Sinne des Uhrzeigers gedreht hat. Man kann sich leicht davon überzeugen, daß die Formeln (7.67) und (7.68) den aufgestellten Forderungen hinsichtlich der Vorzeichen sowohl bei den mit dem linken Ende als auch bei den mit dem rechten Ende eingespannten Freiträgern entsprechen.

2. Als positive fiktive Belastung ($M > 0$) werden wir die nach unten gerichtete ansehen, wie dies für die tatsächliche Belastung angenommen ist.

3. Für das Moment und die Querkraft infolge der linken fiktiven Belastung nehmen wir die gleichen Vorzeichenregeln an wie für die tatsächlichen M und Q:

$M > 0$, wenn es im Sinne des Uhrzeigers dreht, und $Q > 0$, wenn sie nach oben gerichtet ist. Wenn wir jedoch die rechte fiktive Belastung benutzen, so werden wir für $\overline{M}$ und $\overline{Q}$ die umgekehrten Vorzeichenregeln annehmen: $M > 0$, wenn es im Gegensinne des Uhrzeigers dreht, und $Q > 0$, wenn sie nach unten gerichtet ist.

---

[1] *Anm. d. deutschen Redaktion:* Bei weiterer Umformung kann man auch schreiben:

$$v_x = \frac{P \cdot l^3}{3EJ}\left[\frac{3}{2}\left(\frac{x}{l}\right)^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{x}{l}\right)^3\right].$$

Diese Formel entspricht derjenigen für v_B besser und ist somit leichter übersehbar.

F. Nehmen wir jetzt an, daß ein Balken vorliegt, der frei auf zwei Auflagern ruht und der Einwirkung einer beliebigen vertikalen Belastung unterworfen ist (Bild 242, a). Die gekrümmte Linie AC_1B stellt die gebogene Balkenachse dar. Ziehen wir im Punkt A eine Tangente AB_1 zur (gebogenen) Balkenachse. Uns interessiert die Größe der Durchbiegung v in einem beliebigen Punkt C, gemessen von der Sehne AB, die die Balkenachse vor der Durchbiegung darstellt.

Beachten wir, daß die von der Anfangstangente gemessenen Ordinaten v_1 und v_0 nach der Formel (7.68) bestimmt werden können, die dem Fall eines mit dem linken Ende in der Wand eingespannten Trägers entspricht. Es ist:

$$\left.\begin{aligned} BB_1 = v_0 &= -\frac{\Phi_0 d_0}{EJ}, \\ C_1C_2 = v_1 &= -\frac{\Phi_x d_x}{EJ}. \end{aligned}\right\} \qquad (7.69)$$

Bild 242

Die Bezeichnungen Φ_x, d_x, Φ_0 und d_0 gehen aus dem Bild 242, b und c klar hervor. Kennt man v_0 und v_1, so können wir die gesuchte Ordinate v aus der Ähnlichkeit der Dreiecke ACC_2 und ABB_1 finden:

$$\frac{v + v_1}{v_0} = \frac{x}{l}.$$

Hieraus ergibt sich:
$$v = \frac{v_0}{l}\,x - v_1.$$

Da hier die Vorzeichen berücksichtigt sind, so erhalten wir, wenn man in die Gleichung die absoluten Werte von v_0 und v_1 einsetzt,

$$v = \frac{1}{EJ}\left[\frac{\Phi_0 d_0}{l}\,x - \Phi_x d_x\right].$$

Der in den Klammern stehende Ausdruck hat vom Gesichtspunkt der fiktiven Belastungen aus einen einfachen Sinn: $\Phi_0 d_0$ ist das Moment der gesamten Momentenfläche bezogen auf das rechte Balkenende. Es ist offensichtlich, daß der Ausdruck $\frac{\Phi_0 d_0}{l}$ die Auflagerreaktion am linken Balkenende infolge der fiktiven Belastung darstellt[1]). Bezeichnen wir sie mit $\overline{A}$ (der Strich über dem A ist zum Unterschied der fiktiven Auflagerreaktion von der wirklichen Reaktion des Balkens gesetzt). Dann ist:

$$v = \frac{1}{EJ}\,(\overline{A}\,x - \Phi_x d_x).$$

In der letzten Gleichung stellt der Ausdruck in den Klammern die Summe der Momente der linken fiktiven Auflagerreaktion und der linken fiktiven Belastung in bezug auf den gegebenen Querschnitt C dar. Wir heben die völlige Analogie dieses Wertes mit dem Biegemoment in irgendeinem Querschnitt eines auf zwei Auflagern ruhenden Balkens hervor und bezeichnen ihn mit $\overline{M}$. Dann haben wir

$$v = \frac{\overline{M}}{EJ}, \tag{7.70}$$

worin

$$\overline{M} = A\,x - \Phi_x d_x$$

ist.

Hieraus ersehen wir, daß *dem wirklichen Balken AB auf zwei Auflagern* (Bild 242, a) *ebenfalls ein fiktiver Balken A′B′ auf zwei Auflagern* (Bild 242, b) *entspricht.* Gemäß (7.70) ist *die Durchbiegung v in einem beliebigen Punkte des Balkens auf zwei Stützen gleich dem Biegemoment in dem entsprechenden Punkte infolge der fiktiven Belastung dividiert durch die Steifigkeit.*

Aus der Formel (7.70) kann man leicht den Ausdruck für den Neigungswinkel der Tangente zur elastischen Linie in dem gegebenen Punkte erhalten. Zu diesem Zweck differenzieren wir nach x beide Teile der Formel (7.70). Es ist:

$$\frac{dv}{dx} = \frac{1}{EJ}\,\frac{dM}{dx}. \tag{7.71}$$

Da wegen der kleinen Größe des Winkels φ

$$\frac{dv}{dx} = \operatorname{tg}\varphi_x \approx \varphi_x \text{ und ferner } \frac{d\overline{M}}{dx} = \overline{Q},$$

worin $\overline{Q}$ die Querkraft des fiktiven Balkens und hierbei $\overline{Q} = \overline{A} - \Phi_x$ ist, so ergibt sich aus (7.71)

$$\varphi_x = \frac{Q_x}{EJ}. \tag{7.72}$$

Die Formeln (7.70) und (7.72) sind ihrem Wesen nach den Formeln (7.67) und (7.68) für einen Freiträger analog, jedoch muß man im Falle eines Balkens auf zwei Stützen beim Aufstellen von $\overline{M}$ und $\overline{Q}$ außer der linken fiktiven Belastung ebenfalls die von dieser hervorgerufenen Auflagerreaktionen berücksichtigen (Bild 242, c). Offenbar ist

$$\overline{A} = \frac{\Phi_0 d_0}{l} \quad \text{und} \quad \overline{B} = \frac{\Phi_0 c_0}{l}, \tag{7.73}$$

---

[1]) Vgl. die Formel (5.1) im Abschnitt 5.

worin Φ_0 die Fläche der gesamten Momentenlinie und d_0 und c_0 die Abstände des Schwerpunkts der Fläche der Momentenlinie vom linken und rechten Auflager sind.

Aus (7.72) erhalten wir die Formeln für die Neigungswinkel α und β der Tangenten an den Auflagern. Da an den Auflagern entsprechend

$$\overline{Q}_A = \overline{A} \quad \text{und} \quad \overline{Q}_B = -\overline{B}$$

ist, so ergibt sich

$$\alpha = \varphi_A = \frac{\overline{A}}{EJ} \quad \text{und} \quad \beta = \varphi_B = -\frac{\overline{B}}{EJ}. \tag{7.74}$$

Diese Abhängigkeiten sind für die Untersuchung statisch unbestimmter Fälle der Biegung von Balken sehr geeignet. Wir empfehlen dem Leser zur Übung sich davon zu überzeugen, daß die Formeln (7.70) und (7.72) der oben gewählten Vorzeichenregel für die Durchbiegungen und die Neigungswinkel der Tangenten entsprechen.

G. Zieht man den Schluß aus den erhaltenen Ergebnissen, so sehen wir, daß die graphoanalytische Methode für den Freiträger und den einfachen Balken folgende grundlegende Formeln zur Ermittlung der Durchbiegungen und der Neigungswinkel der Tangenten liefert:

$$\varphi = \frac{\overline{Q}}{EJ}, \tag{7.67}$$

$$v = \frac{\overline{M}}{EJ}. \tag{7.68}$$

Hierbei werden $\overline{M}$ und $\overline{Q}$ für den entsprechenden fiktiven Balken, wie dies oben gezeigt wurde, berechnet. Im Falle eines Balkens auf zwei Stützen sind die Neigungswinkel der Tangenten an den Auflagern (7.74)

$$\alpha = \frac{\overline{A}}{EJ} \quad \text{und} \quad \beta = -\frac{\overline{B}}{EJ},$$

worin $\overline{A}$ und $\overline{B}$ die Auflagerreaktionen des fiktiven Balkens (die fiktiven Reaktionen) sind.

Im weiteren wird eine Verallgemeinerung der graphoanalytischen Methode für Balken mit Kragarmen und statisch unbestimmte Fälle der Biegung aufgezeigt.

Beispiele

Beispiel 41

Der Freiträger AB (Bild 243) von der Länge l ist in der Mitte mit einer Kraft P belastet. Es sind die Durchbiegungen und Neigungswinkel der Tangenten an der gebogenen Achse am rechten Ende und in der Mitte zu ermitteln.

Die Momentenlinie ist in Bild 243, b dargestellt. Der Neigungswinkel φ_B und die Durchbiegung $v_B = f$ am rechten Ende sind [siehe die Formeln (7.67) und (7.68)]

$$\varphi_B = \frac{\overline{Q}_B}{EJ} \quad \text{und} \quad v_B = \frac{\overline{M}_B}{EJ}.$$

worin $\overline{Q}_B$ und $\overline{M}_B$ die Querkraft und das Moment im Querschnitt B darstellen. Offenbar ist

$$\overline{Q}_B = +\frac{Pl}{2}\cdot\frac{l}{2}\cdot\frac{1}{2} = +\frac{Pl^2}{8} > 0,\quad M_B = +\frac{Pl^2}{8}\cdot\frac{5}{6}\,l = \frac{5\,Pl^3}{48} > 0,$$

$$\varphi_B = +\frac{Pl^2}{8\,EJ} > 0 \quad \text{und} \quad v_B = +\frac{5\,Pl^3}{48\,EJ}.$$

Der Neigungswinkel φ_c und die Durchbiegung v_c in der Mitte des Balkens sind:

$$\varphi_c = \frac{\overline{Q}_c}{EJ} \quad \text{und} \quad v_c = \frac{\overline{M}_c}{EJ}.$$

Wir haben:

$$\overline{Q}_c = +\frac{Pl^2}{8} > 0,\quad \overline{M}_c = +\frac{Pl^2}{8}\cdot\frac{l}{3} = +\frac{Pl^3}{24},$$

$$\varphi_c = +\frac{Pl^2}{8\,EJ} > 0 \quad \text{und} \quad v_c = +\frac{P\,l^3}{24EJ} > 0.$$

Es ist $\varphi_B = \varphi_C$, was auch anzunehmen war, wenn man von der Art der gegebenen Belastung ausgegangen wäre.

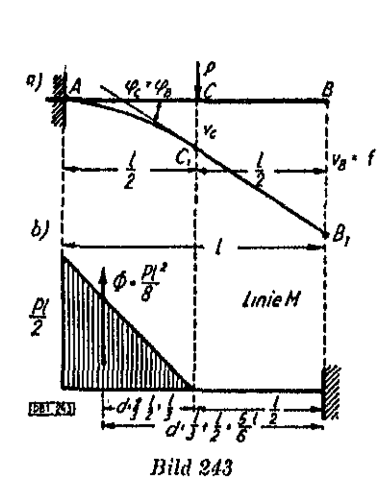


Bild 243

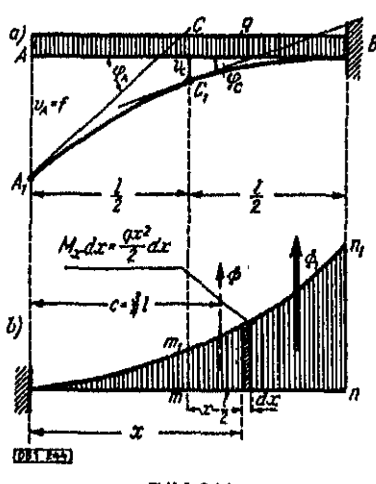


Bild 244

Beispiel 42

Der Freiträger AB von der Länge l (Bild 244, a) ist mit dem rechten Ende in der Wand eingespannt und mit einer gleichmäßig verteilten Belastung von der Größe q belastet. Es sind die Durchbiegungen und Neigungswinkel am linken Ende und in der Mitte zu ermitteln. Die Momentenlinie hat die Form einer Parabel (Bild 244, b).

Der Neigungswinkel φ_A und die Durchbiegung v_A am linken Ende sind:

$$\varphi_A = \frac{\overline{Q}_A}{EJ} \quad \text{und} \quad v_A = \frac{\overline{M}_A}{EJ}.$$

Wir haben:[1]

$$\overline{Q}_A = -\Phi = -\frac{1}{3}\frac{ql^2}{2}l = -\frac{ql^3}{6},$$

$$\varphi_A = -\frac{ql^3}{6EJ} < 0,$$

$$\overline{M}_A = +\Phi c = +\left(\frac{ql^3}{6}\right)\left(\frac{3}{4}l\right) = +\frac{ql^4}{8},$$

$$v_A = +\frac{ql^4}{8EJ} > 0.$$

Der Neigungswinkel φ_C und die Durchbiegung v_C in der Mitte des Balkens sind:

$$\varphi_C = \frac{\overline{Q}_C}{EJ} \quad \text{und} \quad v_C = \frac{\overline{M}_C}{EJ}.$$

Es ist hier erforderlich, den Wert Φ_1 der Fläche mm_1n_1n (Bild 244, b) und ihr statisches Moment S in bezug auf den Querschnitt C (mm_1) zu ermitteln.

Offenbar ist:

$$\overline{Q}_C = -\Phi_1 \quad \text{und} \quad \overline{M}_c = \Phi_1 c_1 = +S.$$

Wir erhalten:

$$\Phi_1 = \int_{\frac{l}{2}}^{l}\frac{qx^2}{2}\,dx = \frac{qx^3}{6}\Bigg|_{\frac{l}{2}}^{l} = \frac{7ql^3}{48},$$

und folglich

$$\overline{Q}_C = -\frac{7ql^3}{48}, \quad \varphi_C = -\frac{7ql^3}{48EJ} < 0,$$

$$S = \int_{\frac{l}{2}}^{l}\frac{qx^2}{2}\left(x-\frac{l}{2}\right)dx = \frac{qx^4}{8} - \frac{qlx^3}{12}\Bigg|_{\frac{l}{2}}^{l} = \frac{17}{384}ql^4,$$

$$\overline{M}_C = +S = +\frac{17}{384}ql^4, \quad v_C = +\frac{17ql^4}{384EJ} > 0.$$

Beispiel 43

Untersuchen wir einen Balken unter der Einwirkung einer Einzellast P, die im Abstande a von dem linken Auflager angreift (Bild 245, a).

Wir berechnen die Auflagerreaktion des fiktiven Balkens, indem wir die Momentenlinie als fiktive Belastung benutzen (Bild 245, b). Die Fläche der gesamten Momentenlinie ist:

$$\Phi_0 = \frac{1}{2}l\frac{Pab}{l} = \frac{Pab}{2},$$

und die Abstände ihres Schwerpunkts von den Auflagern (Kapitel 5.3, Beispiel gemäß Bild 131)

$$c = \frac{a+l}{3} \quad \text{und} \quad d = \frac{b+l}{3}.$$

[1] Siehe Kapitel 5.3 (Ende).

Folglich sind die fiktiven Auflagerreaktionen [siehe die Formeln (7.73)]:

$$\overline{A} = \frac{\Phi d}{l} = \frac{Pab}{2} \cdot \frac{l+b}{3} \cdot \frac{1}{l} = \frac{Pab\,(l+b)}{6l}, \tag{7.75}$$

$$\overline{B} = \frac{\Phi c}{l} = \frac{Pab}{2} \cdot \frac{l+a}{3} \cdot \frac{1}{l} = \frac{Pab\,(l+a)}{6l}. \tag{7.76}$$

Auf Grund der Formeln (7.74) sind die Neigungswinkel der Tangenten an den Auflagern gleich

$$\alpha = \frac{\overline{A}}{EJ} = \frac{Pab\,(l+b)}{6\,EJl}$$

und

$$\beta = -\frac{\overline{B}}{EJ} = -\frac{Pab\,(l+a)}{6\,EJl}.$$

Für einen beliebigen Punkt des ersten Abschnitts ($0 \leqq x \leqq a$) ist:

$$\Phi_x = \frac{1}{2}\,x\,\frac{Pbx}{l} = \frac{Pbx^2}{2l},$$

$$\overline{Q} = \overline{A} - \Phi_x = \frac{Pab\,(l+b)}{6l} - \frac{Pbx^2}{2l}.$$

Hieraus ergibt sich, daß der Neigungswinkel der Tangente im Punkt x gleich

$$\left.\begin{aligned}\varphi = \frac{1}{EJ}\left[\frac{Pab\,(l+b)}{6l} - \frac{Pbx^2}{2l}\right] &= \frac{Pb}{6\,EJl}\,[a\,(l+b) - 3\,x^2] \\ &= \frac{Pb}{6\,EJl}\,[(l^2 - b^2) - 3\,x^2]\ \text{ist.}\end{aligned}\right\} \tag{7.77}$$

Die Durchbiegung im Punkte $x \leqq a$ ist:

$$\left.\begin{aligned}v = \frac{\overline{M}}{EJ} = \frac{1}{EJ}\left[\overline{A}x - \Phi_x\frac{x}{3}\right] &= \frac{1}{EJ}\left[\frac{Pab\,(l+b)\,x}{6\,l} - \frac{Pbx^2}{2l}\cdot\frac{x}{3}\right] \\ = \frac{Pbx}{6\,EJl}\,[a\,(l+b) - x^2] &= \frac{Pbx}{6\,EJl}\,[(l^2 - b^2) - x^2].\end{aligned}\right\} \tag{7.78}$$

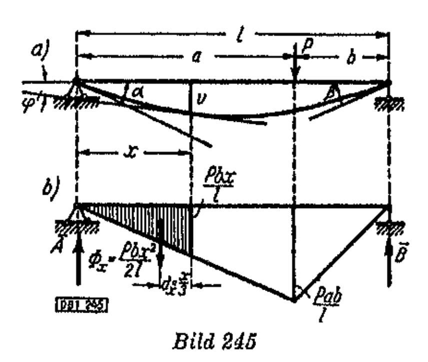


Bild 245

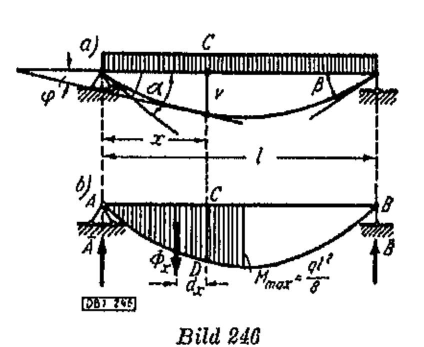


Bild 246

Die Formeln (7.77) und (7.78) stimmen mit den für den gleichen Fall auf analytischem Wege erhaltenen Formeln (7.31) und (7.32) überein. Auf diesem Wege sind wir jedoch bedeutend schneller auf diese Formel gekommen, da wir die Einführung willkürlicher Konstanten und die Ermittlung der letzteren vermieden haben.

Beispiel 44

Betrachten wir einen Balken unter der Einwirkung einer gleichmäßig verteilten Belastung von der Größe q (Bild 246, a).

Berechnen wir zunächst die Auflagerreaktionen des fiktiven Balkens (Bild 246, b). Die Fläche der gesamten Momentenlinie (siehe den Schluß des Kapitels 5.3) ist:

$$\Phi_0 = \frac{2}{3}\,\frac{ql^2}{8}\,l = \frac{ql^3}{12}.$$

Die Momentenlinie ist symmetrisch. Folglich sind die fiktiven Auflagerreaktionen einander gleich:

$$\overline{A} = \overline{B} = \frac{\Phi_0}{2} = \frac{ql^3}{24}.$$

Die Neigungswinkel der Tangenten an den Auflagern sind:

$$\alpha = \frac{\overline{A}}{EJ} = \frac{ql^3}{24EJ} \quad \text{und} \quad \beta = -\frac{\overline{B}}{EJ} = -\frac{ql^3}{24EJ}.$$

Für einen beliebigen Punkt C im Abstande x vom linken Auflager ist:

$$\Phi_x = \int\limits_0^x \left(\frac{ql}{2}\,t - \frac{qt^2}{2}\right) dt = \frac{qlt^2}{4} - \frac{qt^3}{6}\Bigg|_0^x = \frac{qlx^2}{4} - \frac{qx^3}{6},$$

$$\overline{Q} = \overline{A} - \Phi_x = \frac{ql^3}{24} - \left(\frac{qlx^2}{4} - \frac{qx^3}{6}\right) = \frac{ql^3}{24}\left[1 - 6\left(\frac{x}{l}\right)^2 + 4\left(\frac{x}{l}\right)^3\right].$$

Folglich ist der Neigungswinkel der Tangente im Punkte x:

$$\varphi_x = \frac{ql^3}{24EJ}\left[1 - 6\left(\frac{x}{l}\right)^2 + 4\left(\frac{x}{l}\right)^3\right]. \tag{7.79}$$

Die Durchbiegung im Punkte C ist:

$$v = \frac{\overline{M}}{EJ},$$

worin $\overline{M} = \overline{A}x - \Phi_x d_x$ ist.

$|\Phi_x d_x|$ ist aber das statische Moment der Fläche ACD der Momentenlinie in bezug auf den Querschnitt C (Bild 246, b):

$$S = |\Phi_x d_x| = \int\limits_0^l \left(\frac{ql}{2}\,t - \frac{qt^2}{2}\right)(x - t)\,dt = \left[\frac{qlx^3}{12} - \frac{qx^4}{12}\right].$$

Folglich ist:

$$\overline{M} = \overline{A}x - \Phi_x d_x = \frac{ql^3}{24}\,x - \left(\frac{qlx^3}{12} - \frac{qx^4}{24}\right) = \frac{ql^4}{24}\left[\frac{x}{l} - 2\left(\frac{x}{l}\right)^3 + \left(\frac{x}{l}\right)^4\right]$$

und

$$v_x = \frac{ql^4}{24EJ}\left[\frac{x}{l} - 2\left(\frac{x}{l}\right)^3 + \left(\frac{x}{l}\right)^4\right]. \tag{7.80}$$

Die Formeln (7.79) und (7.80) stimmen mit den für den gleichen Fall auf anderem Wege erhaltenen Formeln (7.20) und (7.21) unter Punkt C des Kapitels 7.2 überein.

Beispiel 45

Untersuchen wir einen Balken unter der Einwirkung eines in der Mitte angreifenden Kräftepaares (Bild 247, a).

Die Auflagerreaktionen des fiktiven Balkens (Bild 247, b) sind gemäß den Formeln (7.73)

$$\overline{A} = \frac{\Phi_2 d_2 - \Phi_1 d_1}{l} = \frac{\frac{m_0 l}{8} \cdot \frac{l}{3} - \frac{m_0 l}{8} \cdot \frac{2}{3} l}{l} = -\frac{m_0 l}{24}$$

$$\overline{B} = \Phi_2 - \Phi_1 - \overline{A} = \frac{m_0 l}{8} - \frac{m_0 l}{8} - \left(-\frac{m_0 l}{24}\right) = \frac{m_0 l}{24}$$

(d. h. die linke fiktive Auflagerreaktion muß nach unten und die rechte nach oben gerichtet sein).

Die Neigungswinkel der Tangenten an den Auflagern sind:

$$\alpha = \frac{\overline{A}}{EJ} = -\frac{m_0 l}{24 EJ} < 0,$$

$$\beta = -\frac{\overline{B}}{EJ} = -\left(+\frac{m_0 l}{24 EJ}\right) = -\frac{m_0 l}{24 EJ} < 0.$$

Bild 247

Der Neigungswinkel φ in der Mitte des Balkens ist:

$$\varphi = \frac{\overline{Q}}{EJ} = \frac{1}{EJ}(\overline{A} + \Phi_1) = \frac{1}{EJ}\left(-\frac{m_0 l}{24} + \frac{m_0 l}{8}\right) = +\frac{m_0 l}{12 EJ} > 0,$$

d. h. der Neigungswinkel in der Mitte des Balkens ist zweimal so groß als der Neigungswinkel an den Auflagern und dem Vorzeichen nach entgegengesetzt.

Die Durchbiegung in der Mitte ist:

$$v = \frac{\overline{M}}{EJ} = \frac{1}{EJ}\left(\overline{A}\frac{l}{2} + \Phi_1 d_3\right) = \frac{1}{EJ}\left(-\frac{m_0 l}{24} \cdot \frac{l}{2} + \frac{m_0 l}{8} \cdot \frac{l}{6}\right) = 0.$$

In Bild 247, a ist die elastische Linie des Balkens dargestellt.

II. Nehmen wir einmal an, daß ein Balken mit zwei Kragarmen vorliegt, der frei auf zwei Auflagern ruht und unter der Einwirkung einer vertikalen Belastung steht (Bild 248, a). Uns interessieren die Größen der Durchbiegung und des Neigungswinkels in einem beliebigen Punkte der gebogenen Balkenachse.

In irgendeinem Punkte des zwischen den Auflagern gelegenen Balkenteils muß man diese Größen nach den Formeln (7.70) und (7.72) wie für einen einfachen Balken ermitteln, indem man vorher die Kragarme entfernt und ihre Wirkung durch entsprechende Kräftepaare m_A und m_B ersetzt (Bild 248, b). Dann ist:

$$v = \frac{\overline{M}}{EJ} \tag{7.70}$$

und

$$\varphi = \frac{\overline{Q}}{EJ}, \tag{7.72}$$

worin $\overline{Q}$ und $\overline{M}$ die fiktive Querkraft und das fiktive Biegemoment im gegebenen Punkte des fiktiven Balkens sind, der mit der Fläche der Momentenlinie infolge

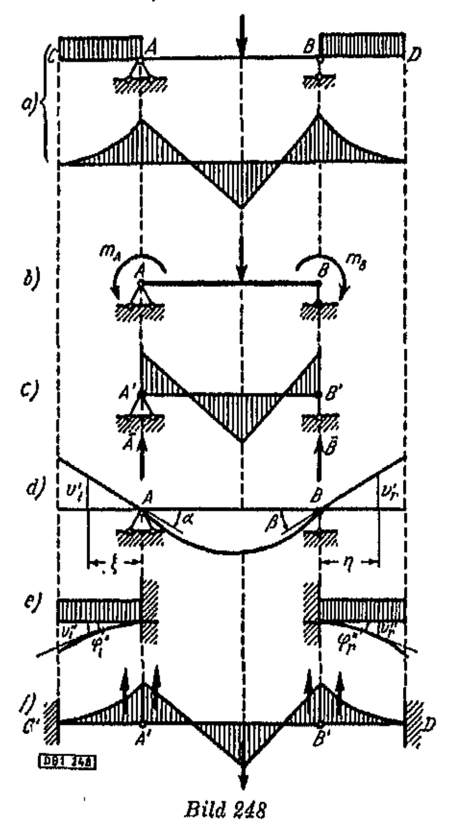


Bild 248

der Belastung des Balkenfeldes zwischen den Auflagern und der an den Enden angreifenden Kräftepaare m_A und m_B belastet ist (Bild 248, c).

Die Neigungswinkel an den Auflagern werden nach den Formeln:

$$\alpha = \frac{\overline{A}}{EJ}$$

und
$$\beta = -\frac{\overline{B}}{EJ}$$

ermittelt, worin $\overline{A}$ und $\overline{B}$ die entsprechenden Reaktionen des fiktiven Balkens sind (Bild 248, c).

Die Ermittlung der Durchbiegungen und der Neigungswinkel in den auf den Kragarmen gelegenen Punkten werden wir durchführen, indem wir zuerst von der Annahme ausgehen, daß die überkragenden Teile des Balkens absolut starr sind. Dann werden sich die unverformt gebliebenen Kragarme (Bild 248, d) um die Winkel α und β drehen, und der Neigungswinkel in einem beliebigen Punkte des linken Kragarmes ist:
$$\varphi_l' = \alpha$$
und des rechten:
$$\varphi_r' = \beta.$$

Die Durchbiegung v_l' in einem beliebigen Punkte des linken Kragarmes in einem Abstand ξ von dem Auflager A ist:
$$v_l' = -\xi\alpha. \tag{7.81}$$

Das Minuszeichen ist aus dem Grunde gewählt, weil die Durchbiegungen dem Vorzeichen nach dem Winkel α entgegengesetzt sein werden. Die Durchbiegung in einem beliebigen Querschnitt des rechten Kragarmes im Abstande η vom Auflager B ist analog
$$v_r' = \eta\beta. \tag{7.82}$$

In Wirklichkeit verformen sich jedoch die Kragarme. Die hierbei entstehenden Durchbiegungen und Neigungswinkel können nach den Formeln (7.67) und (7.68) ermittelt werden. Bezeichnen wir sie für den linken Kragarm mit v_l'' und φ_l'' und für den rechten Kragarm mit v_r'' und φ_r''. Geht man von dem Prinzip der Unabhängigkeit der Kräftewirkung aus, so erhalten wir die endgültigen Werte der Durchbiegungen und Neigungswinkel durch entsprechende Addition:
$$\left.\begin{aligned} v_l &= v_l' + v_l'' = -\xi\alpha + v_l''; & v_r &= v_r' + v_r'' = \eta\beta + v_r'' \\ \varphi_l &= \varphi_l' + \varphi_l'' = \alpha + \varphi_l''; & \varphi_r &= \varphi_r' + \varphi_r'' = \beta + \varphi_r''. \end{aligned}\right\} \tag{7.83}$$

J. Das mit den Formeln (7.83) ausgedrückte Ergebnis kann durch die Konstruktion eines dem gegebenen Kragträger entsprechenden fiktiven Balkens erreicht werden (Bild 248, a). Zu diesem Zweck benutzen wir wie oben die Formeln (7.67) und (7.68). Die Enden C und D des wirklichen Balkens sind frei. Hier ist $v \neq 0$ und $\varphi \neq 0$. Dies bedeutet, daß die Enden C' und D' des fiktiven Balkens (Bild 248, f) eingespannt sein müssen. Außerdem muß man berücksichtigen, daß in den Auflagerpunkten A und B des wirklichen Balkens die Durchbiegung v bei beliebiger Belastung gleich Null ist. Dies bedeutet, daß in den entsprechenden Punkten A' und B' des fiktiven Balkens das Biegemoment $\overline{M}$ bei beliebiger fiktiver Belastung gleich Null sein muß. Diese Bedingung wird erfüllt, wenn in den Punkten A' und B' Gelenke angeordnet werden oder, anders ausgedrückt, wenn wir den fiktiven Balken aus zwei Kragbalken $C'A'$ und $B'D'$ und einem an den Enden gestützten Zwischenbalken $A'B'$ bilden.

Die Ermittlung der Winkel φ_x und der Durchbiegungen v_x des wirklichen Balkens (Bild 248, a) wird auf die Ermittlung der Querkräfte $\overline{Q}$ und der Biegemomente $\overline{M}$ des fiktiven Balkens (Bild 248, f) zurückgeführt. Bei der Ermittlung der Durchbiegungen und der Neigungswinkel des zwischen den Auflagern gelegenen Teiles AB des wirklichen Balkens genügt es, sich auf den Zwischenteil $A'B'$ des fiktiven Balkens zu beschränken, wie dies auch oben durchgeführt wurde (Bild 248, c).

Bei der Untersuchung der Formänderungen der Kragarme CA und BD des wirklichen Balkens kann man sich auf die Betrachtung der Kragteile $C'A'$ und $B'D'$ des fiktiven Balkens beschränken (Bild 248, f), indem man den Zwischenteil $A'B'$ entfernt und seine Wirkung auf die Enden A' und B' der Kragteile durch Drücke ersetzt, die den Reaktionen $\bar{A}$ und $\overline{B}$ gleich und entgegengesetzt gerichtet sind.

Es wird dem Leser empfohlen, sich davon zu überzeugen, daß man auf diesem Wege die gleichen Formeln wie früher (7.83) erhält.

7.6 Graphische Methode

A. Den Ausdruck für die Durchbiegung (7.68) schreiben wir in folgende Form um:

$$\overline{M} = EJv. \tag{7.84}$$

Stellen wir uns einmal irgendeine kontinuierlich verteilte Belastung vor, und zeichnen wir für diese eine Seilkurve bei einem Polabstand H (Kapitel 5.9). Das Moment irgendeines Teiles dieser Belastung um den gegebenen Punkt wird, wie uns bekannt, durch

$$M = Hy \tag{7.85}$$

ausgedrückt, worin y die Ordinate der Seilkurve zwischen den äußersten Seilzügen für den gewählten Teil der Belastung ist. Vergleicht man die Formeln (7.84) und (7.85), so kommen wir zu folgender Ableitung. Setzen wir

$$M = \overline{M} \quad \text{und} \quad H = EJ$$

an, so erhalten wir:

$$y = v,$$

d. h., wenn wir für die fiktive Momentenbelastung eine Seilkurve bei einem Polabstand $H = EJ$ zeichnen, so stellen die Ordinaten dieser Kurve die elastische Linie des Balkens dar, oder, kürzer ausgedrückt, die elastische Linie kann als Seilkurve für die Momentenbelastung bei einem Polabstand $H = EJ$ erhalten werden. Diese Sachlage gibt uns eine rein geometrische Konstruktionsmethode der elastischen Linie und erklärt uns endgültig, warum die Mohrsche Methode die Bezeichnung „graphoanalytische" erhalten hat.

Der Gang der Konstruktion ist folgender: Man wählt irgendeinen Linearmaßstab für die Darstellung der fiktiven Kräfte (z. B. 1 tm² ≙ 1 mm) und zeichnet für diese das Kräftepolygon. Wir wählen den Polabstand $H = EJ$. Wir ziehen die Seilstrahlen, konstruieren das Seilpolygon und zeichnen in dieses die Kurve (Kapitel 5.9) ein, die die elastische Linie in dem gleichen Maßstab darstellt, in dem der uns gegebene Balken wiedergegeben ist. Wir wissen jedoch, daß die Durchbiegungen gewöhnlich nur einen geringfügigen Teil der Spannweite

des Balkens ausmachen. Daher wird sich die auf die angegebene Weise gezeichnete Kurve nur unmerklich von einer Geraden unterscheiden, und das Abmessen der Durchbiegungen wird sich praktisch als unmöglich erweisen. Daher muß man den Polabstand $H = EJ$ verkleinern und damit den Maßstab der Ordinaten der elastischen Linie[1]) um so viel mal vergrößern, daß man die Durchbiegungen in der Zeichnung messen kann.

Wenn der Balken im Maßstab $1/s$ dargestellt ist und man die Durchbiegungen in natürlicher Größe zu erhalten wünscht, so erhalten wir, wenn man die Steifigkeit des Balkens in $|\mathrm{t}| \cdot |\mathrm{m}|^2$ ausdrückt, den erforderlichen Polabstand[2])

$$H = \frac{EJ}{s} \, [\mathrm{tm}^2].$$

Um aber die Durchbiegung in n-facher Vergrößerung zu erhalten, muß man den Polabstand gleich

$$H = \frac{EJ}{n \cdot s}$$

annehmen.

Den erhaltenen Wert H muß man im Maßstab der fiktiven Kräfte abtragen.

B. Die graphische Methode ist besonders für die Fälle geeignet, in denen der Balken in den verschiedenen Abschnitten ein unterschiedliches Querschnittsträgheitsmoment aufweist. Das letztere trifft z. B. für genietete und geschweißte Stahlträger infolge der zusätzlichen horizontalen Gurtplatten in den Abschnitten zu, in denen sich das rechnerische Biegemoment vergrößert. Hierbei kann man eines von zwei Verfahren wählen:

1. Die Seilkurve wird für einzelne Abschnitte entsprechend der verschiedenen Steifigkeiten EJ dieser Abschnitte mit verschiedenen Polabständen gezeichnet.

2. Die Seilkurve wird bei einem beliebig gewählten Polabstand (angenommen, gleich der größten Steifigkeit) und entsprechend reduzierten fiktiven Kräften gezeichnet. Wenn daher der gewählte Wert des Polabstandes $H = EJ$ ist, so erhalten wir die entsprechenden geänderten fiktiven Kräfte, wenn wir an Stelle der M-Linie die Mk-Linie zeichnen, worin $k = \frac{EJ_0}{EJ}$ und EJ die Steifigkeit des Balkens in einem beliebigen Querschnitt ist.

Die Genauigkeit der Konstruktion hängt von der Aufteilung der Fläche der Momentenlinie in eine mehr oder weniger große Anzahl von Teilen ab.

Für einen auf zwei Auflagern ruhenden Balken muß man die Schlußlinie unter Beachtung der Bedingung ziehen, daß die Durchbiegungen an den Auflagern gleich Null sind. Demzufolge muß man die Mitten der Auflager auf die Seillinie herunterloten und durch die erhaltenen Schnittpunkte die Schlußlinie ziehen. Für einen mit einem Ende in einer Wand eingespannten Balken ist die Durchbiegung und der Neigungswinkel an der Einspannungsstelle gleich Null. Auf diese Weise ist die Schlußlinie die Tangente, die durch den der Einspannungsstelle entsprechenden Punkt zur Seillinie gezogen wird.

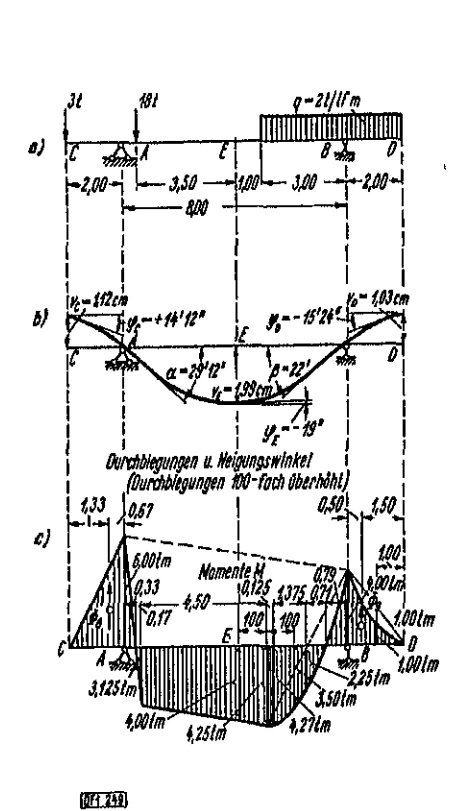
---

[1]) Da in der Formel (7.85) der linke Teil M von dem Maßstab der Zeichnung nicht abhängt, so wird sich y bei einer Verkleinerung von H auf den m-ten Teil um das m-fache vergrößern.

[2]) Ausführliches über die graphische Methode siehe Л. Д. Проскуряков, „Строительная механика", ч. I. Москва 1928, („Die Baumechanik" von L. D. Proskurjakow, Teil I. Moskau 1928), И. М. Рабинович, „Курс строительной механики" .ч. I. Москва 1938 (Das „Lehrbuch der Baumechanik" von J. M. Rabinowitsch. Teil I, Moskau 1938) und Н. П. Митинский, „Строительная механика", СП. Б, 1913, („Die Baumechanik" von N. N. Mitinski, St. Petersburg 1913).

C. Beispiel 46

1. Es soll der Querschnitt des stählernen Kragträgers (Bild 249, a) bestimmt werden,
2. sollen die Durchbiegungen und Neigungswinkel der gebogenen Achse in den Punkten A, B, C, D und E mit Hilfe der graphoanalytischen Methode ermittelt werden und
3. soll die Biegelinie des Balkens graphisch mit Hilfe des Seilpolygons gezeichnet, und schließlich sollen die für die Punkte C, D und E gefundenen Durchbiegungen mit den Ergebnissen der Berechnung auf Grund der graphoanalytischen Methode verglichen werden.



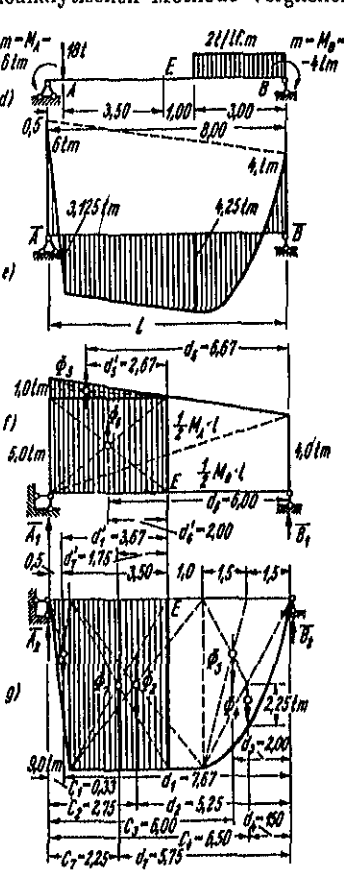


Bild 249

Wahl des Querschnitts.

Die Momentenlinie ist in Bild 249, c dargestellt. $M_{\max} = 6$ tm und folglich $W_{x\,\mathrm{erf}} = \frac{600\,000}{1400} = 428$ cm³. Wir wählen einen I-Träger Nr. 27 b[1]), der ein $W_x = 509$ cm³ und ein $J_x = 6878$ cm⁴ aufweist.

Die Steifigkeit des Balkens ist:

$$EJ = 2{,}0 \cdot 10^6 \cdot 6878 = 13756 \cdot 10^6 = 1375{,}6 \text{ tm}^2.^{2)}$$

[1]) *Anm. d. deutschen Redaktion:* Diese Profilwerte entsprechen etwa denen des in Deutschland nicht mehr gebräuchlichen ungeraden Profiles I 27 mit $W_x = 491$ cm³ und $J_x = 6630$ cm⁴.

[2]) *Anm. d. deutschen Redaktion:* Der E-Modul deutscher Stähle wird allgemein zu $E = 2{,}1 \cdot 10^6$ [kg/cm²] angesetzt.

Bestimmung der Neigungswinkel an den Auflagern

Zur Ermittlung der Neigungswinkel an den Auflagern genügt es, den mittleren Teil des Balkens herauszutrennen und die Wirkung der Kragarme durch Momente zu ersetzen (Bild 249, d). Zur bequemeren Berechnung teilen wir die Momentenlinie des Mittelfeldes (Bild 249, e) in zwei Linien auf:

in eine infolge der an den Enden angreifenden Kräftepaare und eine zweite infolge der Belastung zwischen den Auflagern (Bild 249, f). Dann ist

$$\alpha = \frac{\overline{A}}{EJ} \quad \text{und} \quad \beta = -\frac{\overline{B}}{EJ},$$

worin $\overline{A} = \overline{A}_1 + \overline{A}_2$ und $\overline{B} = \overline{B}_1 + \overline{B}_2$,

$$\overline{A}_1 = \frac{M_A l}{3} + \frac{M_B l}{6} = -\frac{6 \cdot 8}{3} + \frac{-4 \cdot 8}{6} = -21{,}33 \text{ tm}^2$$

und $\overline{B}_1 = \frac{M_A l}{6} + \frac{M_B l}{3} = \frac{-6 \cdot 8}{6} + \frac{-4 \cdot 8}{3} = -18{,}67 \text{ tm}^2$ ist.

Ferner haben wir:

$$\overline{A}_2 = \frac{\Sigma \Phi_i d_i}{l} = \frac{\Phi_1 d_1 + \Phi_2 d_2 + \Phi_3 d_3 + \Phi_4 d_4}{l}$$

$$= \frac{\frac{9 \cdot 0{,}5}{2} \cdot 7{,}67 + 4{,}5 \cdot 9 \cdot 5{,}25 + \frac{3 \cdot 9}{2} \cdot 2 + \frac{2}{3} \cdot 2{,}25 \cdot 3 \cdot 1{,}5}{8} = 32{,}96 \text{ tm}^2,$$

$$\overline{B}_2 = \frac{\Sigma \Phi_i c_i}{l} = \frac{\Phi_1 c_1 + \Phi_2 c_2 + \Phi_3 c_3 + \Phi_4 c_4}{l}$$

$$= \frac{\frac{9 \cdot 0{,}5}{2} \cdot 0{,}33 + 4{,}5 \cdot 9 \cdot 2{,}75 + \frac{3 \cdot 9}{2} \cdot 6 + \frac{2}{3} \cdot 2{,}25 \cdot 3 \cdot 6{,}5}{8} = 27{,}8 \text{ tm}^2.$$

Dann ist $\overline{A} = -21{,}33 + 32{,}96 = 11{,}63 \text{ tm}^2$; $\overline{B} = -18{,}67 + 27{,}8 = 9{,}13 \text{ tm}^2$.

Es ist folglich $\alpha = \frac{\overline{A}}{EJ} = \frac{11{,}63}{1375{,}6} = 0{,}0085 = 29'12''$,

$$\beta = -\frac{\overline{B}}{EJ} = -\frac{9{,}13}{1375{,}6} = -0{,}0066 = -22'.$$

Bestimmung der Durchbiegung v_E und des Neigungswinkels φ_E in der Mitte

Es ist nach den Formeln (7.67 und 7.68)

$$v_E = \frac{\overline{M}}{EJ} \quad \text{und} \quad \varphi_E = \frac{\overline{Q}}{EJ}.$$

Gemäß Bild 249, f haben wir:

$$\overline{Q} = \overline{A} + \Phi_5 + \Phi_6 - \Phi_1 - \Phi_7 = 11{,}63 + \frac{1 \cdot 4}{2} + 5 \cdot 4 - \frac{0{,}5 \cdot 9}{2} - 3{,}5 \cdot 9 = -0{,}12 \text{ tm}^2,$$

$$\overline{M} = \overline{A} \cdot \frac{l}{2} + \Phi_5 d_5 + \Phi_6 d_6 - \Phi_1 d_7 - \Phi_7 d_8$$

$$= 11{,}63 \cdot 4 + \frac{1 \cdot 4}{2} \cdot 2{,}67 + 5 \cdot 4 \cdot 2 - \frac{0{,}5 \cdot 9}{2} \cdot 3{,}67 - 3{,}5 \cdot 9 \cdot 1{,}75 = 27{,}48 \text{ tm}^2.$$

Folglich ist: $v_B = \frac{27,48}{1375,6} = 0,0199 \text{ m} = 1,99 \text{ cm}$

(Die Durchbiegung ist positiv, d. h. nach unten gerichtet),

und $\varphi_B = \frac{-0,12}{1375,6} = -0,000088 = -0,005° = -19''.$

Bestimmung der Durchbiegung v_O und des Neigungswinkels φ_O am Ende des linken Kragarmes.

Benutzt man die Formeln (7.83), so ist:

$$\varphi_O = \varphi_{O'} + \varphi_{O''} \quad \text{und} \quad v_O = v_{O'} + v_{O''},$$

worin $\varphi_{O'} = \alpha = +0,0085 = +29'12''$

und $v_O' = -a\alpha = -2 \cdot 0,0085 = -0,017 \text{ m} = -1,7 \text{ cm}$ ist.

Zur Ermittlung der Werte $\varphi_{O''}$ und $v_{O''}$ benutzen wir die Formeln (7.67) und (7.68).

Es ist: $\varphi_{O''} = \frac{\overline{Q}}{EJ}$ und $v_{O''} = \frac{\overline{M}}{EJ}$,

worin $\overline{Q} = -\frac{6 \cdot 2}{2} = -6 \text{ tm}^2$ und $\overline{M} = 6 \cdot \frac{4}{3} = 8,0 \text{ tm}^3$ ist.

Folglich ist: $\varphi_{O''} = \frac{\overline{Q}}{EJ} = -\frac{6}{1375,6} = -0,0044 = -16'$

und $v_{O''} = \frac{\overline{M}}{EJ} = +\frac{8,0}{1375,6} = +0,0058 \text{ m} = +0,58 \text{ cm}.$

Setzt man die Werte in (7.83) ein, so erhalten wir:

$$\varphi_O = \varphi_{O'} + \varphi_{O''} = +29'12'' + (-16') = 13'12''$$

und $$v_O = v_{O'} + v_{O''} = -1,7 + 0,58 = -1,12 \text{ cm}$$

(die Durchbiegung ist negativ, d. h. nach oben gerichtet).

Die Ermittlung der Durchbiegung v_D und des Neigungswinkels φ_D am Ende D des rechten Kragarmes wird analog durchgeführt. Wir erhalten:

$$\varphi_D = -15'24'' \quad \text{und} \quad v_D = -1,03 \text{ cm}$$

(die Durchbiegung ist negativ, d. h. nach oben gerichtet).

Die elastische Linie des Balkens mit den eingetragenen Werten der Winkel und Durchbiegungen ist in Bild 249, b dargestellt.

Graphische Ermittlung der Durchbiegungen (Bild 250)

Die Fläche der Momentenlinie teilen wir in Elemente von je 1 m auf, so daß die mittleren Ordinaten der Elemente die Größen der Flächen angeben, d. h. sie können zahlenmäßig gleich den fiktiven Kräften angenommen werden. Eine Ausnahme bilden die fiktiven Kräfte **3**, 4 (da hier die Längen der Abschnitte ungefähr gleich 0,25 m sind) und 5 (die Länge des Abschnitts ist ungefähr gleich 0,5 m) (Bild 250, b). Für die beiden ersten Kräfte sind die Ordinaten auf ein Viertel und für die letzte auf die Hälfte verkleinert. Als Maßstab der fiktiven Kräfte sind 2 tm² ≙ 1 cm gewählt (die Zeichnung ist gegenüber dem Original verkleinert).

Da sich in unserem Falle die fiktiven Kräfte hinsichtlich des Vorzeichens ändern, müssen die Vektoren, die diese Kräfte im Kräftepolygon darstellen, teils nach unten und teils nach oben gerichtet sein. Um das sich hierbei ergebende Überdecken der Vektoren durch andere zu vermeiden, ist in Bild 250, c folgendes Verfahren angewandt worden.

Für Kräfte, die nach unten gerichtet sind, ist das Kräftepolygon aO_2b mit dem Pol O_2 gezeichnet. Was jedoch den Teil des Kräftepolygons für die fiktiven Kräfte des linken Kragarmes anbetrifft, so sind mit diesem zwei Drehungen vorgenommen worden:

1. um 180° um die vertikale Achse in die Lage $aO_2'c_1$ und
2. um 180° um die horizontale Achse $x \div x$ in die Lage aO_1c.

Es ist leicht zu erkennen, daß hierbei die Richtungen der Strahlen *1, 2, 3* und *4* mit ihren ursprünglichen Richtungen übereinstimmen, die entsprechenden Kräfte *1, 2* und *3* aber nicht mehr nach oben, sondern wie die Kräfte 4,5 —11 nach unten gerichtet sind.

Das gleiche Verfahren ist auf die fiktiven Kräfte des rechten Kragarmes angewandt worden. Dieses Verfahren ermöglicht es, alle fiktiven Kräfte im Kräfteplan unabhängig von ihrem Vorzeichen nach unten abzutragen, wobei aber der Polabstand für nach *oben* gerichtete Kräfte nach *links* und für nach *unten* gerichtete Kräfte nach *rechts* abgetragen wird. Der Maßstab des Polabstandes $H = \frac{EJ}{100} = 13{,}756 \text{ tm}^2$ ist so gewählt, daß sich die Durchbiegungen in natürlicher Größe ergeben (da der Längenmaßstab $^1/_{100}$ ist, so muß der Polabstand EJ auf den hundertsten Teil verkleinert werden). Denkt man an den Maßstab der fiktiven Kräfte ($2 \text{ tm}^2 \triangleq 1$ cm), so wählen wir in der Zeichnung

$$H = \frac{13{,}756}{2} = 6{,}88 \text{ cm}.$$

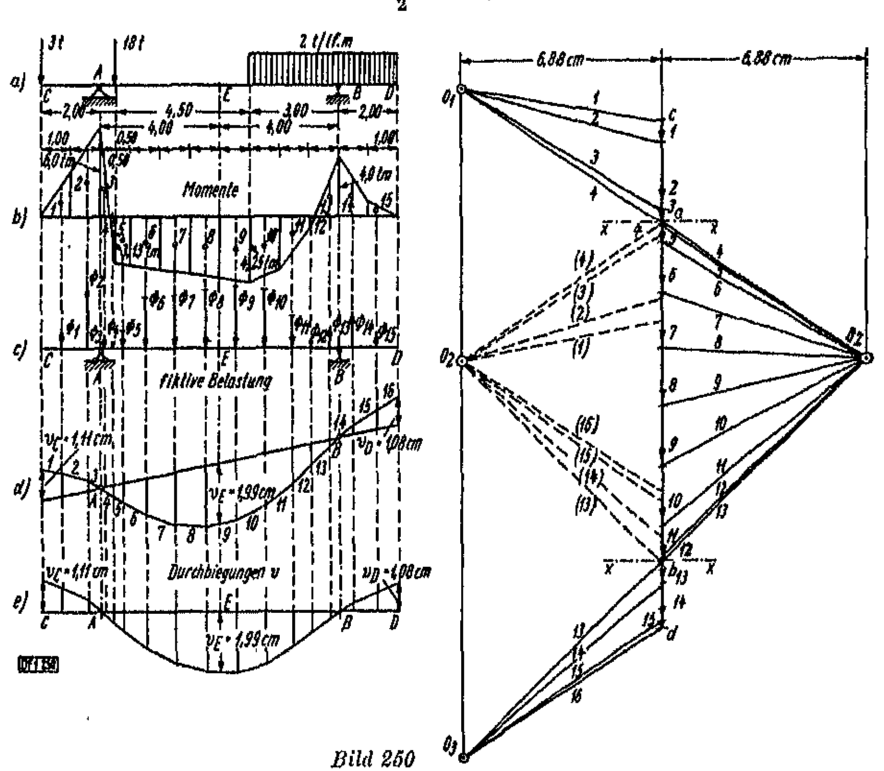


Bild 250

Die Schlußlinie ist bei Beachtung der Bedingung gezogen, daß die Durchbiegungen an den Auflagern gleich Null sind (Bild 250, c). Der Unterschied der Durchbiegungen in den Punkten E und D, die graphoanalytisch berechnet und graphisch bestimmt worden sind, ist geringfügig.

Die entsprechende, von der horizontalen Basis aus gezeichnete elastische Linie ist in Bild 250, d dargestellt.

7.7 Lotrechte Verschiebungen des an einem Ende eingespannten und des auf zwei Stützen frei aufliegenden Balkens bei beliebiger Belastung

A. Zum Schluß dieses Abschnitts geben wir in allgemeiner Form die Lösung von zwei Aufgaben an, die für das Weitere wichtig sind.

Aufgabe 1

Es ist für einen mit dem linken Ende in der Wand eingespannten und mit einer beliebigen Belastung sowie auch mit einer Kraft B und einem Kräftepaar M_B am Ende belasteten Balken (Bild 251, a) bei gegebener Steifigkeit $EJ = \text{const}$ die Durchbiegung v_B und der Neigungswinkel φ_B am Ende des Balkens zu ermitteln.

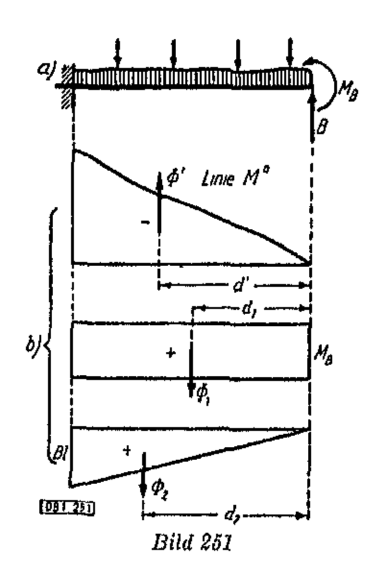


Bild 251

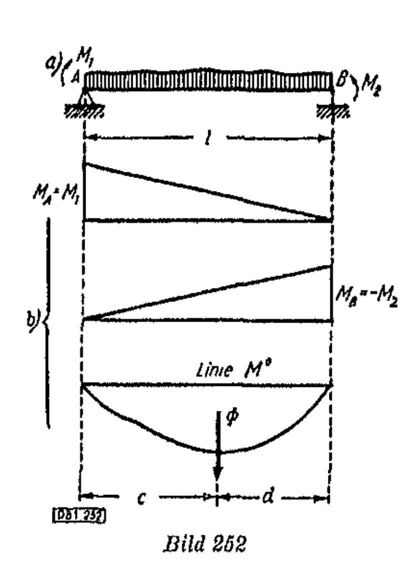


Bild 252

In Bild 251, b sind die Momentenlinien infolge jeder Belastungsart aufgeführt [die Momentenlinie infolge der Belastung im Feld (der Stützweite) ist mit M^0 bezeichnet].

Es ist
$$\varphi_B = \beta = \frac{\bar{Q}}{EJ} \quad \text{und} \quad \varphi_B = \frac{\overline{M}}{EJ},$$

worin
$$\bar{Q} = \Phi' - \Phi_1 - \Phi_2 = \Phi' - M_B l - \frac{Bl^2}{2},$$

$$\overline{M} = \Phi' d' - \Phi_1 d_1 - \Phi_2 d_2 = \Phi' d' - M_B l \frac{l}{2} - \frac{Bl^2}{2} \cdot \frac{2}{3}\, l = \Phi' d' - M_B \frac{l^2}{2} - \frac{Bl^3}{3}$$

ist. Demzufolge ist:
$$\beta = \frac{1}{EJ}\left(\Phi' - M_B l - \frac{Bl^2}{2}\right) \tag{7.86}$$

und
$$v_B = \frac{1}{EJ}\left(\Phi\ d' - \frac{M_B l^2}{2} - \frac{B\,l^3}{3}\right). \tag{7.87}$$

Aufgabe 2

Für einen Balken auf zwei Stützen von der Stützweite l, der mit einer beliebigen Belastung und Kräftepaaren M_1 und M_2 an den Enden belastet ist (Bild 252, a), sind die Neigungswinkel an den Enden des Balkens zu ermitteln.
In Bild 252, b sind die Momentenlinien infolge jeder Belastungsart dargestellt.

Wir haben:
$$\alpha = \frac{\bar{A}}{EJ},$$

worin
$$\bar{A} = \frac{\Phi d}{l} + \frac{M_A l}{3} + \frac{M_B l}{6} \quad \text{ist.}$$

Ferner ist
$$\beta = -\frac{\bar{B}}{EJ},$$

worin
$$\bar{B} = \frac{\Phi c}{l} + \frac{M_A l}{6} + \frac{M_B l}{3} \quad \text{ist.}$$

Demzufolge ist
$$\alpha = \frac{1}{EJ}\left(\frac{\Phi d}{l} + \frac{M_A l}{3} + \frac{M_B l}{6}\right) \tag{7.88}$$

und
$$\beta = -\frac{1}{EJ}\left(\frac{\Phi c}{l} + \frac{M_A l}{6} + \frac{M_B l}{3}\right). \tag{7.89}$$

B. Die Formeln (7.86) und (7.87) sowie auch (7.88) und (7.89) sind von großer Bedeutung:

Sie geben die Abhängigkeit zwischen den Formänderungen und Kräften der durchgenommenen allgemeinen Aufgaben über die Biegung des Balkens an. Von diesem Gesichtspunkt aus sind die Formeln (7.86) bis (7.89) als Folge und weitere Ausdehnung des ihnen zugrunde liegenden Hookeschen Gesetzes anzusehen. Daher werden sie im weiteren für uns die Rolle eines physikalischen Gesetzes spielen, das bei der Lösung statisch unbestimmter Fälle der Biegung von Balken benötigt wird.

Bei der Benutzung dieser Formeln muß man sie aufmerksam analysieren, indem man die physikalische Bedeutung jedes der Glieder im einzelnen klärt. So drückt z. B. in der Formel (7.87) das erste Glied der rechten Seite die Durchbiegung des Punktes B infolge der Belastung der Kragweite aus, das zweite Glied infolge des Kräftepaares M_B und das dritte infolge der am Ende angreifenden Kraft B.

In der Formel (7.88) drücken die drei Glieder der rechten Seite die entsprechenden Neigungswinkel α infolge der Belastung im Feld sowie infolge des Momentes M_1 und M_2 aus.

Eine derartige Analyse ermöglicht es, diese Formeln jedesmal nach Bedarf aufzustellen, ohne diese im Gedächtnis behalten zu müssen.

8 Statisch unbestimmte Aufgaben der Biegung

8.1 Einfeldbalken mit einem oder zwei eingespannten Enden

A. Im Kapitel 5.1 haben wir nachgewiesen, daß nur zwei Arten von statisch bestimmten Balken mit einem Feld möglich sind: Der Krag- oder Freiträger und der einfache Balken mit einem gelenkig-festen und einem anderen gelenkig-beweglichen Lager. Die Anzahl der Auflagerstäbe beim statisch bestimmten Balken ist gleich drei (siehe Bild 122). Wenn das Auflagerstabschema des Balkens in der Summe mehr als drei Stäbe aufweist, so ist der Balken statisch unbestimmt. Die durch die zusätzlichen (die drei übersteigenden) Stäbe geschaffenen überzähligen Befestigungen rufen überzählige Kräfte, d. h. überzählige Komponenten der Auflagerreaktionen hervor. Die Bedingungen der Statik erweisen sich als nicht ausreichend zu ihrer Ermittlung, und es wird die Einführung von Formänderungsbedingungen zuerst in geometrischer und alsdann in physikalischer Form notwendig.

Das allgemeine Schema zur Lösung statisch unbestimmter Aufgaben ist dem Leser aus dem Abschnitt 2 gut bekannt und durch die in den Kapiteln 2.12 bis 2.14 durchgenommenen Beispiele erläutert worden. Es ist selbstverständlich auch bei den weiter unten behandelten statisch unbestimmten Fällen der Biegung voll anwendbar. Bei diesen werden die Einzelheiten der Anwendung dieses allgemeinen Schemas völlig klar hervortreten.

B. Es ist ein Balken gegeben, der mit einem Ende in der Wand eingespannt und dessen anderes Ende gelenkig gestützt ist (Bild 253, a), es liege eine beliebige vertikale Belastung vor. Im ganzen sind vier unbekannte Auflagerreaktionen vorhanden: Drei Kräfte H, A und B und ein Kräftepaar M_1. Demnach weist das System eine überzählige Unbekannte auf. Nehmen wir als überzählige Unbekannte die Auflagerreaktion B an.

Zu diesem Zweck entfernen wir das rechte Auflager und ersetzen es durch die Kraft B. Hierdurch wandelt sich unser Balken in ein statisch bestimmtes System um, das wir im weiteren das statisch bestimmte Grundsystem nennen werden. In unserem Falle ist es ein Krag- oder Freiträger, der mit der gegebenen Belastung und der zunächst noch unbekannten Kraft B belastet ist (Bild 253, b). Diese Kraft muß so gewählt werden, daß die Durchbiegung des Freiträgers am rechten Ende gleich Null ist. Hieraus erhalten wir die Formänderungsbedingung

$$v_B = 0.$$

Ferner wenden wir die Abhängigkeit (7.87) des Kapitels 7.7 an, in der gemäß den Bedingungen unserer Aufgabe $\overline{M_B} = 0$ gesetzt werden muß, erhalten wir

damit die Gleichung zur Ermittlung von B:

$$\Phi' d' - \frac{Bl^3}{3} = 0, \tag{8.1}$$

und hieraus:

$$B = \frac{3\,\Phi' d'}{l^3}. \tag{8.2}$$

Die Werte Φ' und d' sind in Bild 253, c eingetragen.

Weisen wir hierbei auf die Möglichkeit hin, daß man in jeder statisch unbestimmten Aufgabe verschiedene Werte als überzählige Unbekannte wählen kann, demnach das gegebene System auf verschiedene statisch bestimmte Grundsysteme zurückführen kann. In unserer Aufgabe kann man z. B. als überzählige Unbekannte das Auflagermoment M_A annehmen. Zu diesem Zweck ordnen wir am Auflager A ein Gelenk an (Bild 254, a). Da hierbei das Moment im Punkt A gleich Null wird, so muß man am Gelenk als Ersatz das zunächst unbekannte Moment M_A anbringen.

Verfolgt man diesen Weg, so erhalten wir ein Grundsystem in Form eines Balkens auf zwei Stützen (Bild 254, b). Das Moment M_A muß so ermittelt werden, daß der Neigungswinkel der Tangente zur elastischen Linie am Auflager A gleich Null wird. Hieraus erhalten wir die Formänderungsbedingung

$$\alpha = 0.$$

Wendet man die Abhängigkeit (7.88) des Kapitels 7.7 an, und setzt man in dieser gemäß den Bedingungen der Aufgabe $M_B = 0$ voraus, so erhalten wir die Gleichung

$$\frac{M_A l}{3} + \frac{\Phi d}{l} = 0,$$

woraus

$$M_A = -\frac{3\,\Phi d}{l^2} \quad \text{ist.} \tag{8.3}$$

Wir erinnern daran, daß der Wert Φ in den Formeln (8.2) und (8.3) verschieden ist (Bild 254, c).

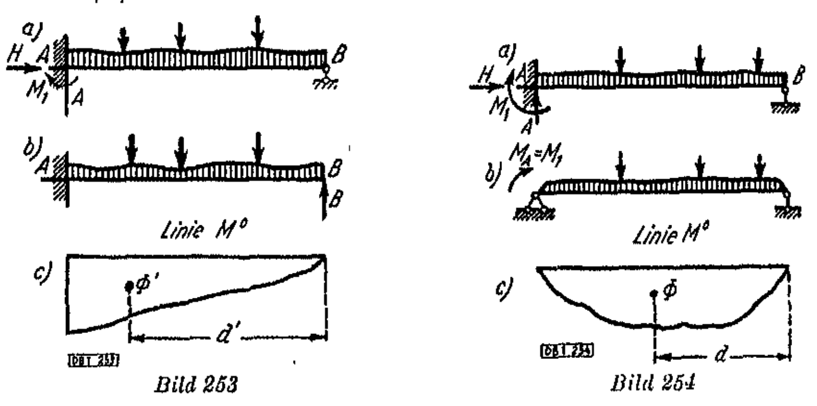


Bild 253 Bild 254

C. Untersuchen wir jetzt einen an beiden Enden starr eingespannten Balken (Bild 255, a). Die Befestigung des rechten Balkenendes wird in der horizontalen Richtung als beweglich angenommen. Das Schema eines solchen Auflagers

besteht aus zwei vertikalen Stäben (Bild 255, b), demnach kann das Auflager nur eine vertikale Reaktion aufnehmen, deren Größe und Lage unbekannt sind. Die Auflagerreaktionen weisen fünf Unbekannte auf, so daß die vorliegende Aufgabe zwei überzählige Unbekannte enthält.

Entfernt man das rechte Auflager B, und ersetzt man dessen Wirkung durch die Reaktion B und das Kräftepaar M_2, so erhalten wir das Grundsystem in Form eines Freiträgers (Bild 255, c). Die Befestigung im Punkte B erfordert zwei Bedingungen der Formänderung:

$$v_B = 0 \quad \text{und} \quad \beta = 0.$$

Wendet man die Formeln (7.86) und (7.87) des Kapitels 7.7 an, so erhalten wir zwei Gleichungen zur Ermittlung der Unbekannten:

$$M_B l + \frac{B l^2}{2} = \Phi',$$

$$M_B \frac{l^2}{2} + \frac{B l^3}{3} = \Phi' d'.$$

Aus diesen erhalten wir:

$$\left.\begin{aligned} B &= \frac{12\,\Phi'}{l^3}\left(d' - \frac{l}{2}\right), \\ M_B &= -\frac{12\,\Phi'}{l^2}\left(\frac{d'}{2} - \frac{l}{3}\right). \end{aligned}\right\} \qquad (8.4)$$

Die Werte Φ' und d' sind in Bild 255, d eingetragen.

Bequemer ist es jedoch, die Aufgabe anders zu lösen, indem man als überzählige Unbekannte die Auflagermomente des Balkens annimmt. Zu diesem Zweck setzen wir an den Auflagern Gelenke ein[1]) und bringen als Ersatz Kräftepaare

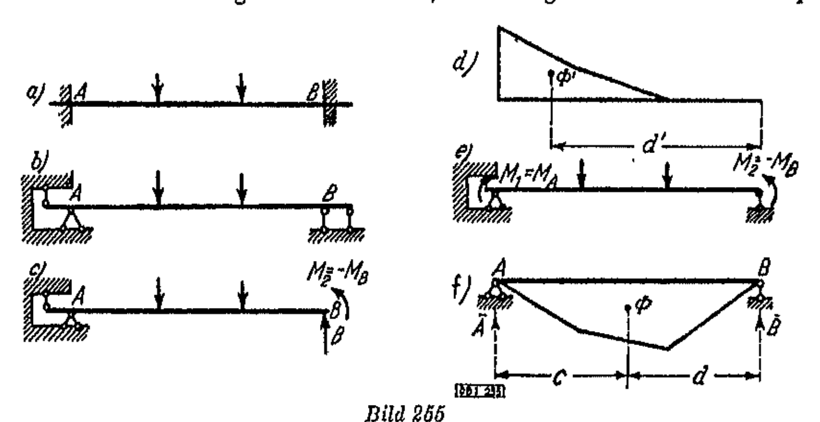


Bild 255

an (Bild 255, e). Dann wird das Grundsystem ein einfacher Balken mit zwei zunächst unbekannten Momenten an den Auflagern sein. Die Befestigungen an den Auflagern liefern zwei Formänderungsbedingungen:

$$\alpha = 0 \quad \text{und} \quad \beta = 0.$$

[1]) Hierzu genügt es, in A und B je einen Auflagerstab zu entfernen.

Wendet man diese Bedingungen bei den Formeln (7.88) und (7.89) des Kapitels 7.7 an, so haben wir zwei Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} \frac{M_A l}{3} + \frac{M_B l}{6} &= -\frac{\Phi d}{l}, \\ \frac{M_A l}{6} + \frac{M_B l}{3} &= -\frac{\Phi c}{l}, \end{aligned}\right\} \qquad (8.5)$$

aus denen wir die überzähligen Unbekannten, die Biegemomente M_A und M_B an den Auflagern finden:

$$\left.\begin{aligned} M_A &= -\frac{2\,\Phi\,(2d-c)}{l^2}, \\ M_B &= -\frac{2\,\Phi\,(2c-d)}{l^2}. \end{aligned}\right\} \qquad (8.6)$$

Die Werte Φ, d und c sind in Bild 255, f angegeben.

Nach der Ermittlung der überzähligen Unbekannten ist der Balken nicht mehr statisch unbestimmt, seine Auflagerreaktionen und auch M und Q in einem beliebigen Querschnitt können ohne Mühe gefunden werden, wodurch nun die Spannungen berechnet werden können.

In der letzten der durchgenommenen Aufgaben können z. B. M und Q unmittelbar nach den Formeln (5.32) und (5.33) des Kapitels 5.8 ermittelt werden, wenn die Formeln (8.6) für die Auflagermomente gefunden sind. Es ist:

$$M_x = M_x^0 + M_A\,\frac{l-x}{l} + M_B\,\frac{x}{l},$$

$$Q_x = \frac{dM}{dx} = Q_x^0 + \frac{M_B - M_A}{l},$$

worin M_x^0 und Q_x^0 das Biegemoment und die Querkraft im statisch bestimmten Grundbalken (Bild 255, e) infolge der gegebenen Belastung im Feld darstellen. Die Konstruktion der M- und Q-Linie bietet ebenfalls keine Schwierigkeiten.

D. Über die Aufstellung der Formänderungsgleichungen muß man folgendes bemerken:

Wir haben sie auf Grund der allgemeinen Formeln (7.86) bis (7.89) des Kapitels 7.7 der Neigungswinkel der Tangenten zur Durchbiegungslinie erhalten. Am Ende des Kapitels 7.7 haben wir schon auf die Notwendigkeit der Klärung des physikalischen Sinnes jedes Gliedes dieser Formeln hingewiesen. Diese Bemerkung bezieht sich in gleichem Maße auch auf die Formänderungsgleichungen. So drückt z. B. die in ihrer anfänglichen Form geschriebene Gleichung (8.1)

$$\frac{\Phi' d'}{EJ} - \frac{B l^3}{3EJ} = 0$$

den Gedanken aus, daß die Kraft B aus der Bedingung ermittelt werden muß, daß die durch die hervorgerufene Durchbiegung $\frac{Bl^3}{3EJ}$ am Ende des Freiträgers die durch die Belastung hervorgerufene Durchbiegung $\frac{\Phi' d'}{EJ}$ am gleichen Ende aufheben muß. Es ist nützlich, von diesem Gesichtspunkt aus alle in diesem Kapitel abgeleiteten Formänderungsgleichungen zu betrachten.

E. *Beispiele*

Beispiel 47

Es sind für den in Bild 256a dargestellten Balken die Auflagerreaktionen zu ermitteln und die *M*- und *Q*-Linien zu konstruieren.

Der vorliegende Balken hat *eine* überzählige Unbekannte, wobei als erwähnte Unbekannte entweder die rechte Auflagerreaktion B oder das Biegemoment M_A an der Einspannungsstelle angenommen werden kann.

Wir wählen als überzählige Unbekannte den Wert der rechten Auflagerreaktion B (Bild 256, b) und erhalten, indem wir die Berechnung gemäß der Formel (8.2) durchführen,

$$B = \frac{3\Phi' d'}{l^3} \quad . \tag{8.2}$$

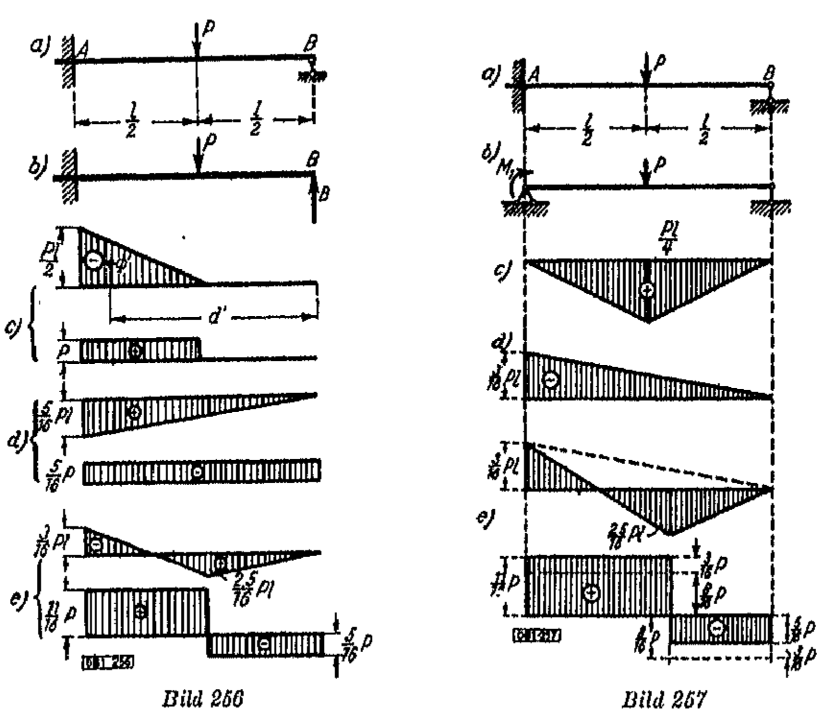


Bild 256 Bild 257

Zur Ermittlung von Φ' und d' konstruieren wir die Linie der Momente M^0 infolge der Belastung des Feldes (Bild 256, c). Dann ist

$$\Phi' = \frac{Pl}{2} \cdot \frac{l}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{Pl^2}{8},$$

$$d' = \frac{2}{3} \cdot \frac{l}{2} + \frac{l}{2} = \frac{5}{6} \cdot l.$$

Setzt man diese Werte in (8.2) ein, so erhalten wir:

$$B = \frac{3\Phi' d'}{l^3} = \frac{3 \dfrac{Pl^2}{8} \cdot \dfrac{5}{6} \cdot l}{l^3} = \frac{5}{16}\, P.$$

Die übrigen Auflagerreaktionen (A, H und M_A) kann man aus den drei Gleichgewichtsbedingungen der Statik ermitteln:

$$\Sigma Y = 0, \qquad \Sigma X = 0 \qquad \text{und} \qquad \Sigma M = 0;$$

$$H = 0, \qquad A = \frac{11}{16} P \quad \text{und} \qquad M_A = -\frac{3}{16} Pl.$$

Zeichnen wir die M- und Q-Linie infolge der erhaltenen Kraft B (Bild 256, d) und setzt man sie mit den entsprechenden Linien M^0 und Q^0 infolge der gegebenen Belastung (Bild 256, c) zusammen, so erhalten wir die endgültige M- und Q-Linie für den gegebenen Balken, die in Bild 256, e angegeben sind.

Lösen wir die Aufgabe auf eine andere im Punkte B angegebene Weise, d. h. nehmen wir als Unbekannte das Biegemoment M_A an der Einspannungsstelle an (Bild 257 a und b). Gemäß der Formel (8.3) unter Punkt B ist:

$$M_A = -\frac{3\Phi d}{l^2}.$$

Zeichnen wir die Momentenlinie infolge der Belastung der Öffnung (Bild 257, c). Dann ist:

$$\Phi = \frac{Pl}{4} \cdot l \cdot \frac{1}{2} = \frac{Pl^2}{8},$$

$$d = \frac{l}{2}.$$

Setzt man diese Werte in die Formel (8.3) ein, so erhalten wir:

$$M_A = -\frac{3\,\dfrac{Pl^2}{16}}{l} = -\frac{3}{16} Pl.$$

Die Auflagerreaktionen ermitteln wir auf die übliche Weise aus den drei Gleichgewichtsbedingungen des Balkens:

$$H = 0, \quad B = \frac{5}{16} P, \quad A = \frac{11}{16} P.$$

Ferner zeichnen wir die M- und Q-Linie infolge des am linken Auflager angreifenden Kräftepaares $M_1 = M_A$. Setzt man mit diesem die Linien M^0 und Q^0 infolge der gegebenen Belastung zusammen (die M^0-Linie ist in Bild 257, d dargestellt), so erhalten wir die endgültige M- und Q-Linie des gegebenen statisch unbestimmten Balkens (Bild 257, e).

Beispiel 48

Für den an beiden Enden eingespannten Balken (Bild 258, a) sollen die Auflagermomente M_A und M_B und die Reaktionen A und B infolge der Wirkung der Last P im Abstande x vom linken Auflager gefunden werden.

Zur Ermittlung von M_A und M_B ist es am zweckmäßigsten, diese Werte als überzählige Unbekannte anzunehmen. Führt man die Lösung gemäß Punkt B durch, so finden wir sie auf Grund der Formeln (8.6), in die wir die der gegebenen Belastung (Bild 258) entsprechenden Φ, c und d einführen müssen. Es ist:

$$\Phi = \frac{Px(l-x)}{2}, \quad c = \frac{l+x}{3} \quad \text{und} \quad d = \frac{2l-x}{3}.$$

Folglich ist:

$$M_A = -2\,\frac{Px(l-x)}{2} \cdot \frac{1}{l^2}\left(2\,\frac{2l-x}{3} - \frac{l+x}{3}\right) = -\frac{Px(l-x)^2}{l^2}. \tag{8.7}$$

en Wert für M_B finden wir auf die gleiche Weise. Man kann ihn jedoch direkt aus (8.7) halten, indem man x durch $(l - x)$ und umgekehrt ersetzt:

$$M_B = -\frac{P x^2 (l - x)}{l^2}. \tag{8.8}$$

ıch der Ermittlung der Auflagermomente finden wir die Auflagerreaktionen auf die liche Weise. Es ist:

$$A = \frac{P (l - x) - M_1 - M_2}{l}, \tag{8.9}$$

$$B = \frac{P x + M_1 + M_2}{l}, \tag{8.10}$$

rin $M_1 = M_A$ und $M_2 = -M_B$ die an den Enden des Balkens angreifenden Momente rstellen.

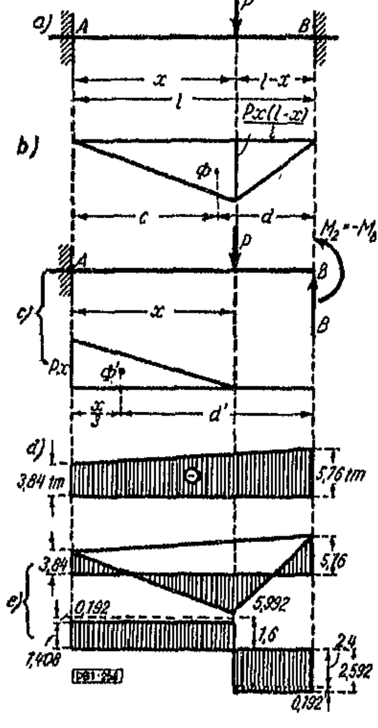


Bild 258

ührt man ihre Werte aus (8.7) und (8.8) ein, so erhalten wir die endgültigen Formeln Auflagerreaktionen. Wenn wir als überzählige Unbekannte M_B und B wählen (d. h. statisch bestimmtes Grundsystem wählen wir wieder einen Freiträger), so benutzen zum Auffinden derselben die Formeln (8.4) unter Absatz C. Geht man von dem Grund-ım (Bild 258, c) aus, so haben wir:

$$\Phi' = \frac{P x^2}{2}, \quad d' = l - \frac{x}{3},$$

$$B = -\frac{12 P x^2}{2 l^3}\left(l - \frac{x}{3} - \frac{l}{2}\right) = \frac{P x^2 (3 l - 2 x)}{l^3},$$

$$M_B = -\frac{12 P x^2}{2 l^3}\left[\frac{1}{2}\left(l - \frac{x}{3}\right) - \frac{l}{3}\right] = -\frac{P x^2 (l - x)}{l^2}.$$

Der Wert M_B stimmt mit dem auf die vorherige Weise ermittelten Wert überein. Wir empfehlen dem Leser eine gleiche Kontrolle in bezug auf die Auflagerreaktion B durchzuführen.

Befassen wir uns mit der ersten Variante der Lösung, und nehmen wir $l = 10,0$ m, $P = 4,0$ t und $x = 6,0$ m an. Dann erhalten wir:

$$M_A = -\frac{P x (l - x)^2}{l^2} = -\frac{4 \cdot 6 \, (10 - 6)^2}{10^2} = -3,84 \text{ tm},$$

$$M_B = -\frac{P x^2 (l - x)}{l^2} = -\frac{4 \cdot 6^2 (10 - 6)}{10^2} = -5,76 \text{ tm}.$$

Die M- und Q-Linien sind in Bild 258, c aufgeführt. Die Auflagerreaktionen finden wir aus (8.9) und (8.10), in denen

$$M_1 = M_A = -3,84 \text{ tm}$$

und

$$M_2 = -M_B = -(-5,76) = 5,76 \text{ tm}$$

sind. Dann ist:

$$A = \frac{P (l - x) - M_1 - M_2}{l} = 1,408 \text{ t},$$

und

$$B = \frac{P x + M_1 + M_2}{l} = 2,592 \text{ t}.$$

Als Kontrolle dient die Bedingung:

$$A + B + P = 4,0 \text{ t}.$$

Beispiel 49

Untersuchen wir den Fall eines Einfeldbalkens mit Kragarm (Bild 259). Nimmt man als überzählige Unbekannte M_B an, so erhalten wir die Formänderungsbedingung $\beta = 0$. Wertet man diese mit Hilfe von (7.89) des Kapitels 7.7 aus, so erhalten wir:

$$\frac{M_A l}{6} + \frac{M_B l}{3} + \frac{\Phi c}{l} = 0,$$

und hieraus

$$M_B = -\frac{M_A}{2} - 3\,\frac{\Phi c}{l^2}. \tag{8.11}$$

Setzen wir die Zahlenwerte ein, so erhalten wir:

$$\frac{\Phi c}{l} = 3,6 \text{ tm}^2 \quad \text{und} \quad M_B = -0,8 \text{ tm}.$$

Die M- und Q-Linien sind in Bild 259, d und e dargestellt. Die Ermittlung der Auflagerreaktionen A und B führen wir auf Grund der Q-Linie durch. Wir erhalten:

$$A = +1,4 - (-1) = +2,4 \text{ t} \quad \text{und} \quad B = 0 - (-1) = +1,0 \text{ t}.$$

Die Kontrolle ergibt: $A + B = 1 + 0{,}4 \cdot 6 = 3{,}4$ t.

Nach dem Einsetzen der gefundenen Werte A und B erhalten wir eine Identität.

Den Querschnitt mit dem $M_{\max}$ in der Öffnung ermitteln wir unter Benutzung des Lehrsatzes von *Shurawski-Schwedler* aus der Bedingung $Q = 0$:

$$Q_x = Q_x^0 + \frac{M_B - M_A}{l} = \frac{ql}{2} - qx + \frac{M_B - M_A}{l} = 1{,}2 - 0{,}4\,x + 0{,}2 = 0,$$

woraus
$$x = \frac{1{,}4}{0{,}4} = 3{,}5 \text{ m ist.}$$

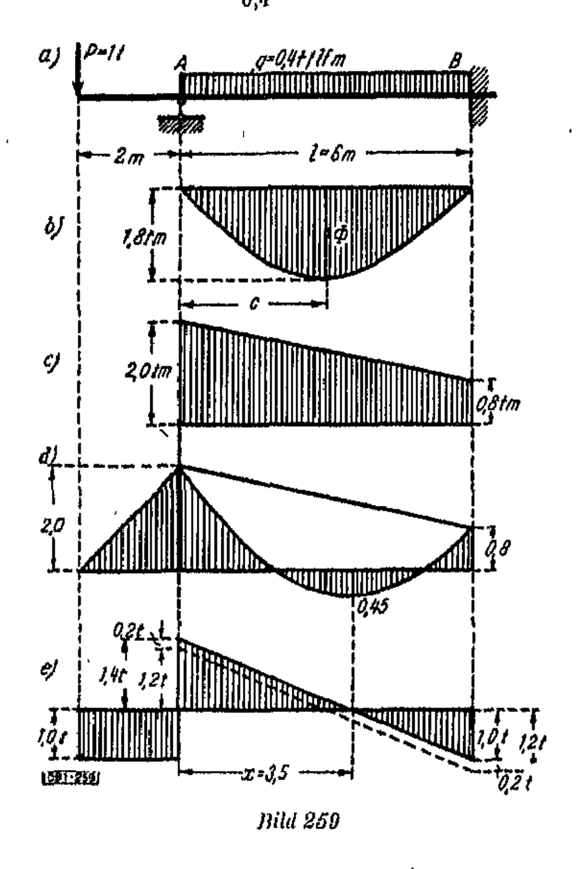


Bild 259

Der entsprechende Wert des maximalen positiven Biegemoments ist gleich:

$$M_{\max} = M_x^0 + M_A + x\,\frac{M_B - M_A}{l} = \frac{ql}{2}\,x - \frac{qx^2}{2} + M_A + x\,\frac{M_B + M_A}{l}$$

$$= 1{,}2\,x - 0{,}2\,x^2 - 2{,}0 + \frac{x \cdot 1{,}2}{9} = 0{,}45 \text{ tm}.$$

In der Mitte (bei $x = 3{,}0$ m) ist $M = 0{,}4$ tm.

8.2 Balken über zwei Felder

A. Untersuchen wir den Balken auf drei Stützen (den über zwei Felder durchlaufenden Balken), wobei ein Lager gelenkig und fest und die beiden anderen gelenkig und beweglich ausgebildet sind (Bild 260, a). Wir setzen voraus, daß die Lager auf einer Ebene liegen und so ausgeführt sind, daß sie sowohl positive als auch negative Auflagerreaktionen aufnehmen können, d. h. der Balken kann sich nicht von den Lagern abheben. Die Steifigkeit des Balkens wollen wir über die ganze Länge als konstant annehmen ($EJ = \text{const}$). Ein derartiger Balken ist statisch unbestimmt und weist eine überzählige Unbekannte auf.

Als überzählige Unbekannte kann man eine beliebige von den Auflagerreaktionen B und C annehmen. Entfernen wir z. B. das mittlere Auflager, so erhalten wir ein Grundsystem in Form eines Balkens auf zwei Stützen

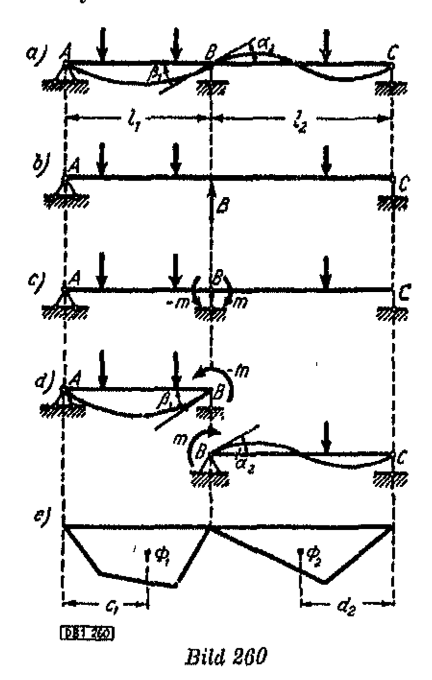


Bild 260

(Bild 260, b). Das entfernte Auflager ersetzen wir durch die Kraft B, deren Wert wir aus der Bedingung finden, daß die gesamte Durchbiegung an der Stelle B infolge der gegebenen Belastung und der Kraft B gleich Null sein muß.

Wir gehen hier aber anders vor. Wir setzen in den Balken über dem Auflager B ein Gelenk ein und erhalten ein Grundsystem in Form von zwei einfachen Balken AB und BC, die ein gemeinsames Auflager B haben und unter der Einwirkung der in den beiden Feldern angreifenden Belastungen stehen. An der Stelle des Gelenks müssen zwei entgegengesetzt gerichtete Kräftepaare eingefügt werden, die die Wirkung eines jeden Balkens auf den benachbarten ausdrücken (Bild 260, c). Zum Zweck der klaren Darstellung sind diese Balken in Bild 260, d getrennt gezeichnet.

Wir bezeichnen mit m das die Wirkung des linken Feldes auf das rechte ausdrückende Moment und wählen als überzählige Unbekannte das Bi moment $M_B = m$ am Auflager B[1]). Den Wert M_B finden wir aus der zusätzli Bedingung, daß die elastische Linie gleichmäßig über dem Auflager verla muß, ohne einen Knick zu erleiden (Bild 260, a).

Folglich wird die zusätzliche Formänderungsbedingung die Gleichheit Tangentenneigungswinkel zur elastischen Linie des Balkens über dem Aufl für das linke und rechte Feld sein. Bezeichnet man mit β_1 den Neigungswi am rechten Auflager des linken Feldes und mit α_2 den Neigungswinkel am lin Auflager des rechten Feldes, so können wir die erforderliche Formänderu gleichung wie folgt aufschreiben[2]):

$$\beta_1 = \alpha_2. \qquad (8$$

Jetzt muß man offenbar die Winkel β_1 und α_2 durch M_B ausdrücken, indem die Formeln (7.88) und (7.89) des Kapitels 7.7 benutzt. Wendet man Formel (7.89) in bezug auf das linke Feld an, und beachtet man, daß in uns Aufgabe $M_A = 0$ ist, so erhalten wir

$$\beta_1 = -\frac{1}{EJ}\left(\frac{\Phi_1 c_1}{l_1} + \frac{M_B l_1}{3}\right),$$

worin Φ_1 und c_1 sich auf die M^0-Linie des linken Feldes beziehen (Bild 26 Zur Bestimmung des Winkels α_2 benutzen wir die Formel (7.88), indem wi Bezeichnungen M_A durch M_B und M_B durch $M_C = 0$ ersetzen.

Dann ist
$$\alpha_2 = \frac{1}{EJ}\left(\frac{\Phi_2 d_2}{l_2} + \frac{M_B l_2}{3}\right),$$

worin Φ_2 und d_2 sich auf die M°-Linie des rechten Feldes beziehen (Bild 26 Setzt man die Werte der Winkel β_1 und α_2 in die Formänderungsbedin (8.12) ein, so erhalten wir folgende zusätzliche Gleichung:

$$-\frac{\Phi_1 c_1}{l_1} - \frac{M_B l_1}{3} = \frac{\Phi_2 d_2}{l_2} + \frac{M_B l_2}{3}$$

oder
$$(l_1 + l_2)\, M_B = -3\left(\frac{\Phi_1 c_1}{l_1} + \frac{\Phi_2 d_2}{l_2}\right).$$

Löst man sie, so erhalten wir:

$$M_B = -\frac{3\left(\dfrac{\Phi_1 c_1}{l_1} + \dfrac{\Phi_2 d_2}{l_2}\right)}{l_1 + l_2}. \qquad (8$$

Beachten wir, daß die hierin enthaltenden Ausdrücke $\dfrac{\Phi_1 c_1}{l_1}$ und $\dfrac{\Phi_2 d_2}{l_2}$ fiktiven Auflagerreaktionen (die rechte Reaktion für das linke Feld und die l

[1]) Hierzu ist es erforderlich, an die zu den Formeln (5.25) und (5.26) des Kapitels 5.7 gege Erläuterungen über die Vorzeichen der Belastungs- und Biegemomente zu denken.

[2]) Die Winkel β_1 und α_1 sind sowohl der Größe als auch dem Vorzeichen nach gleich, da sie Drehung der Tangenten auf dieselbe Seite gebildet sind.

Reaktion für das rechte Feld) infolge der Momentenbelastung jedes Feldes sind, wenn man sie als einzelne einfache Balken betrachtet (Bild 260, d und e).

Nach der Bestimmung von M_B können wir jedes Feld einzeln als einfachen Balken unter der Einwirkung der gegebenen Belastung und des Biegemoments M_B an einem der Auflager betrachten, und so kann dann die weitere Berechnung, z. B. die Konstruktion der M- und Q-Linie und die Ermittlung der Auflagerreaktionen, ohne Schwierigkeiten durchgeführt werden.

B. Beispiel 50

Es sollen für den in Bild 261, a dargestellten Balken die M- und Q-Linie gezeichnet und die Auflagerreaktionen A, B und C ermittelt werden.

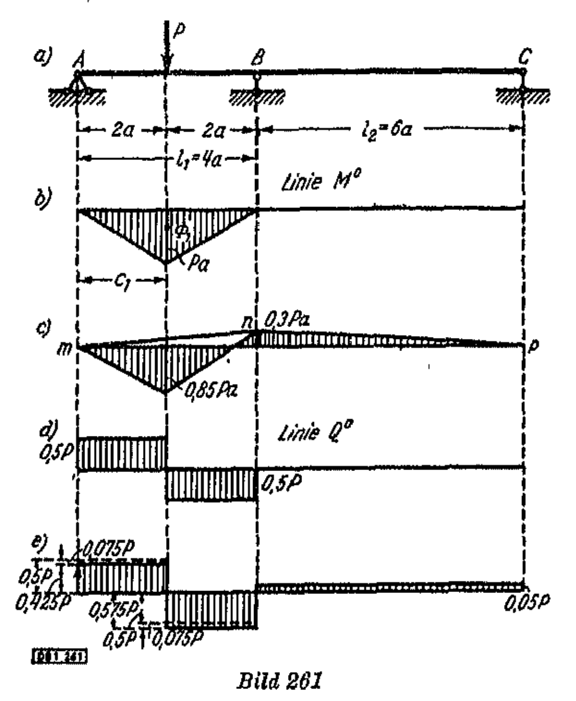


Bild 261

Zur Ermittlung von $\frac{\Phi_1 c_1}{l_1}$ und $\frac{\Phi_2 d_2}{l_2}$, die zu (8.13) gehören, konstruieren wir die M^0-Momentenlinien infolge der Belastung in jedem einzelnen Feld (Bild 261, b). Es ist somit:

$$\frac{\Phi_1 c_1}{l_1} = \frac{\frac{Pa \cdot 4a}{2} \cdot 2a}{4a} = Pa^2 \quad \text{und} \quad \frac{\Phi_2 d_2}{l_2} = 0.$$

Setzen wir diese Werte in (8.13) ein, so erhalten wir:

$$M_B = -\frac{3\,(Pa^2 + 0)}{4a + 6a} = -0{,}3\,Pa.$$

Nach der Bestimmung des Stützmomentes M_B ist es leicht, die Linien der endgültigen Biegemomente und Querkräfte zu zeichnen. Zuerst zeichnen wir für das linke und rechte

Feld die durch die Wirkung der gefundenen Stützmomente hervorgerufenen M-Linien. Sie bilden ein Dreieck mnp (Bild 261, c). Trägt man vertikal von der Stützmomentenlinie die M^0-Linie (Bild 261, b) ab, so erhalten wir die M-Linie des gegebenen statisch unbestimmten Balkens (Bild 261, c).

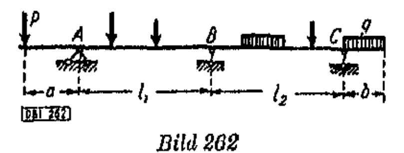


Bild 262

In Bild 261, d ist die Q^0-Linie für die beiden Felder dargestellt. Ändert man alle Ordinaten der Q^0-Linie des linken Feldes um $\frac{M_B - M_A}{l_1} = -\frac{0,3\ Pa}{4a} = -0,075\,P$ und der rechten um $\frac{M_C - M_B}{l_2} = +0,05\,P$, so erhalten wir die gesuchte endgültige Q-Linie (Bild 261, c), auf Grund derer wir die Auflagerreaktionen ermitteln können:

$$A = +0,425\,P - 0 = +0,425\,P,$$
$$B = +0,05\,P - (-0,575\,P) = +0,625\,P,$$
$$C = 0 - (+0,05\,P) = -0,05\,P.$$

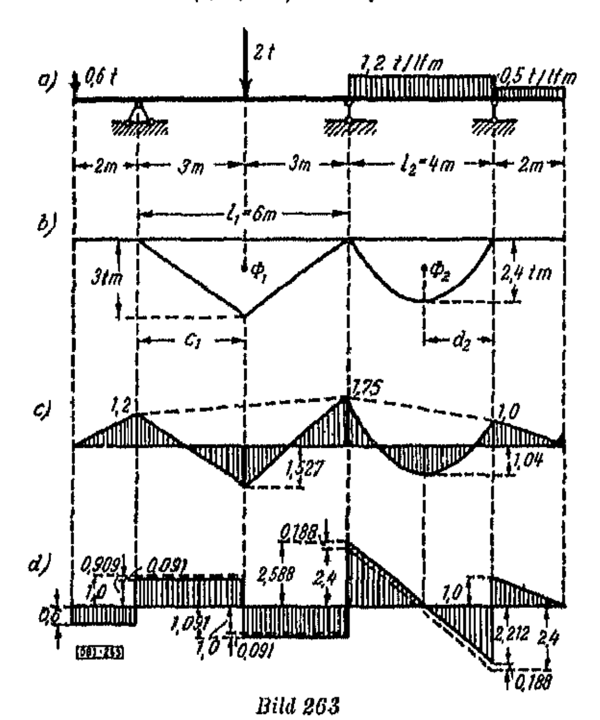


Bild 263

Die Kontrolle ist: $A + B + C = P.$

Setzt man hier die Werte A, B und C ein, so erhalten wir eine Identität.

Wenn der Balken Kragarme hat (Bild 262), so werden die äußersten Stützmomente nicht gleich Null sein. Sie können unmittelbar aus den Gleichgewichtsbedingungen für die Kragarme ermittelt werden:

$$M_A = -Pa,$$

$$M_C = -\frac{qb^2}{2}.$$

Führt man sie in die Formänderungsgleichung $\beta_1 = \alpha_2$ ein, so erhalten wir leicht:

$$M_B = -\frac{6(\overline{B}_1 + \overline{A}_2) + M_A l_1 + M_C l_2}{2(l_1 + l_2)}, \tag{8.14}$$

worin

$$\overline{B}_1 = \frac{\Phi_1 c_1}{l_1}$$

und

$$\overline{A}_2 = \frac{\Phi_2 d_2}{l_2} \text{ ist.}$$

Nach der Ermittlung des Stützmoments M_B wird die weitere Konstruktion der M- und Q-Linie wie üblich durchgeführt.

In Bild 263 sind für einen Balken mit zwei Kragarmen die M- und Q-Linien gezeichnet und die Auflagerreaktionen A, B und C ermittelt.

8.3 Durchlaufbalken. Dreimomentengleichung

A. Gehen wir zu dem allgemeinen Fall eines über mehr als zwei Felder durchlaufenden Balkens über. Derartige Balken nennt man *Durchlaufbalken.* Nehmen wir an (Bild 264), daß eins von den Auflagern gelenkig fest und die übrigen aber gelenkig-beweglich angeordnet sind. Sie liegen alle auf einer Ebene, und die Steifigkeit des Balkens ist über die ganze Länge konstant.

Bild 264

Wenn der Balken n Öffnungen hat, so ist die Anzahl der Auflager gleich $n+1$. Die Anzahl der unbekannten Auflagerreaktionen ist $2+n$. Die Anzahl der überzähligen Unbekannten ist $(2+n) - 3 = n - 1$, d. h. sie ist gleich der Anzahl der Auflager, die zur Gewährleistung der Unbeweglichkeit des Balkens erforderlich sind, weniger 2. Hieraus ergibt sich scheinbar auf natürliche Weise folgende Untersuchungsmethode des durchlaufenden Balkens. Wir entfernen $(n-1)$ Auflager, z. B. alle Zwischenauflager $1, 2, \ldots, n-1$ und ersetzen ihre Wirkung durch unbekannte Kräfte (durch die Auflagerreaktionen)

$$D_1, D_2, \ldots, D_{n-1}. \tag{8.15}$$

Dann wird das statisch bestimmte Grundsystem ein einfacher Balken auf zwei Stützen O und n sein.

Zur Bestimmung der überzähligen Unbekannten (8.15) werden wir $(n-1)$ Bedingungen haben, die verlangen, daß die Durchbiegungen an den Auflagerpunkten $1, 2, \ldots, (n-1)$ infolge der Wirkung der gegebenen Belastung und der Reaktionen (8.15) gleich Null sind:

$$v_1 = 0, \quad v_2 = 0, \ldots, \quad v_{n-1} = 0.$$

Eine derartige Methode ist vom englischen Physiker *Rayleigh* vorgeschlagen worden, sie hat sich jedoch als für die Praxis ungeeignet erwiesen. Günstiger ist die im Kapitel 8.2 angewandte Methode. Bei dieser Methode werden als überzählige Unbekannte die Biegungsmomente an den Zwischenauflagern angenommen:

$$M_1, M_2, \ldots, M_{n-1}.$$

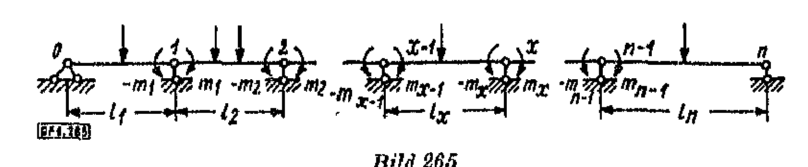


Bild 265

Zu diesem Zweck setzen wir in den Balken an den Auflagerpunkten

$$1, 2, \ldots, (n-1)$$

Gelenke ein (Bild 265). Dann wandelt sich der Balken $O-n$ in n einzelne einfache Balken

$$0-1, \; 1-2, \; \ldots, \; (n-1)-n$$

um, die sich unter der Einwirkung der gegebenen Belastung unabhängig voneinander durchbiegen werden. Wie auch im Kapitel 8.2 muß man die eingesetzten Gelenke durch folgende Momentenpaare ersetzen:

$$-m_1, +m_1; \; -m_2, +m_2; \; \ldots - m_x, +m_x; \; \ldots;$$
$$-m_{n-1}, +m_{n-1},$$

wobei $M_x = m_x$ das Biegemoment am x-ten Auflager ausdrückt. Die Werte

$$M_1, M_2, \ldots, M_x, \ldots, M_{n-1} \tag{8.16}$$

nehmen wir, wie schon oben erwähnt wurde, als überzählige Unbekannte an. Zu ihrer Ermittlung können wir Formänderungsbedingungen in der Form

$$\beta_n = \alpha_{n+1} \tag{8.17}$$

aufstellen, die sich daraus ergeben, daß ein durchlaufender Balken vorliegt und die Neigungswinkel der Tangenten im allgemeinen Grenzpunkt n des n-ten und $(n+1)$-ten Feldes gleich sein müssen.

Die Anzahl solcher Bedingungen ist gleich der Anzahl der Zwischenauflager, d. h. gleich der Zahl der überzähligen Unbekannten (8.16). Es verbleibt noch, die Bedingungen (8.17) durch Kräfte mit Hilfe der Formeln (7.88) und (7.89) auszudrücken. Zu diesem Zweck trennen wir zwei benachbarte Felder, das n-te und $(n+1)$-te Feld ab (Bild 266). In Bild 267 sind sie der Übersichtlichkeit wegen getrennt dargestellt. Dort sind ferner auch die M^0-Linien dieser Felder und die Abstände ihrer Schwerpunkte von den Auflagern angegeben.

Für die Winkel β_n und α_{n+1} erhalten wir die nachfolgenden Ausdrücke. Wendet man nämlich die Formel (7.89) auf das n-te Feld an, so finden wir:

$$\beta_n = -\frac{1}{EJ}\left(\frac{M_{n-1}l_n}{6} + \frac{M_n l_n}{3} + \frac{\Phi_n c_n}{l_n}\right). \tag{8.18}$$

Die Formel (7.88) ergibt für das $(n+1)$-te Feld:

$$\alpha_{n+1} = \frac{1}{EJ}\left(\frac{M_n l_{n+1}}{3} + \frac{M_{n+1}l_{n+1}}{6} + \frac{\Phi_{n+1}d_{n+1}}{l_{n+1}}\right). \tag{8.19}$$

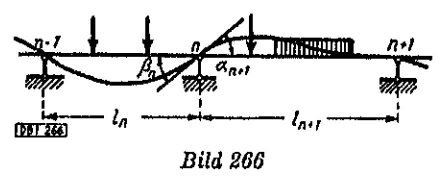


Bild 266

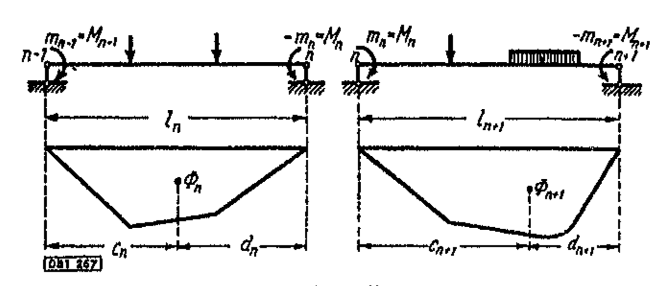


Bild 267

Setzt man diese Werte β_n und α_{n+1} in (8.17) ein, multipliziert man beide Teile der erhaltenen Gleichung mit $6EJ$ und bringt man die Glieder mit den Unbekannten M_{n-1}, M_n und M_{n+1} auf die rechte Seite, so erhalten wir schließlich:

$$M_{n-1}l_n + 2M_n(l_n + l_{n+1}) + M_{n+1}l_{n+1} = -\omega_{n,n+1}, \tag{8.20}$$

worin zur Abkürzung $6\left(\frac{\Phi_n c_n}{l_n} + \frac{\Phi_{n+1}d_{n+1}}{l_{n+1}}\right) = \omega_{n,n+1}$ (8.21)

gesetzt ist.

Den Wert $\omega_{n,n+1}$ kann man auf folgende Weise deuten:

Die Ausdrücke $\frac{\Phi_n c_n}{l_n}$ und $\frac{\Phi_{n+1}d_{n+1}}{l_{n+1}}$ stellen die fiktiven Reaktionen am gemeinsamen n-ten Auflager des n-ten und $(n+1)$-ten Feldes infolge der Momentenbelastung dieser Felder dar, wenn man sie als einzelne einfache Balken betrachtet.

Dann ist $\omega_{n,n+1}$ die versechsfachte fiktive Reaktion[1]) des n-ten Auflagers infolge der Momentenbelastung der benachbarten Felder. Die Gleichung (8.20) nennt man die *Dreimomentengleichung* oder die *Clapeyronsche Gleichung*. Setzt man solche Gleichungen nacheinander für jedes Paar von Öffnungen

$$1-2,\ 2-3,\ \ldots,\ (n-1)-n$$

[1]) *Anm. d. deutschen Redaktion:* Sog. *Belastungsglied.*



auf, so erhalten wir ein System von linearen Gleichungen, aus denen alle überzähligen Unbekannten ermittelt werden können.

Bisher haben wir Balken in Betracht gezogen, deren äußerste Auflager gelenkig waren. In solchem Fall sind die Biegemomente an den äußersten Auflagern gleich Null:

$$M_0 = M_n = 0.$$

Dies muß man berücksichtigen, wenn man die Dreimomentengleichungen aufstellt.

B. Den Fall des Balkens mit zwei Feldern haben wir schon untersucht. Für einen Balken mit drei Feldern (Bild 268, a), der zwei überzählige Unbekannte M_1 und M_2 aufweist, erhalten wir zwei Dreimomentengleichungen:

$$\left.\begin{aligned} 2M_1(l_1+l_2)+M_2 l_2 &= -\omega_{1,2}, \\ M_1 l_2 + 2M_2(l_2+l_3) &= -\omega_{2,3}, \end{aligned}\right\} \tag{8.22}$$

Bild 268

in denen für die gegebene Belastung (Bild 268, b)

$$\omega_{1,2} = 6\left(\frac{\Phi_1 c_1}{l_1} + \frac{\Phi_2 d_2}{l_2}\right) = 6\left(\frac{\frac{P l_1}{4}\, l_1\, \frac{1}{2}\, \frac{l_1}{2}}{l_1} + \frac{\frac{2}{3}\, q\, \frac{l_2^2}{8}\, l_2\, \frac{l_2}{2}}{l_2}\right)$$

$$= 6\left(\frac{P l_1^2}{16} + \frac{q l_2^3}{24}\right) = 6\left(\frac{4\cdot 6^2}{16} + \frac{0{,}6\cdot 8^3}{24}\right) = 130{,}8\ \mathrm{tm}^2$$

und $$\omega_{2,3} = 6\,\frac{\Phi_2 c_2}{l_2} = \frac{6\,q\,l_2^3}{24} = 6\,\frac{0,6\cdot 8^3}{24} = 76,8\ \text{tm}^2$$

ist. Setzt man diese Werte in die Gleichungen (8.22) ein, und löst man sie, so erhalten wir

$$M_1 = -4,14\ \text{tm},$$
$$M_2 = -1,75\ \text{tm}.$$

Nach der Ermittlung der Stützmomente kann man leicht die Biegemomentenlinie zeichnen. Zu diesem Zwecke tragen wir an den Auflagern die Werte der Stützmomente ab, zeichnen die Stützmomentenlinie *mnpq* (Bild 268, c) und ermitteln für das Nachfolgende:

$$\frac{M_1 - M_0}{l_1} = -\frac{4,14 - 0}{6} = -0,69\ \text{t},$$
$$\frac{M_2 - M_1}{l_2} = -\frac{1,75 - (-4,14)}{8} = 0,3\ \text{t},$$
$$\frac{M_3 - M_2}{l_3} = \frac{0 - (-1,75)}{4} = 0,438\ \text{t}.$$

Trägt man vertikal von der Stützmomentenlinie die früher gezeichneten M^0-Linien (Bild 268, b) ab, so erhalten wir die endgültige M-Linie für den gegebenen Durchlaufbalken.

Alsdann zeichnen wir die Q^0-Linien für jedes einzelne Feld (Bild 268, d). Ändert man alle Ordinaten der gezeichneten Q^0-Linie des ersten Feldes um $-0,69$ t, des zweiten um $+0,3$ t und des dritten um $+0,438$ t, so erhalten wir die endgültige Q-Linie (Bild 268, e), auf Grund derer wir ferner die Auflagerreaktionen bestimmen:

$$D_0 = +1,31 - 0 = +1,31\ \text{t},$$
$$D_1 = +2,7 - (-2,69) = 5,39\ \text{t},$$
$$D_2 = +0,438 - (-2,1) = 2,538\ \text{t},$$
$$D_3 = 0 - (+0,438) = -0,438\ \text{t}.$$

C. Wenn der Balken Kragarme hat (Bild 269, a), so sind die äußersten Stützmomente nicht gleich Null. Sie können jedoch unmittelbar aus den Gleichgewichtsbedingungen der Kragarme ermittelt und alsdann in die Dreimomentengleichungen eingeführt werden.

Wir haben (Bild 269):

$$\omega_{1,2} = 6\,\frac{\Phi_2 d_2}{l_2} = 6\,\frac{\frac{6\cdot 6}{2}\cdot 3}{6} = 54\ \text{tm}^2,$$
$$\omega_{2,3} = 6\,\frac{\Phi_2 c_2}{l_2} = 6\,\frac{\frac{6\cdot 6}{2}\cdot 3}{6} = 54\ \text{tm}^2,$$
$$\omega_{3,4} = 0,$$
$$M_0 = -Pa = -1\cdot 2 = -2\ \text{tm},$$
$$M_4 = -\frac{qb^2}{2} = -\frac{0,5\cdot 2^2}{2} = -1\ \text{tm}.$$

Setzen wir die Dreimomentengleichungen an[1]):

$$M_0 l_1 + 2M_1(l_1 + l_2) + M_2 l_2 = -\omega_{1,2},$$
$$M_1 l_2 + 2M_2(l_2 + l_3) + M_3 l_3 = -\omega_{2,3},$$
$$M_2 l_3 + 2M_3(l_3 + l_4) + M_4 l_4 = -\omega_{3,4}.$$

Setzt man die Zahlenwerte des gewählten Beispiels ein, so erhalten wir:

$$-2\cdot 4 + 2(4+6)\,M_1 + 6\,M_2 = -54,$$
$$6\,M_1 + 2(6+5)\,M_2 + 5\,M_3 = -54,$$
$$5\,M_2 + 2(5+4)\,M_3 + 4(-1) = 0.$$

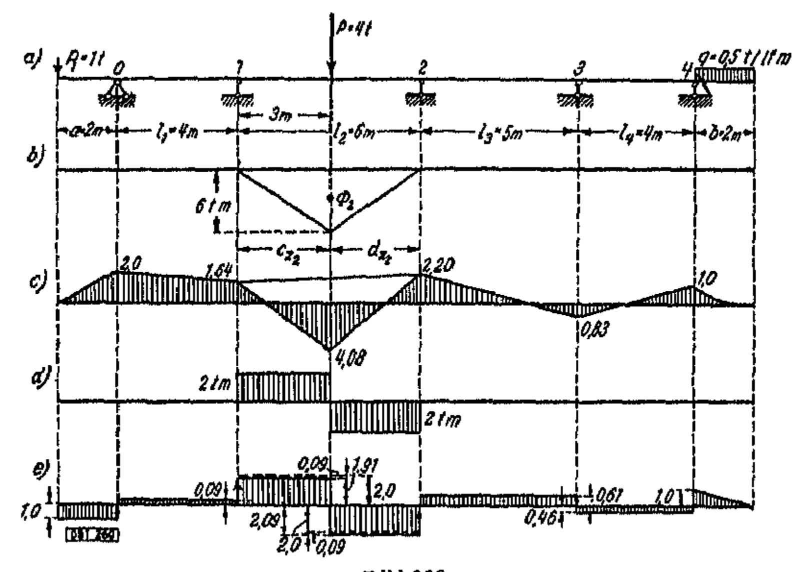


Bild 269

Löst man das erhaltene System der Gleichungen, so ergeben sich für

$$M_1 = -1{,}64\ \text{tm}, \quad M_2 = -2{,}20\ \text{tm} \quad \text{und} \quad M_3 = +0{,}83\ \text{tm}.$$

Die M- und Q-Linien sind in Bild 269, b bis e dargestellt. Die Auflagerreaktionen ermitteln wir auf Grund der Q-Linie.

Wenn eine Belastung in Form von einzelnen Kräftepaaren, die an den Feldern angreifen, vorliegt, so bleibt bei der Aufstellung der Dreimomentengleichungen die Ermittlung des rechten Teiles wie früher bestehen. Wenn jedoch ein Einzelkräftepaar über dem Auflager angreift, so kann man bei der Ermittlung des rechten Teiles das Kräftepaar einem der dem gegebenen Auflager angrenzenden

[1]) Den Gang der Lösung könnte man ein wenig ändern, indem man die Momente $-P_1 a$ am linken Auflager und $+\frac{qb^2}{2}$ am rechten Auflager als Belastungsmomente ansieht Kapitel 5,7) und diese in die Ausdrücke $\omega_{1,1}$ und $\omega_{3,4}$ einschließt. Dann muß man offenbar die Stützmomente M_0 und M_4 in den Dreimomentengleichungen wie früher gleich Null ansetzen.

Feld hinzurechnen oder nach dem Ersetzen des einen Paares durch zwei diesem äquivalente Paare die nunmehr erhaltenen Paare den angrenzenden Feldern zuteilen.

D. Beispiel 51

Für den in Bild 270, a dargestellten Balken sollen die Q- und M-Linien gezeichnet und die Auflagerreaktionen A, B und C ermittelt werden.

Die Gleichung (8.20) nimmt die Form

$$M_0 l_1 + 2 M_1 (l_1 + l_2) + M_2 l_2 = -6 \left(\frac{\Phi_1 c_1}{l_1} + \frac{\Phi_2 d_2}{l_2} \right)$$

an. Zur Ermittlung von $\frac{\Phi_1 c_1}{l_1}$ und $\frac{\Phi_2 d_2}{l_2}$, die zu der Gleichung gehören, zeichnen wir die M^0-Momentenlinien infolge der Feldbelastung für jedes Feld, indem wir das Kräftepaar m als zum linken Feld gehörig ansehen.

Dann ist:
$$\frac{\Phi_1 c_1}{l_1} = \frac{\frac{-m l_1}{2} \cdot \frac{2}{3} l_1}{l_1} = -\frac{m l_1}{3} \quad \text{und} \quad \frac{\Phi_2 d_2}{l_2} = 0.$$

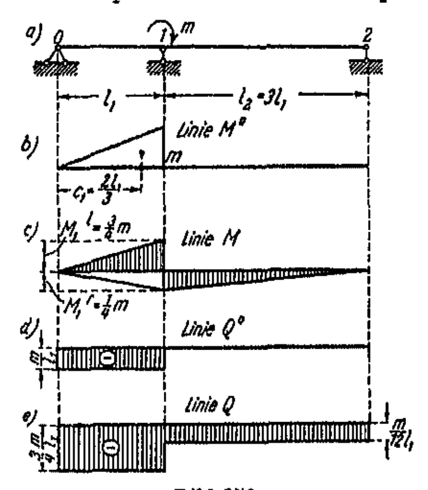


Bild 270

Setzt man diese Werte in die Dreimomentengleichung ein, und berücksichtigt man, daß $M_0 = M_2 = 0$ ist, so erhalten wir:

$$M_1 = \frac{m}{4}.$$

Nach der Bestimmung der Stützmomente kann man leicht die Biegemomenten- und Querkraftlinien zeichnen (Bild 270, c bis e), sowie auch die Auflagerreaktionen finden:

$$A = -\frac{3}{4}\frac{m}{l_1}, \quad B = \frac{8}{12}\frac{m}{l_1} \quad \text{und} \quad C = \frac{1}{12}\frac{m}{l_1}.$$

Wir empfehlen dem Leser, zur Übung das vorliegende Beispiel unter der Voraussetzung einer anderen Verteilung des Kräftepaares auf das linke und rechte Feld zu lösen, so z. B. anzunehmen, daß auf das linke Feld $\frac{1}{3}\,m$ und auf das rechte $\frac{2}{3}\,m$ wirkt, oder von einer anderen Verteilung des Kräftepaares auszugehen.

E. Wenn irgendeines der Balkenenden eingespannt ist, so ergibt sich hierdurch eine überzählige Befestigung und folglich auch eine überzählige Unbekannte.

Für den in Bild 271 dargestellten Fall haben wir außer M_1, M_2, M_3 und M_4 noch eine weitere Unbekannte M_0. Zu ihrer Bestimmung stellen wir noch eine zusätzliche Formänderungsbedingung

$$\alpha_1 = 0 \tag{8.23}$$

auf, die verlangt, daß die Tangente am Auflager *0* horizontal bleibt. Zur Auswertung dieser Bedingung trennen wir das rechte Feld ab und denken daran,

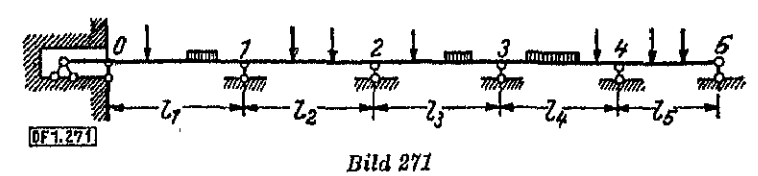


Bild 271

daß am Auflager *1* schon ein Gelenk eingesetzt und als Ersatz ein Biegemoment M_1 angebracht worden ist (Bild 272).

Wertet man die Bedingung (8.23) auf Grund der Formel (7.88, Abschnitt 7.7) aus, so erhalten wir die Gleichung:

$$\frac{M_0 l_1}{3} + \frac{M_1 l_1}{6} = -\frac{\Phi_1 d_1}{l_1}$$

oder

$$2 M_0 l_1 + M_1 l_1 = -\omega_{0,1},$$

worin

$$\omega_{0,1} = 6\,\frac{\Phi_1 d_1}{l_1} \text{ ist.} \tag{8.24}$$

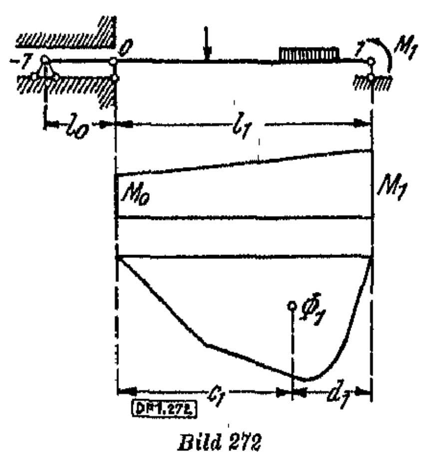


Bild 272

Die Gleichung (8.24) muß man zu den auf die übliche Weise für die Felder *1—2*, *2—3*, *3—4* und *4—5* aufgestellten Dreimomentengleichungen hinzufügen. Im Endergebnis erhalten wir dann folgendes System von Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} 2M_0 l_1 + M_1 l_1 &= -\omega_{0,1}, \\ M_0 l_1 + 2M_1(l_1 + l_2) + M_2 l_2 &= -\omega_{1,2}, \\ M_1 l_2 + 2M_2(l_2 + l_3) + M_3 l_3 &= -\omega_{2,3}, \\ M_2 l_3 + 2M_3(l_3 + l_4) + M_4 l_4 &= -\omega_{3,4}, \\ M_3 l_4 + 2M_4(l_4 + l_5) &= -\omega_{4,5}, \end{aligned}\right\} \qquad (8.25)$$

aus denen wir alle Stützmomente bestimmen.

Man kann aber auch auf ein anderes Verfahren zur Aufstellung des Systems (8.25) hinweisen, aus dem hervorgeht, daß die Gleichung (8.24) ebenfalls als besondere Form der Dreimomentengleichung anzusehen ist. Zu dem Zweck bemerken wir, daß das Stabschema der Einspannung (siehe hierzu Bild 121) im Grunde genommen darauf zurückzuführen ist, daß am Ende des Balkens ein unendlich kleines Feld hinzugefügt wird.

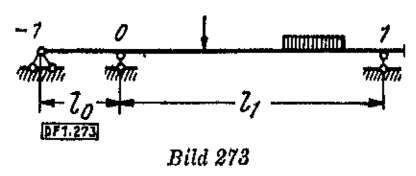


Bild 273

In einem solchen Fall muß man die erste der Dreimomentengleichungen für das Feld l_0 und l_1 (Bild 273) aufstellen, wobei man darauf achtet, daß das Auflager -1 gelenkig und das Moment an diesem gleich Null ist.

Wir erhalten $0 \cdot l_0 + 2M_0(l_0 + l_1) + M_1 l_1 = -6\left(\frac{\Phi_0 c_0}{l_0} + \frac{\Phi_1 d_1}{l_1}\right).$

Setzt man hier $\quad l_0 = 0,\ c_0 = 0 \quad \text{und} \quad \Phi_0 = 0,$

so erhalten wir die Gleichung

$$M_0 2l_1 + M_1 l_1 = -6\,\frac{\Phi_1 d_1}{l_1},$$

die mit (8.24) übereinstimmt.

F. Es ist nicht schwer, die Formeln zur Bestimmung der Auflagerreaktionen eines Durchlaufbalkens durch die Belastung der Felder und die Stützmomente auszudrücken. An einem beliebigen Auflager erleidet tatsächlich die Querkraft des Durchlaufbalkens eine Unterbrechung der Kontinuität, die dem Werte der Auflagerreaktion gleich ist. Die Q-Linie hat also über dem Auflager eine entsprechende Stufe. Auf dieser Basis finden wir die Reaktion des n-ten Auflagers D_n als Differenz der Querkraft $Q_{O^{n+1}}$ am Anfang des $(n+1)$-ten Feldes, d. h. unmittelbar rechts vom n-ten Auflager, und der Querkraft Q_{B^n} am Ende des n-ten Feldes, d. h. unmittelbar links vom n-ten Auflager (Bild 274).

Dann ist $\qquad D_O = Q_{O^{n+1}} - Q_{B^n}.$

Auf Grund der allgemeinen Formel (5.33) des Kapitels 5.8 für die Querkraft

$$Q_x = Q_x^0 + \frac{M_B - M_A}{l},$$

finden wir die Querkräfte:

1. am Auflager des n-ten Feldes

$$Q_{B^n} = -B_n^0 + \frac{M_n - M_{n-1}}{l_n}, \tag{8.26}$$

worin B_n^0 die Reaktion des Auflagers B des als einfachen Balken betrachteten n-ten Feldes ist, und

2. am Auflager C des $(n+1)$-ten Feldes

$$Q_{C^{n+1}} = C_{n+1}^0 + \frac{M_{n+1} - M_n}{l_{n+1}}, \tag{8.27}$$

worin C_{n+1}^0 die Reaktion des Auflagers C des als einfachen Balken betrachteten $(n+1)$-ten Feldes ist.

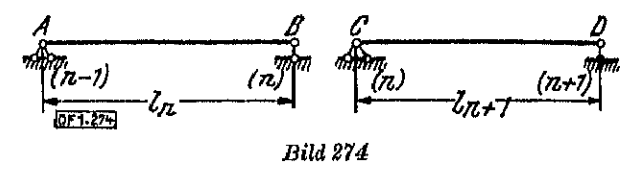


Bild 274

Die Reaktion des n-ten Auflagers erhalten wir als Differenz der Querkräfte (8.27) und (8.26):

$$D_n = C_{n+1}^0 + B_n^0 + \frac{M_{n+1} - M_n}{l_{n+1}} - \frac{M_n - M_{n-1}}{l_n}. \tag{8.28}$$

Es ist augenscheinlich, daß

$$C_{n+1}^0 + B_n^0 = D_n^0$$

die Reaktion des n-ten Auflagers im Grundsystem (Bild 265) infolge der Belastung der beiden ihm benachbarten Felder darstellt. Die übrigen Glieder der Formel (8.28) drücken den Einfluß der Stützmomente aus.

8.4 Berechnung statisch unbestimmter Balken auf Grund ihrer Tragfähigkeit

A. Die Berechnung von statisch unbestimmten Balken auf Grund ihrer Tragfähigkeit basiert auf der Ausnutzung der Änderung des Spannungszustandes der Balkenquerschnitte bei ununterbrochener Zunahme der Belastung.

Erläutern wir das Gesagte durch ein Beispiel. Nehmen wir an, es liegt ein über zwei gleich große Felder durchlaufender Balken mit konstantem Querschnitt vor, der in der Mitte des ersten Feldes durch eine Einzellast P belastet ist (Bild 275, a). Führt man die übliche „elastische" Lösung (indem man die Dreimomentengleichung anwendet) durch, so erhalten wir die entsprechende Biegemomentenlinie (Bild 275, b). Wählt man den Querschnitt des Balkens auf Grund des maximalen Moments, so werden wir in irgendeinem Querschnitt die übliche „elastische" Spannungslinie haben (Bild 276, c). Bei weiterer Zunahme der Belastung wird der Querschnitt D in der Feldmitte der am stärksten angespannte sein, und es kann der Moment eintreten, in dem für diesen $\sigma_{max} = \sigma_F$ wird (Bild 276, d). Eine weitere Zunahme der Belastung ruft in dem gegebenen Querschnitt D die Erscheinung plastischer Zonen hervor, während in den anderen Querschnitten die „elastischen" Spannungslinien (Bild 276, e) erhalten bleiben

können. Wenn die Belastung einen solchen Wert erreicht, daß sich die plastischen Zonen im Querschnitt D in der Mitte des ersten Feldes über den ganzen Querschnitt erstrecken, so beginnt im gegebenen Querschnitt der Grenzzustand (Bild 276, f), d. h. im Querschnitt D wird ein *plastisches Gelenk* vorhanden sein. Hierbei können sich in den anderen angespannteren Querschnitten (z. B. im Punkt B) z. T. plastische Zonen einstellen (Bild 276, f). Auf diese Weise kann der Querschnitt D im weiteren bei der Zunahme der Belastung das konstante Grenzmoment $M_F = \sigma_F \overline{W}$ (siehe Kapitel 6.13) aufnehmen.

Jetzt werden wir schon an Stelle des statisch unbestimmten Balkens ABC ein System von zwei durch ein Gelenk D miteinander verbundenen statisch bestimmten Balken AD und DC haben, wobei das Moment im Gelenk bekannt ist (Bild 276, a). *Dies bedeutet, daß die Erscheinung des plastischen Gelenks den Grad der statischen Unbestimmtheit um eins ermäßigt.* Es ist klar, daß die volle Aus-

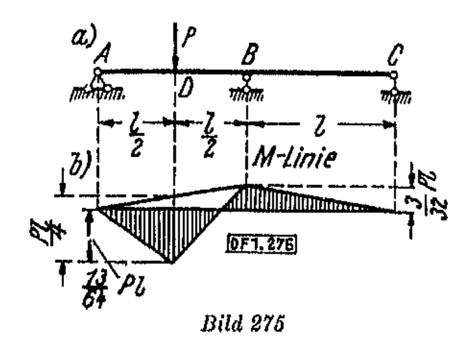


Bild 275

nutzung der Tragfähigkeit der Balken AD und DC erst dann vorliegen wird, wenn sich bei der weiteren Zunahme der Belastung ein zweites plastisches Gelenk am Auflager B (Bild 276, k) zeigt, wodurch die geometrische Unveränderlichkeit der Balken AD und DC verletzt wird. So hat das Vorhandensein von zwei plastischen Gelenken zur vollen Ausnutzung der Tragfähigkeit des gegebenen statisch unbestimmten Balkens mit einer überzähligen Unbekannten geführt.

Verallgemeinert man das Gesagte auf den Fall eines Balkens mit n überzähligen Unbekannten, so kann man sagen, daß die volle Ausnutzung der Tragfähigkeit des erwähnten Balkens beim Auftreten von $n+1$ plastischen Gelenken eintritt.

Wenn der Balken einen konstanten Querschnitt hat, so ist sein Grenzzustand durch gleiche Momente M_F in all den Querschnitten charakterisiert, in denen plastische Gelenke entstehen müssen, d. h. im Grenzzustand geht eine Ausgleichung der Momente in den gefährlichen Querschnitten vor sich[1]).

Auf Grund der Größe der ausgeglichenen Momente kann man den Wert der Grenzbelastung P_F und alsdann schon auf Grund des gegebenen Sicherheitsgrades ν die zulässige Belastung $P_{zul} = \frac{P_F}{\nu}$ ermitteln.

[1]) Bei Balken mit veränderlichem Querschnitt gleichen sich im Grenzzustand nur die Spannungen aus, aber die Momente bleiben verschieden, da die Werte $\overline{W}$ verschieden sind.

Erläutern wir das Gesagte an dem oben angeführten Beispiel. Wenn in den Querschnitten D und B, d. h. in der Mitte des Feldes (unter der Last) und am mittleren Auflager sich plastische Gelenke zeigen, so wird die ausgeglichene Momentenlinie die in Bild 276, b dargestellte Form haben[1]).

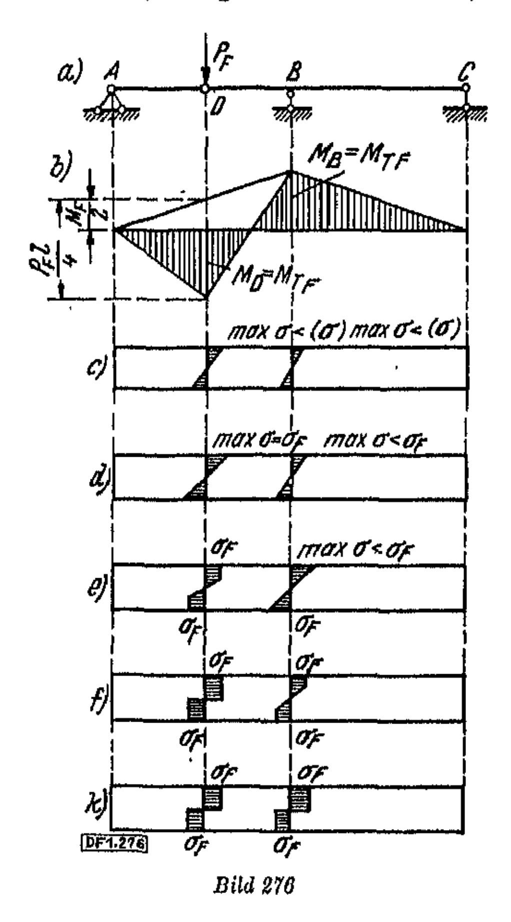


Bild 276

Geht man von diesem Zustand des Balkens aus, so ist es nicht schwer, den Wert der Grenzbelastung zu ermitteln, bei dem die Tragfähigkeit des Balkens erschöpft ist.

In der Tat hat man (siehe Kapitel 6.13) auf Grund des Bildes 276

$$M_D = M_B = M_F = \sigma_F \overline{W},$$

worin

$$M_D = \frac{P_F l}{4} - \frac{M_F}{2}$$

[1]) Die Form der Momentenlinie ändert sich offenbar nicht dadurch, ob das plastische Gelenk zuerst am Auflager oder im Feld erscheint.

ist. Folglich wird
$$\frac{P_F l}{4} - \frac{M_F}{2} = M_F,$$

woraus
$$P_F = 6\,\frac{M_F}{l} = 6\,\frac{\sigma_F \overline{W}}{l}\ ^{1)}\quad \text{ist.}$$

Kennt man die Größe des Sicherheitskoeffizienten ν, so kann man den Wert der zulässigen Belastung und den gegebenen Balken ermitteln:

$$P_{\text{zul}} = \frac{P_F}{\nu} = 6\,\frac{M_F}{\nu l} = 6\,\frac{\sigma_F \overline{W}}{\nu l}.$$

Hieraus kann man ersehen, daß es zur Ermittlung des Wertes der Grenz- und zulässigen Belastung gar nicht notwendig ist, die „elastische" Berechnung des vorliegenden statisch unbestimmten Balkens durchzuführen, sondern es genügt, wenn man auf die angegebene Weise vorgeht, sich lediglich auf die Konstruktion der Grenzmomentenlinie (der ausgeglichenen) für jedes Feld zu beschränken und auf Grund dieser den Wert der Grenzbelastung zu finden, indem man von der Möglichkeit der Zerstörung eines jeden Feldes im einzelnen ausgeht.

8.5 Fiktive Schemata bei der graphoanalytischen Methode

A. Im Abschnitt 7 haben wir gesehen, daß die Anwendung der graphoanalytischen Methode bei statisch bestimmten Balken es ermöglicht, die Aufgabe der Ermittlung der Durchbiegung und des Neigungswinkels der Tangente zur gebogenen Achse auf die Aufgabe der Ermittlung der Kräfte $\overline{M}$ und $\overline{Q}$ im Querschnitt des auf entsprechende Weise gewählten und mit der Momentenfläche belasteten fiktiven Balkens zurückzuführen.

Es erweist sich, daß diese Methode auch auf die statisch unbestimmten Fälle der Biegung ausgedehnt werden kann. Sie liefert in erster Linie die erforderlichen Gleichungen zum Auffinden der überzähligen Unbekannten, und nach ihrer Ermittlung ermöglicht sie es, die Durchbiegungen und Neigungswinkel der Tangente zur Balkenachse genau so wie auch für statisch bestimmte Balken zu berechnen.

In Spalte 1 der Tafel 11 sind die Schemata aller von uns oben durchgenommenen sowohl statisch bestimmten als auch statisch unbestimmten Fälle von Einfeldbalken dargestellt. Dort sind auch ihre Grenzbedingungen angegeben. Zu diesen Bedingungen sind in Klammern Hinweise darüber hinzugefügt, welche Verschiebungen (v und v') nicht gleich Null sind, obgleich sie auch von vornherein nicht angegeben sind.

Benutzt man die Abhängigkeiten der graphoanalytischen Methode

$$v = \frac{\overline{M}}{EJ} \quad \text{und} \quad v' = \frac{\overline{Q}}{EJ}, \tag{8.29}$$

---

[1]) Näheres über das plastische Widerstandsmoment siehe im Buch von И. Н. Кудрявцев, „Косой изгиб вобласти пластических деформаций", Москва, 1940 (I. N. Kudrjawzew, „Die schräge Biegung im Bereich der plastischen Formänderungen". Moskau 1940) und den Aufsatz von Б. Н. Горбунов и. В. Г. Чудновски, „Расчёт болок на косой изгиб при пластических деформациях". киевский строительный институт. (B. N. Gorbünow und W. G. Tschudnowski, „Die Berechnung der Balken auf schräge Biegung bei klastischen Formänderungen"), der in der zweiten Ausgabe der Sammlung der Arbeiten des Kiewschen Bau Instituts abgedruckt ist.

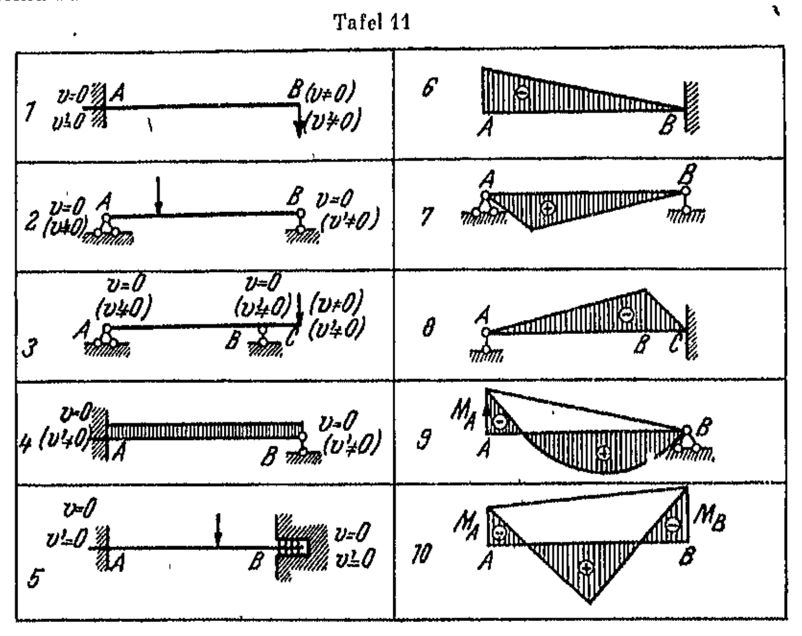
so kann man diese Bedingungen durch die fiktiven Belastungen ausdrücken, wie dies in der lotrechten zweiten Spalte der Tafel 11 gezeigt ist.

Zur übersichtlicheren Verwertung der erhaltenen Bedingungen gehen wir so vor, wie dies in Abschnitt 7 in bezug auf die Kragbalken und den einfachen Balken gemacht wurde:

Für jeden der Fälle führen wir eine entsprechende Belastung des Balkens ein, dessen Auflagerbedingungen wir entsprechend den Bedingungen der Spalte 2 wählen.

Die hierzu erforderlichen Überlegungen haben wir im Kapitel 7.5 und 7.6 des Abschnitts 7 durchgeführt. Jetzt sind sie lediglich noch auf ein allgemeines Schema zurückzuführen.

Tafel 11



1. Wenn wir in irgendeinem Punkt des fiktiven Balkens die Bedingungen

$$\overline{M} = 0 \quad \text{und} \quad \overline{Q} \neq 0$$

haben, so genügen wir diesen, indem wir in dem Punkt ein Gelenk anordnen (z. B. im Punkt B des Falles *3* der 1. Spalte). Wenn solche Bedingungen für das Balkenende zutreffen, so ordnen wir zu ihrer Erfüllung hier ein gelenkiges Lager an.

2. Die Bedingungen $\overline{M} = \overline{Q} = 0$ am Ende des Balkens werden erfüllt, wenn man dies Ende frei läßt (siehe Auflager A in den Fällen *1*, *4*, *5* und gleichzeitig B im Falle *5*).

3. Die Bedingungen $M \neq Q$ und $Q \neq 0$ werden berücksichtigt, wenn das Ende des Balkens in der Wand eingespannt ist (Auflager B im Falle *1* und Auflager C im Falle *3*). Vergleicht man die wirklichen Balken der 1. Spalte mit ihren auf diese Weise erhaltenen fiktiven Schemata in der 2. Spalte, so bemerken wir folgende Übereinstimmung:

1. Dem gelenkigen Auflager des wirklichen Balkens entspricht ein gelenkiges Auflager des fiktiven Balkens;

2. dem Zwischenauflager des wirklichen Balkens entspricht ein Gelenk im fiktiven Balken;

3. der Einspannung des Endes des wirklichen Balkens entspricht ein freies Ende des fiktiven Balkens und umgekehrt.

II. Betrachtet man jetzt die in der Tafel 11 aufgeführten Fälle, so können wir von einem neuen Gesichtspunkt aus an die Frage über die statische Bestimmtheit oder Unbestimmtheit von Balken herangehen. Wir stellen fest, daß die statisch bestimmten Fälle *1*, *2* und *3* der wirklichen Balken ebenfalls statisch bestimmte fiktive Schemata ergeben[1]), die eine völlig bestimmte Belastung durch die M-Linie aufweisen. In irgendeinem beliebigen Querschnitt des fiktiven Balkens können wir das Biegemoment $\overline{M}$ und die Querkraft $\overline{Q}$ bestimmen und folglich auf Grund der Formeln (8.29) die Formänderung ermitteln sowie die elastische Linie des wirklichen Balkens zeichnen.

Was die statisch unbestimmten Fälle *4* und *5* anbetrifft, so erhalten wir die ihnen entsprechenden fiktiven Schemata als geometrisch veränderliche: Hier haben wir einen fiktiven Balken mit einem Auflager oder sogar ganz ohne Auflager (Fall *5*). Derartige Balken können aber unter der Einwirkung einer beliebigen gegebenen Belastung nicht im Gleichgewicht bleiben. Wir bemerken jedoch, daß die fiktiven Belastungen in den Fällen *4* und *5* im voraus noch nicht festliegen, da die Auflagerordinaten der M_A-Linie im Falle *4* und der M_A- und M_B-Linie im Falle *5* noch unbekannt sind. Sie werden, wie wir wissen, nach dem Absatz A und B des Abschnitts 8.1 mit Hilfe der Formänderungsbedingungen ermittelt, die je nach der Wahl der überzähligen Unbekannten die Form $\overline{Q}_A = \overline{A} = 0$ oder $\overline{Q}_B = -\overline{B} = 0$ oder $\overline{M}_A = 0$ oder $\overline{M}_B = 0$ haben. Diese Bedingungen haben wir schon in der 2. Spalte der Tafel 11 eingetragen. In jedem Falle verlangen sie, daß sich die fiktiven Balken im Gleichgewicht befinden. Es genügt für das Gleichgewicht des nur ein Auflager besitzenden fiktiven Balkens im Falle *4* die eine einzige Bedingung $M_B = 0$.

Für den freien Balken des Falles *5* sind Gleichgewichtsbedingungen erforderlich, z. B. $M_A = 0$ und $M_B = 0$.

Dies bedeutet, *daß die Formänderungsbedingungen des statisch unbestimmten wirklichen Balkens gleichzeitig die Gleichgewichtsbedingungen des entsprechenden geometrisch veränderlichen fiktiven Balkens darstellen.*

Hieraus geht hervor, daß die Aufgabe der Biegung eines statisch unbestimmten Balkens ihrer äußeren Form nach darauf zurückgeführt wird, daß das entsprechende fiktive System in das statische Gleichgewicht gebracht wird. Wenn man hiervon Gebrauch macht, so kann man eine neue Lösungsform der statisch unbestimmten Aufgaben der Biegung erhalten.

Als komplizierteres Beispiel untersuchen wir einen Balken mit drei Feldern (Bild 277, a). Das entsprechende fiktive Schema wird auf Grund der am Ende des Punktes A im Abschnitt 8.3 gemachten Angaben auf einen Balken auf zwei

---

[1]) Im Falle *3* ist der fiktive Balken trotz der vier Unbekannten an den Auflagern ebenfalls statisch bestimmt, da wir außer den drei üblichen Gleichgewichtsbedingungen der Statik für diesen die vierte Bedingung $M_B = 0$ haben, die verlangt, daß das Moment aller linken Kräfte in bezug auf das Gelenk B gleich Null ist.

Stützen *0* und *3* mit zwei Gelenken in den Punkten *1* und *2* (Bild 277, b) zurückgeführt. Für das Gleichgewicht desselben muß gefordert werden, daß die Momente der linken Kräfte in den Punkten *1*, *2* und *3* gleich Null werden. Die erste dieser Forderungen ermöglicht es, die linke fiktive Reaktion $\overline{A}$ zu finden. Die beiden übrigen liefern nach dem Einsetzen des gefundenen Wertes $\overline{A}$ in diese die üblichen Dreimomentengleichungen.

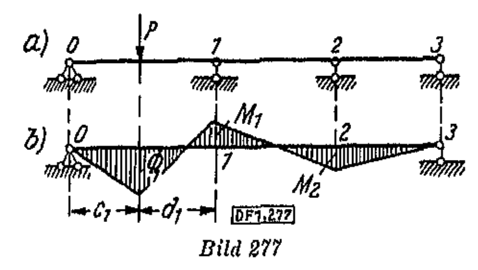


Bild 277

Nachdem wir die überzähligen Unbekannten gefunden und die *M*-Linie des wirklichen Balkens gezeichnet haben, belasten wir den fiktiven Balken mit dieser. Darauf kann man unmittelbar nach den Formeln (7.67) und (7.68) des Abschnitts 7 die Durchbiegungen und Neigungswinkel der Tangente zur Achse des gegebenen (wirklichen) Balkens ermitteln.

9 Drillung (Verdrehung, Torsion) des geraden Balkens

9.1 Drillung von Balken mit kreisförmigem Querschnitt. Formänderungen Schubspannung. Hauptspannungen

A. Die Drillung des Balkens entsteht infolge der Wirkung von senkrecht zur Balkenachse gerichteten Kräften, die diese aber nicht schneiden (Bild 278). In der Praxis sind als derartige Kräfte z. B. die Treibriemenzüge einer Welle, der Druck der Triebstange auf den Kurbelzapfen usw. anzusehen.

Jede der Kräfte $P_1, P_2, P_3, \ldots$ (Bild 278, a) können wir nach den Regeln der Statik bei Anbringung eines Kräftepaares $M = Pa$ (Bild 278, b und c), das den Balken um seine Achse dreht, auf die Balkenachse übertragen[1]). Nach der Übertragung erhalten wir ein dem früheren äquivalentes System von Kräften, wobei die übertragenen Kräfte eine Biegung des Balkens und die angebrachten Kräftepaare eine Drillung hervorrufen werden.

Wenn die Formänderungen des Balkens nicht groß sind und die Spannungen in diesem die Proportionalitätsgrenze nicht übersteigen, so können wir uns das Prinzip

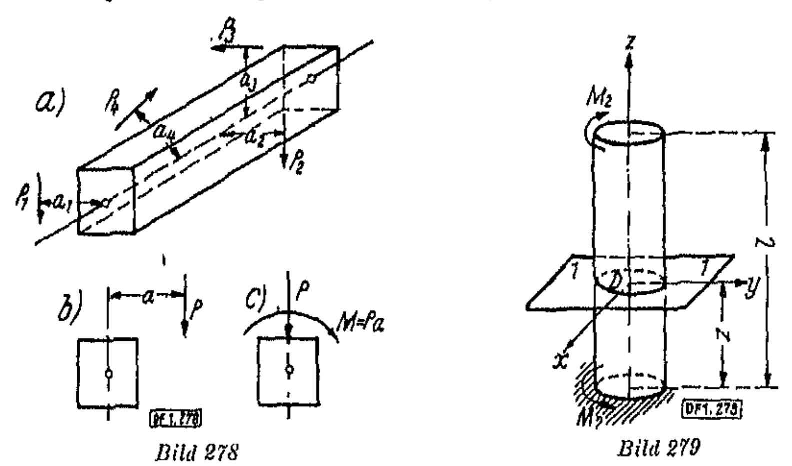


Bild 278 Bild 279

der Unabhängigkeit der Wirkung zunutze machen und die Drillung getrennt von der Biegung untersuchen. Nehmen wir an, daß sich die auf den Balken wirkenden Kräfte im Gleichgewicht befinden. Dann werden die bei der Übertragung angebrachten Kräftepaare sich ebenfalls gegenseitig das Gleichgewicht halten[2]).

Der Einfachheit wegen betrachten wir zuerst einen mit einem Ende eingespannten runden Balken, der durch ein am anderen Ende angreifendes Moment

[1]) In der zur Achse senkrechten Ebene.
[2]) Hierbei kann sich der Balken im Ruhezustand befinden oder aber eine gleichförmige Drehung um seine Achse erleiden. Das letztere trifft bei der Drillung der Wellen zu.

Drillung beansprucht wird (Bild 279). Die Reaktion an der Einspannungs-le wird selbstverständlich durch ein der Größe nach gleiches Moment von gegengesetzter Richtung ausgedrückt.

efassen wir uns also mit einem Balken mit kreisförmigem Querschnitt, da in diesem Falle die Aufgabe der Drillung mit Hilfe einer elementaren Methode Festigkeitslehre gelöst werden kann. Die Drillungstheorie bei Balken mit erem Querschnitt erweist sich nämlich als viel komplizierter und wird mit fe von Methoden der Elastizitätstheorie gelöst.

lei der Verdrillung bleibt offenbar die Balkenachse z gerade und der Quer-nitt am eingespannten Ende unbeweglich. Die anderen Querschnitte werden um die z-Achse drehen, wobei der Verdrehungswinkel (Drillwinkel) des erschnitts um so größer sein wird, je weiter er vom eingespannten Ende ent-nt ist. Der obere Endquerschnitt hat den größten Verdrehungswinkel, den n den vollen *Drillwinkel* des Balkens nennt.

ur Bestimmung der inneren Kräfte im Balken folgen wir der üblichen thode, d. h. wir zerschneiden den Balken mittels einer zur z-Achse senkrechten ene *1—1* in einem beliebigen Abstand z vom eingespannten Ende, entfernen en Teil des Balkens, z. B. den oberen, und ersetzen dessen Wirkung auf den teren Teil durch am Querschnitt angreifende elementare Kräfte.

Diese Kräfte werden den auf den entfernten Teil wirkenden äußeren Kräften uivalent sein, d. h. sie werden auf ein in der Querschnittsebene gelegenes äftepaar zurückgeführt. Dessen Moment M_z heißt das Drillmoment im ge-

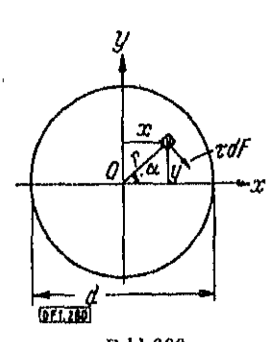


Bild 280

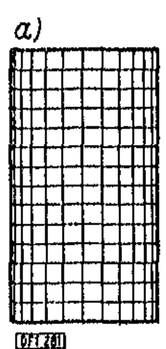


Bild 281

benen Querschnitt. Hierbei hat man Grund anzunehmen, daß in einem liebigen Querschnitt des Balkens nur tangentiale Spannungen (Schub-annungen) wirken werden.

Nimmt man an, daß im Querschnitt Normalspannungen σ vorhanden sind, kann das System der inneren Normalkräfte $\sigma\,dF$, allgemein gesagt, drei von ull verschiedene Werte $\sum Z$, $\sum M_y$ und $\sum M_x$ haben, was der Bedingung der quivalenz zu den auf ein Kräftepaar M_z zurückgeführten äußeren Kräften iderspricht (die Achsen x und y sind Zentralachsen)[1].

---

[1] ... ist nur unter der Bedingung möglich, ... e genaue Untersuchung der Frage zeigt, ... vorhanden sind, diese jedoch im Bereich ... spannungen außerordentlich klein sind.

Gemäß dem Nachweis im Abschnitt 6.04 ist die Spannung τ in einem beliebigen Punkt am Umriß des Querschnitts in Richtung der Tangente zum Umriß, d. h. senkrecht zum Radius gerichtet.

Es ist naturgemäß anzunehmen, daß auch in allen übrigen Punkten des Querschnitts die Spannungen die zum entsprechenden Radius senkrechte Richtung beibehalten. Stellen wir die Bedingungen der Äquivalenz der tangentialen Kräfte τdF mit den äußeren Kräften des abgetrennten Balkenteils auf.

Drei Werte des Kräftesystems τdF sind offensichtlich gleich Null, nämlich:

$$\sum Z = \sum M_x = \sum M_y = 0,$$

und folglich sind sie den entsprechenden Werten der äußeren Kräfte identisch gleich. Setzt man die übrigen drei Werte der Kräfte τdF den entsprechenden Werten der äußeren Kräfte gleich, so erhalten wir drei Bedingungen der Äquivalenz:

$$\int_F \tau dF r = M_z, \tag{9.1}$$

$$\int_F \tau dF \sin\alpha = 0, \tag{9.2}$$

$$\int_F \tau dF \cos\alpha = 0, \tag{9.3}$$

worin τdF die tangentiale Kraft an einem beliebigen elementaren Flächenelement dF, r den Hebelarm der Kraft in bezug auf die z-Achse oder den Radiusvektor des Flächenelements und α den Neigungswinkel des Radius zur x-Achse darstellen (Bild 280).

Hier haben wir wie auch in der Biegungstheorie (Abschnitt 6.01) ein unbestimmtes System von drei Gleichungen mit einer unendlichen Anzahl von unbekannten Werten τ (die unter dem Integralzeichen stehen). Daher wenden wir uns der Untersuchung der Formänderungen zu, die es ermöglicht, das Gesetz der Verteilung der Schubspannungen über den Querschnitt aufzuklären.

B. Eine klare Vorstellung über die Formänderung eines runden Balkens bei der Verdrehung kann man mit Hilfe eines Gummimodells mit einem auf dessen Oberfläche aufgezeichneten Netz von Rechtecken, die durch untereinander parallele Kreislinien und achsenparallele Mantellinien gebildet sind, bekommen (Bild 281, a).

Wenn man das eine Ende des Modells einspannt und an dem anderen ein Kräftepaar anbringt, das eine Verdrehung bewirkt, so nimmt das Netz das in Bild 281, b dargestellte Aussehen an. Hierbei werden sich die vorher achsenparallelen Mantellinien schrägstellen und sich an der Oberfläche des Balkens in Schraubenlinien umwandeln. Was die Kreislinien anbetrifft, so wird sich ihre Form nicht ändern, und ihre gegenseitigen Abstände bleiben bei kleinem Drillwinkel unverändert. Machen wir die Annahme, daß der Charakter der auf der Oberfläche beobachteten Formänderungen auch im Innern des Balkens auf einer beliebigen, zur äußeren Mantelfläche konzentrischen Zylinderfläche der gleiche sein wird.

Diese Annahme ist offensichtlich gleichbedeutend der, daß die ebenen Querschnitte eines Balkens nach der Formänderung eben bleiben und sich die Abstände zwischen denselben nicht ändern. Auf diese Weise kann man die Formänderung des Balkens als Ergebnis der Drehung der Querschnitte um die

Balkenachse in Richtung des Drehmoments betrachten, wobei sich die Querschnitte nicht krümmen und ihre Radien gerade bleiben. Der Drillwinkel des Querschnitts wird offenbar um so größer sein, je weiter er vom eingespannten Ende entfernt ist.

Bei der weiteren Untersuchung der Formänderungen benutzen wir das gleiche Verfahren, das in der Biegetheorie (Kapitel 6.01) angewandt wurde. Durch einen beliebigen Schnitt *1—1* (Bild 279) und einen zu *1—1* im Abstand d_z parallel geführten benachbarten Schnitt *2—2* schneiden wir aus dem Balken eine dünne Scheibe heraus (Bild 282). Nach der Formänderung wird sich der Querschnitt *1—1* gegenüber dem Querschnitt *2—2* um einen kleinen Winkel gedreht haben, den wir mit $d\varphi$ bezeichnen[1]). Zeichnen wir den Radius aO in der Ebene des Schnitts *1—1* und den Abschnitt ac der achsenparallelen Mantellinie auf der Seitenfläche der Scheibe ein. Nach der Formänderung wird sich der Radius aO um den Winkel $aOa' = d\varphi$ gedreht und die Strecke ac um einen gewissen Winkel aca' zu seiner Anfangslage geneigt haben. Der Winkel aca' ist offenbar der Schubwinkel auf der Scheibenfläche. Bezeichnen wir ihn mit γ_0.

Es ist nicht schwer, auf Grund des Bildes 282 die Abhängigkeit zwischen den Winkeln γ_0 und $d\varphi$ festzulegen. Aus dem Dreieck $a'ac$ erhalten wir $aa' = ac \operatorname{tg} \gamma_0$

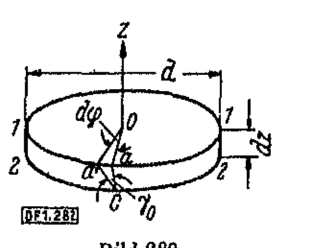


Bild 282

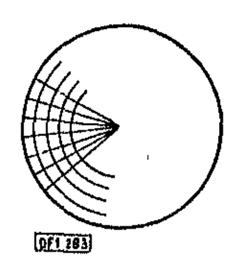


Bild 283

$\approx dz\gamma_0$. Da andererseits aa' als Bogen mit dem Zentriwinkel $d\varphi$ anzusehen ist, ist folglich $aa' = aO\, d\varphi = \frac{d}{2}\, d\varphi$, worin d der Durchmesser des Querschnitts ist. Nach Gleichsetzung der rechten Seiten der aufgeschriebenen Gleichungen erhalten wir:

$$\gamma_0 = \frac{d}{2} \frac{d\varphi}{dz}. \tag{9.4}$$

Die Gleichung (9.4) drückt den Schubwinkel auf der Seitenfläche des Balkens aus, aber die abgeleiteten geometrischen Abhängigkeiten behalten gemäß der oben gemachten Annahme über die Formänderungen für eine beliebige zur äußeren Fläche konzentrische Zylinderfläche mit dem Radius r ihre Gültigkeit. Ersetzt man daher in der Gleichung (9.4) $\frac{d}{2}$ durch r, so erhalten wir den Ausdruck des relativen Schubs in einem beliebigen Punkte des Balkens:

$$\gamma = r \frac{d\varphi}{dz}. \tag{9.5}$$

---

[1]) Untersucht man die gegenseitige Drehung der Querschnitte, so können wir in Bild 282 den Querschnitt *2—2* als unbeweglich ansehen.

Zur klaren Vorstellung über die Formänderung bei der Drillung teilen wir den zu untersuchenden Balken mit Hilfe von drei Flächensystemen in unendliche kleine Elemente auf:

1. Teilen wir den Balken durch ein System von zur Achse senkrechten Ebenen in dünne Scheiben auf,

2. zertrennen wir die Scheiben durch ein System von radialen Ebenen (die durch die Achse gehen) in Sektoren mit unendlich kleinem Zentriwinkel und

3. zerteilen wir die Sektoren durch ein System von benachbarten Zylinderflächen in einzelne Elemente (Bild 283). Jedes dieser Elemente, das man wegen der geringen Abmessungen als rechteckiges Parallelepiped ansehen kann, wird bei der Drillung des Balkens einen reinen Schub in der zum Radius senkrechten Ebene erleiden, was die oben gemachte Annahme über die Richtung der Schubspannungen im Innern des Balkens bekräftigt. In Bild 284 ist die Formänderung von zwei zu einem elementaren Sektor gehörigen rechteckigen Elementen dargestellt, und es sind die an den oberen Flächen der Elemente, d. h. an den Flächenelementen des Querschnitts wirkenden Schubspannungen eingetragen[1]).

Die Gleichung (9.5) zeigt, daß der Schubwinkel der rechteckigen Elemente proportional dem Abstande r von der Balkenachse ist und folglich seinen größten Wert γ_0 an der Oberfläche erreicht (Bild 284). Das zu der Gleichung (9.5) gehörige Verhältnis $\frac{d\varphi}{dz}$ stellt den auf die Längeneinheit des Balkens bezogenen gegenseitigen Drehwinkel zweier Querschnitte dar und heißt der *relative* oder *der laufende Drillwinkel.*

Wir bezeichnen ihn mit Θ und schreiben die Gleichung (9.5) wie folgt um:

$$\gamma = r\Theta. \tag{9.5'}$$

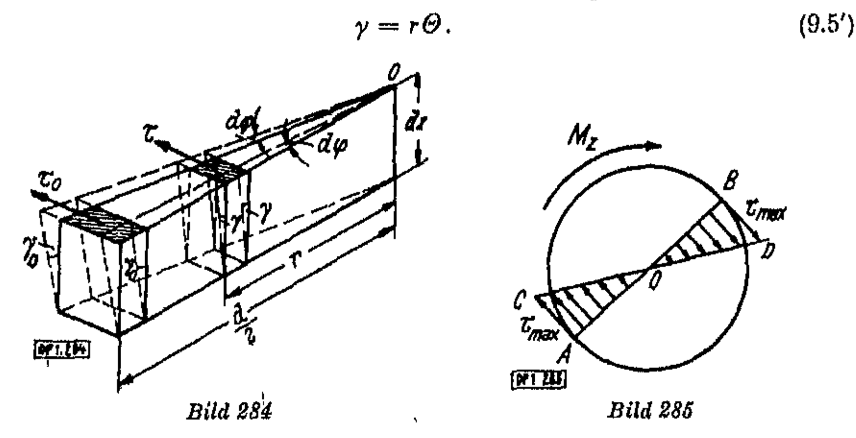


Bild 284 *Bild 285*

C. Nachdem wir auf Grund der Betrachtung der Formänderungen festgestellt haben, daß die Elemente des auf Verdrehung beanspruchten runden Balkens einen reinen Schub erleiden, wenden wir das Hookesche Gesetz für den Schub

$$\tau = G\gamma \tag{9.6}$$

---

[1]) Um die Zeichnung nicht unklar zu machen, sind in Bild 284 die gegenseitigen Schubspannungen an den übrigen Flächen der Elemente nicht gezeigt. Über diese siehe unter Punkt *E*.

an und gehen zu den Ableitungen auf Grund der erhaltenen Grundgleichungen über. Durch Einsetzen des Wertes γ aus (9.5) in (9.6) erhalten wir folgenden Ausdruck der Schubspannung in einem beliebigen Punkt des Balkenquerschnitts:

$$\tau = G\Theta r. \tag{9.7}$$

Wenn auch diese Gleichung nur als Zwischenergebnis anzusehen ist, so charakterisiert sie doch schon völlig das Gesetz der Spannungsänderung am Querschnitt:

Die Schubspannungen sind proportional dem Abstande r des Flächenelements von der Balkenachse. Die Spannungen sind folglich in der Mitte des Querschnitts gleich Null und erreichen, indem sie in radialer Richtung nach einem linearen Gesetz anwachsen, ihr Maximum an den am Umriß des Querschnitts gelegenen Flächenelementen.

Graphisch wird das Gesetz der Spannungsänderung in Richtung eines beliebigen Durchmessers AB des Querschnitts durch die Gerade COD mit den größten Ordinaten AC und BD an den äußersten Punkten des Durchmessers dargestellt[1]) (Bild 285).

Kehren wir jetzt zu den statischen Gleichungen (9.1), (9.2) und (9.3) zurück. Wie schon erwähnt wurde, enthalten diese eine unendliche Anzahl von unbekannten Werten τ im gegebenen Querschnitt, die, allgemein gesagt, vom Radiusvektor r und seinem Neigungswinkel α, d. h. von den polaren Koordinaten des elementaren Flächenelements dF abhängen. Dank den eingeführten Hypothesen über die Formänderungen und der Anwendung des Hookeschen Gesetzes gelang es, die unendliche Anzahl der Unbekannten auf nur eine Unbekannte, nämlich auf den relativen Drillwinkel Θ zurückzuführen. Die Gleichung (9.7) gibt tatsächlich eine völlige bestimmte funktionale Abhängigkeit der Spannung von den polaren Koordinaten des Flächenelements dF an:

Die Spannung ist direkt proportional dem Radiusvektor des Flächenelements und hängt nicht vom polaren Winkel α ab. Demnach ist in der Gleichung (9.7) nur ein unbekannter Wert Θ enthalten.

Setzt man den Wert τ aus (9.7) in (9.1), (9.2) und (9.3) ein, so kommen wir zu einem System von drei Gleichungen mit einer Unbekannten Θ. Die Gleichungen dieses Systems widersprechen sich dann nicht, wenn beim Einsetzen in die Gleichungen (9.2) und (9.3) ihre linken Teile sich identisch in Null verwandeln. Hierdurch zeigt sich, daß die von uns angenommenen Hypothesen über die Formänderungen den Gleichgewichtsbedingungen der äußeren und inneren Kräfte nicht widersprechen. Was den unbekannten Wert Θ anbetrifft, so ermittelt sich dieser leicht aus der Gleichung (9.1). Führen wir das Einsetzen durch:

$$\int_F \tau\, dF \sin\alpha = G\Theta \int_F r \sin\alpha\, dF = 0, \tag{9.2'}$$

$$\int_F \tau\, dF \cos\alpha = G\Theta \int_F r \cos\alpha\, dF = 0 \tag{9.3'}$$

und gehen zu den Descartesschen Koordinaten des Flächenelements (Bild 280) über, dabei beachten wir, daß

$$r \sin\alpha = y,$$

und

$$r \cos\alpha = x$$

[1]) Beim Durchgang durch den Nullpunkt ändert sich natürlich die Richtung der Spannungen in die umgekehrte. Auf diese Weise haben die Momente der inneren Kräfte nur eine Richtung.

st. Dann erhalten wir die Bedingungen der Widerspruchsfreiheit des Systems in olgender Form:

$$G\Theta \int_F y\,dF = 0, \quad G\Theta \int_F x\,dF = 0. \tag{9.8}$$

)a $G\Theta$ nicht gleich Null sein kann, so erfüllen sich die Gleichungen (9.8), wenn leichzeitig

$$\int_F y\,dF = 0 \quad \text{und} \quad \int_F x\,dF = 0$$

ıt. Diese beiden Integrale sind die statischen Momente der Fläche des Querchnitts in bezug auf die Achsen x und y. Da die Achsen x und y Zentralachsen nd, so sind beide Bedingungen erfüllt.

Wir stellen nun fest, daß nicht nur bei einem kreisförmigen Querschnitt des alkens, sondern auch allgemein bei Querschnitten mit zwei Symmetrieachsen ie Drehung der Querschnitte bei der Drillung des Balkens um ihre Schwerunkte vor sich geht, d. h. die Drillungsachse fällt mit der Balkenachse zusammen. olglich sind die Spannungen im Schwerpunkt derartiger Querschnitte gleich ull. Im Fall von Querschnitten mit nur einer Symmetrieachse oder von überaupt unsymmetrischen Querschnitten geht die Drehung, allgemein gesagt, um nen Punkt vor sich, der mit dem Schwerpunkt nicht zusammenfällt und *Drillungszentrum*" heißt.

D. Setzen wir jetzt den Wert τ aus (9.7) in die verbliebene statische Gleichung .1) ein:

$$\int_F \tau\,dF\,r = G\Theta \int_F r^2\,dF = M_z.$$

eachtet man, daß das nach dem Einsetzen erhaltene Integral das polare Trägitsmoment J_p des Querschnitts in bezug auf seine Mitte darstellt, so ermitteln ir den relativen Drillwinkel Θ:

$$\frac{d\varphi}{dz} = \Theta = \frac{M_z}{GJ_p}. \tag{9.9}$$

ie Formel (9.9) ist als grundlegende Abhängigkeit der Drillungstheorie (Tornstheorie) anzusehen, da sie die Synthese aller drei Seiten der Aufgabe darellt. Das Produkt GJ_p heißt die *Drillungssteifigkeit des runden Balkens.*

Vergleicht man die grundlegenden Formeln des Zuges, der Biegung und illung,

$$\varepsilon = \frac{N}{EF}, \quad \frac{1}{\varrho} = \frac{M}{EJ} \quad \text{und} \quad \Theta = \frac{M_z}{GJ_p}$$

teinander, so stellen wir hier nochmals fest, daß sie alle ein und dasselbe okesche Gesetz über die Proportionalität zwischen der Formänderung und der aft in einer für jede Erscheinung spezifischen Form ausdrücken.

Aus der Formel (9.9) kann man leicht durch Integration den Ausdruck des samten Drillwinkels des Balkens, d. h. der gegenseitigen Verdrehung seiner ıdquerschnitte ermitteln. Es ist:

$$\varphi = \int_0^l \frac{M_z\,dz}{GJ_p} = \frac{M_z l}{GJ_p}, \tag{9.10}$$

in dem zu untersuchenden Fall (Bild 279) das Moment der äußeren Kräfte M_z allen Querschnitten des Balkens gleich ist.

Es ist noch die endgültige Formel der Schubspannung bei der Drillung abzuleiten. Zu diesem Zweck setzen wir den Wert Θ aus (9.9) in (9.7) ein und erhalten nach Kürzung:

$$\tau = \frac{M_z r}{J_p}. \qquad (9.11)$$

Das entsprechende Gesetz der Spannungsverteilung ist bereits in Bild 285 dargestellt. Es ist nützlich, die nahe Analogie der Formeln (9.10) und (9.11) mit den entsprechenden Formeln des Zuges und der Biegung,

$$\Delta l = \frac{Nl}{EF} \quad \text{und} \quad \sigma = \frac{My}{J},$$

herauszustellen.

E. Auf Grund der Gegenseitigkeit der Schubspannungen bestimmt die Formel (9.11) sowohl die Spannungen an den Flächenelementen der Querschnitte, als auch an den Flächenelementen der diametralen Querschnitte des Balkens, d. h. an den Seitenflächen der Elemente, in die der Balken bei der Untersuchung der Formänderungen aufgeteilt wurde (Bild 284).

In Bild 286 sind die gegenseitigen Schubspannungslinien im Quer- und im diametralen (Längs-) Schnitt des runden Balkens dargestellt.

Gehen wir jetzt zu den Spannungen in schrägen Schnitten über. Zur Beurteilung der Festigkeit des Balkens genügt es, die Spannungen an den an den Umriß des Querschnitts angrenzenden-elementaren Flächenelementen zu untersuchen,

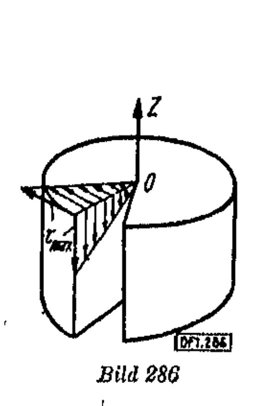


Bild 286

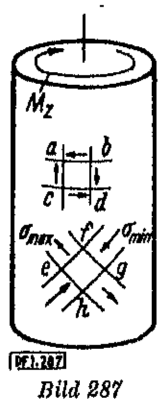


Bild 287

da sich die am stärksten angespannten Elemente des Balkens bei der Drillung an der Oberfläche befinden. Schneiden wir aus der äußeren dünnen Schicht des Balkens mittels zweier diametralen Schnitte und zweier Querschnitte ein rechteckiges Element *abcd* heraus (Bild 287). An diesen vier Flächen des Elements wirken Schubspannungen, deren Richtung in der Zeichnung in Übereinstimmung mit der Richtung des Drillmoments angegeben ist. Die Normalspannungen an den Flächen sind gleich Null, demnach erleidet das Element einen reinen Schub. Wie bekannt, sind aber beim reinen Schub an den schrägen Schnittebenen des Elements auch Normalspannungen vorhanden. Die größten von diesen, d. h. die Hauptspannungen wirken an Flächenelementen (Ebenen), die unter 45°

zu den Seitenflächen geneigt sind, und haben verschiedene Vorzeichen. Aber der zahlenmäßige Wert der beiden Hauptspannungen ist gleich dem Wert der Schubspannungen an den Seitenflächen des Elements (siehe Kapitel 3.06):

$$\sigma_{max} = -\sigma_{min} = \tau_{max}.$$

Hieraus folgern wir, daß das aus der äußeren Schicht mit Hilfe von vier zu der zylindrischen Mantelfläche unter den Winkeln von 45° geneigten Ebenen herausgeschnittene rechteckige Element *efgh* (Bild 287) sich im Zustande des Zuges in einer Richtung und des diesem gleichen Druckes in der senkrechten Richtung befindet. Folglich entstehen bei der Drillung des runden Balkens die größten Zug- und Druckspannungen an der Oberfläche, und sie sind unter dem Winkel von 45° zur zylindrischen Mantelfläche geneigt.

Zahlreiche Drillungsversuche mit runden Balken haben Ergebnisse geliefert, die mit der oben dargelegten Theorie gut übereinstimmen. In theoretischer Hinsicht ist der Wert der Drillungsversuche für die Kontrolle der Schubtheorie besonders wichtig, da der reine Schub im Laboratorium nicht unmittelbar verwirklicht werden kann und im Grunde genommen keine Grunderscheinung darstellt, sondern nur eine solche, die andere Erscheinungen begleitet, und zwar den Zug bzw. Druck, die Biegung und Drillung. Von diesen Erscheinungen bietet die größten Vorteile für die Kontrolle der Schubtheorie auf dem Versuchswege eben die Drillung, bei der die Elemente des Balkens einen Schub in reiner Form erleiden. Im besonderen kann man auf Grund des Drillungsversuchs den Elastizitätsmodul G des Werkstoffs beim Schub ermitteln. Zu diesem Zweck wird mit einem genauen Gerät der volle Drillwinkel φ eines Stabes von bestimmter Länge und bestimmtem Durchmesser sowie das entsprechende Drillmoment gemessen. Darauf wird der Modul G aus der Gleichung (9.10) berechnet.

Die Zerstörung runder Balken durch Drillung beginnt immer von der Oberfläche aus, an der die größten Spannungen wirken. Hierbei ist der Charakter der Zerstörung der Balken aus verschiedenem Material sehr verschieden. Bei Holzbalken beginnt die Zerstörung mit der Bildung von Längsrissen, was sich dadurch erklären läßt, daß der Widerstand des Holzes gegen Schub längs der Faser schwächer ist als senkrecht zur Faserrichtung. Auf diese Weise sind als Ursache der Zerstörung die Schubspannungen τ_{max} in den Diametralebenen des Balkens anzusehen. Bei gußeisernen Stäben bildet sich oft ein Riß auf der Oberfläche in Form einer unter 45° zur Achse geneigten Schraubenlinie. Es ist offensichtlich, daß die Zerstörung in diesem Fall infolge der Hauptzugspannungen σ_{max} vor sich geht, denen das Gußeisen einen geringeren Widerstand als den Schubspannungen entgegensetzt.

Der gleiche Charakter der Zerstörung wird bei der Prüfung von Versuchsstäben auf Drillung aus Beton und Stahlbeton beobachtet, wobei sich bei den letzteren eine spiralförmige Stahlarmierung am wirksamsten erweist, die in der Nähe der Oberfläche des Versuchsstabes unter einem Winkel von 45° zur Achse, d. h. in Richtung der Hauptzugspannungen angeordnet ist. Bei plastischen Werkstoffen (weichem Stahl, Messing) ist die Zerstörung deswegen nicht so scharf ausgeprägt, weil dieser Zerstörung große plastische Formänderungen, die an der Oberfläche des Versuchsstabes beginnen, vorangehen.

9.2 Berechnung von Wellen auf Verdrehung. Drillmomentenlinien

A. Die Ableitung des vorhergehenden Kapitels bezog sich auf einen an den Enden mit gleichen und entgegengesetzten Drillmomenten belasteten Balken (Bild 279). In der Praxis greifen die äußeren, eine Verdrehung bewirkenden Kräftepaare (Momente) jedoch oft an mehreren Querschnitten des Balkens an. Allerdings kommt auch eine Belastung durch ein über die Länge gleichmäßig verteiltes Drillmoment vor. Nehmen wir z. B. an, es soll eine auf Lagern ruhende Getriebewelle berechnet werden (Bild 288, a). Die Wirkung der in der Welle sitzenden Antriebsscheiben läßt sich durch Momente mit den auf der Zeichnung angegebenen Richtungen ausdrücken. Vernachlässigt man die Reibung in den Lagern und andere schädliche Widerstände, so wird bei gleichförmiger Drehung der Welle das Moment der Antriebsscheibe D durch die infolge des Widerstandes der Arbeitsmaschinen hervorgerufenen Momente der übrigen Scheiben A, B und C im Gleichgewicht gehalten:

$$M_A + M_B + M_C - M_D = 0.$$

Angenommen, es sollen die Spannungen in irgendeinem Querschnitt $m - n$ der Welle ermittelt werden. Entfernt man nach dem Zerschneiden irgendeinen Teil der Welle, z. B. den linken, so sehen wir, daß die linken äußeren Kräfte auf ein Kräftepaar $M_z = M_A + M_B$ zurückgeführt werden, das auch das Drillmoment im Querschnitt $m - n$ sein wird. Aus der Gleichgewichtsbedingung folgt, daß die

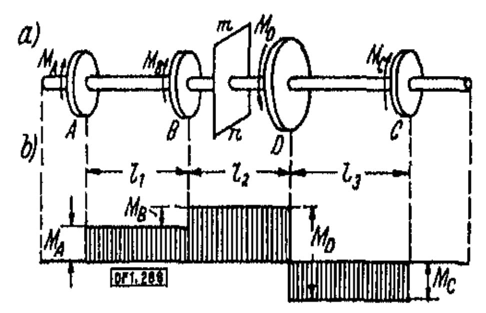


Bild 288

algebraische Summe der an der Welle rechts vom Querschnitt angreifenden Momente der Summe der linken Momente gleich und dem Vorzeichen nach (der Richtung nach) entgegengesetzt ist. Daher vereinbaren wir im weiteren, unter dem *Drillmoment M_z im Querschnitt die algebraische Summe der auf einer Seite des Querschnitts wirkenden Momente zu verstehen.* Hierbei ist es nicht notwendig, für das Drillmoment M_z irgendeine Vorzeichenregel festzulegen, wie dies für das Biegemoment gemacht wurde, da ein Vorzeichenwechsel der nach der Formel (9.11) ermittelten Schubspannung nur eine Änderung seiner Richtung in die umgekehrte bedeuten würde, was sich auf die Festigkeit des Balkens nicht auswirken kann.

Für das Auffinden des gefährdeten Querschnitts ist es zweckmäßig, eine der Biegung analoge M_z-Linie des Drillmoments zu konstruieren, die das Gesetz seiner Änderung über die Länge der Welle aufzeigt. Da im vorliegenden Falle die Welle mit Einzelmomenten belastet ist, so wird offenbar in allen Querschnitten

jedes der Abschnitte AB, BD und DC das Drillmoment konstant bleiben und sich sprungweise beim Übergang der Grenzen der Abschnitte ändern. Nimmt man die Richtung des Moments M_A als positiv an, und berechnet man nacheinander die Drillmomente in allen Abschnitten, so erhalten wir die in Bild 288, b dargestellte Linie.

Wenn wir die Plätze der Antriebsscheibe D und einer der äußersten Scheiben A und C wechseln, so kann man leicht erkennen, daß sich dadurch das größte Drillmoment vergrößern wird. Demzufolge ist es zweckmäßiger, die Antriebsscheibe näher zur Mitte der Welle so anzuordnen, daß die Summen der Momente der übrigen Scheiben möglichst auf beiden Seiten gleich werden.

Aus den durchgenommenen Beispiel ersieht man, daß die Konstruktion der Drillmomentenlinien außerordentlich einfach durchzuführen ist und nach den durchgenommenen Kapiteln über die Biegung dem Leser keinerlei Schwierigkeiten bietet.

B. Zur Ermittlung der rechnerischen (der größten) Schubspannung im gefährdeten Querschnitt eines runden Balkens muß man in der Formel (9.11) den veränderlichen Wert r durch $\frac{d}{2}$ ersetzen, wo d der Durchmesser des Querschnitts ist:

$$\tau_{max} = \frac{M_z \frac{d}{2}}{J_p}.$$

Analog der Biegung nennen wir das polare Widerstandmoment des Querschnitts das Verhältnis des polaren Trägheitsmoments zum Abstand der vom Zentrum am weitesten entfernten Punkte, d. h. zum halben Querschnittsdurchmesser:

$$W_p = \frac{J_p}{\left(\frac{d}{2}\right)} = \frac{\frac{\pi d^4}{32}}{\frac{d}{2}} = \frac{\pi d^3}{16}. \tag{9.12}$$

Dann stellt sich die Berechnungsformel für die Drillung analog der Berechnungsformel der Biegung in der Form

$$\tau_{max} = \frac{M_z}{W_p} \leqq \tau_{t_{zul}} \tag{9.13}$$

dar, worin $\tau_{t_{zul}}$ die zulässige Schubspannung bei der Drillung (Torsion) ist. Für die Wahl des Querschnitts der Welle wird das gemäß der Festigkeitsbedingung erforderliche Widerstandsmoment aus

$$W_{p_{erf}} = \frac{M_{z_{max}}}{\tau_{t_{zul}}}$$

gefunden und alsdann mit Hilfe der Formel (9.12) der Durchmesser der Welle ermittelt. Wenn es beabsichtigt ist, die Welle mit veränderlichem Querschnitt auszuführen, so werden die Abmessungen des Querschnitts für jeden Abschnitt besonders auf Grund des entsprechenden Drillmoments ermittelt.

In der Praxis benutzt man oft die folgenden angenäherten Werte J_p und W_p:

$$\left.\begin{aligned} J_p &= \frac{\pi d^4}{32} = \frac{3{,}24\, d^4}{32} \approx 0{,}1\, d^4, \\ W_p &= \frac{\pi d^3}{16} = \frac{3{,}14\, d^3}{16} \approx 0{,}2\, d^3. \end{aligned}\right\} \tag{9.14}$$

Die horizontalen Wellen erleiden außer einer Drillung noch eine Biegung infolge des Eigengewichts, des Gewichts der Scheiben und der Spannung der Antriebsriemen. Bei Transmissionswellen, die der Übertragung der Energie von der Antriebsmaschine zu den Werkbänken dienen, ist man bemüht, den Einfluß der Biegung zu verringern, indem man die Scheiben möglichst nahe an die Stützen (Lager), die in geringen Abständen angeordnet werden, heranrückt. Wegen des im allgemeinen geringen Gewichts der Scheiben und der schwachen Anspannung der Riemen berechnet man Transmissionswellen meistens nur auf Drillung, wobei man die verhältnismäßig geringe Biegung vernachlässigt. Die zulässigen Schubspannungen werden hierbei nur sehr gering festgesetzt, da bei der Berechnung oft außer der Biegung der Einfluß der Trägheitskräfte und auch örtliche Schwächungen der Welle durch Nute für Keile zur Befestigung der Scheiben sowie die mit diesen Schwächungen verbundene örtliche Spannungskonzentration nicht berücksichtigt werden. Gewöhnlich werden die Wellen aus Kohlenstoffstahl gefertigt, für den man $\tau_{t_{zul}} = 200$ kg/cm² (Ст. 3) und $\tau_{t_{zul}} = 250$ kg/cm² (Ст. 4) annimmt. Für Wellen aus Stahl ohne besondere Kennzeichen (Handelsstahl) ist $\tau_{t_{zul}} \leqq 120$ kg/cm²[1]).

Für Wellen aus Spezialstählen sind die zulässigen Spannungen bedeutend höher. In den Handbüchern für den Maschinenbau sind die Tafeln mit den zulässigen Spannungen enthalten.

Die Schubspannungslinie bei der Drillung (Bild 285) zeigt, daß das Material des Balkens um so weniger ausgenutzt wird, je näher es der Achse gelegen ist. Daher kann man eine bedeutende Gewichtsersparnis erreichen, wenn man den schwach angespannten inneren Teil entfernt, d. h. die Welle hohl ausführt. Derartige Hohlwellen werden weitgehend bei großen Durchmessern angewandt, aber auch in solchen Fällen, wenn man die Welle möglichst leicht ausführen muß (Flugzeugmotoren). Da die Hypothesen über die Formänderungen eines vollen Rundbalkens auch in bezug auf einen hohlen Rundbalken voll anwendbar sind, so kann man bei der Berechnung von hohlen Wellen die gleichen Formeln des Drillwinkels und der Schubspannung anwenden, indem man in diese die entsprechenden Werte J_p und W_p für einen Ringquerschnitt einsetzt.

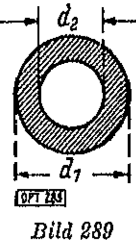


Bild 289

Es ist:

$$\left.\begin{aligned} J_p &= \frac{\pi d_1^4}{32} - \frac{\pi d_2^4}{32} \approx 0{,}1\,(d_1^4 - d_2^4), \\ W_p &\approx \frac{0{,}1\,(d_1^4 - d_2^4)}{\dfrac{d_1}{2}} = 0{,}2\, d_1^3 \left(1 - \frac{d_2^4}{d_1^4}\right), \end{aligned}\right\} \tag{9.15}$$

[1]) Diese letztere Spannung wird für Wellen von Winden, die unter besonders ungünstigen Bedingungen beim Vorliegen großer Biegespannungen arbeiten, zugelassen. *Anm. d. deutschen Redaktion:* Für Stahlteile des Bauwesens gelten die bereits früher angegebenen zul. Spannungen, indem $\tau_{t\,zul} = \tau_{s\,zul}$ zu setzen ist. Für Maschinenbauteile sind die entsprechenden Werte den Taschenbüchern bzw. Vorschriften zu entnehmen.

worin d_1 der äußere und d_2 der innere Durchmesser des Querschnitts ist (Bild 289). Bei der Berechnung von Wellen bestimmt man ihre Abmessungen so, daß sie nicht nur der Festigkeitsbedingung (9.13) genügen, sondern gleichzeitig auch eine ausreichende Steifigkeit der Welle gewährleisten, d. h. einen genügend kleinen Wert des Drillwinkels. Ein großer Drillwinkel benachteiligt stark die regelmäßige Arbeit der Welle, insbesondere der langen Wellen, da bei einer Änderung der Größe des Drehmoments (z. B. beim Ein- und Ausschalten der angeschlossenen Maschinen oder bei einer Änderung der erforderlichen Leistung) die Formänderung der Welle sich ruckartig ändert. Daher wird in der Praxis gewöhnlich verlangt, daß der Drillwinkel für einen Meter Welle einen gewissen zulässigen Wert nicht übersteigen soll. Dieser zulässige Winkel schwankt je nach Verwendungszweck der Welle zwischen von $^1/_4$° (bei Getriebewellen) bis 4° (bei Kardanwellen für Automobile).

Den vollen Drillwinkel der Welle kann man leicht mit Hilfe der M_z-Linie als algebraische Summe der Drillwinkel der einzelnen Abschnitte bei Benutzung der Formel (9.10) ermitteln.

C. *Beispiele*

Beispiel 52

Es soll der Durchmesser der in Bild 288, a dargestellten Stahlwelle bei folgenden Werten der durch die Scheiben zu übertragenden Momente ermittelt werden: $M_A = 60$ kgm, $M_B = 80$ kgm, $M_D = 200$ kgm und $M_C = 60$ kgm. Die zulässige Spannung sei $\tau_{t_{zul}} = 200$ kg/cm². Der zulässige Drillwinkel soll $\leqq \frac{1°}{4}$ für 1 lfd. m Welle sein. Der Elastizitätsmodul des Stahls bei Schub ist $G = 8 \cdot 10^5$ kg/cm²[1]).

Das größte Drillmoment tritt im Abschnitt BD in (Bild 288, b):

$$M_{z_{max}} = M_A + M_B = 60 + 80 = 140 \text{ kgm}.$$

Wählen wir den Querschnitt zuerst auf Grund der Festigkeitsbedingungen. Zu diesem Zweck finden wir das erforderliche Widerstandsmoment der Welle nach der Formel (9.13):

$$W_{p_{erf}} \frac{M_z}{\tau_{t_{zul}}} = \frac{1400}{200} = 70 \text{ cm}^3.$$

Der Durchmesser der Welle berechnet sich dann leicht aus der zweiten Gleichung (9.14). Es ist:

$$W_{p_{erf}} = 0{,}2\, d^3 = 70 \text{ cm}^3,$$

woraus sich

$$d_{erf} = 7{,}05 \approx 7 \text{ cm} \quad \text{ergibt.}$$

Für die Praxis ist es bequem, die Gleichungen (9.13) und (9.14) in allgemeiner Form in einer Gleichung zusammenzufassen, nach der dann der Durchmesser der Welle direkt ermittelt wird.

$$W_{p_{erf}} = 0{,}2\, d^3 = \frac{M_z}{\tau_{t_{zul}}},$$

woraus

$$d_{erf} = \sqrt[3]{\frac{M_z}{0{,}2\, \tau_{t_{zul}}}} \text{ wird.} \tag{9.16}$$

Jetzt wählen wir den Querschnitt auf Grund der Steifigkeitsbedingung, die verlangt, daß in dem am stärksten angespannten Teil der Welle der Drillwinkel den Wert von $\frac{1°}{4}$ für 1 lfd. m oder $\frac{1°}{400}$ für 1 lfd. m Welle nicht übersteigen soll. In Bogenlängen ausgedrückt:

$$\Theta \leqq \frac{\pi}{180 \cdot 400} \text{ cm}^{-1}\,{}^{2)} \quad \text{wird.}$$

---

[1]) *Anm. d. deutschen Redaktion:* Deutsche Werte sind für Stahl $G = 8{,}1 \cdot 10^5$ [kg/cm²], für Gußeisen $G = 3{,}8 \cdot 10^5$ [kg/cm²].

[2]) Die Dimension des relativen Drillwinkels Θ ist wie auch die der Krümmung $\frac{1}{\varrho}$ bei der Biegung $\frac{1}{[\text{Länge}]}$, z. B. $\frac{1}{[\text{cm}]}$.

Setzt man diesen Wert in den linken Teil der Gleichung (9.9) ein, so ermitteln wir das auf Grund der Steifigkeitsbedingung erforderliche polare Trägheitsmoment des Wellenquerschnitts. Es ist

$$\Theta = \frac{\pi}{180 \cdot 400} = \frac{M_z}{GJ_p},$$

$$J_{p_{erf}} = \frac{180 \cdot 400\, M_z}{G\pi} = \frac{180 \cdot 14000 \cdot 400}{800000 \cdot 3{,}14} = 401 \text{ cm}^4.$$

Den Durchmesser der Welle berechnen wir, indem wir die Formel (9.14) benutzen. Es ist:

$$J_p = 0{,}1\, d^4 = 401 \text{ cm}^4,$$

woraus sich $d_{erf} = 7{,}95 \approx 8$ cm ergibt.

Es ist klar, daß von den beiden gefundenen Werten für den Durchmesser der größere gewählt werden muß.

Beispiel 53

Ein an beiden Enden eingespannter runder Balken wird durch ein Moment M_1 auf Drillung beansprucht (Bild 290, a). Die Reaktionsmomente an der Einspannungsstelle sind zu ermitteln, und die Linie der Drillmomente im Balken ist zu konstruieren.

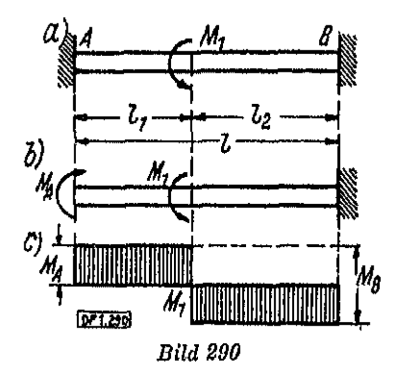


Bild 290

Bezeichnen wir die Werte der Reaktionsmomente mit M_A und M_B. Ihre Richtung wird offenbar umgekehrt der Richtung des Moments M_1 sein. Die Statik liefert für den gegebenen Fall nur eine Gleichgewichtsbedingung des Balkens:

$$\Sigma M_z = M_A + M_B - M_1 = 0.$$

Eine weitere Gleichung stellen wir auf Grund der geometrischen Bedingungen der Formänderung des Balkens auf, wobei wir analog der Lösung der statisch unbestimmten Balken vorgehen, und zwar lösen wir ein Ende des Balkens, z. B. das linke Ende, aus der Einspannung und ersetzen diese durch ein entsprechendes Reaktionsmoment M_A. Die Bedingung der Formänderung drückt sich darin aus, daß der gegenseitige Verdrehungswinkel der Endquerschnitte des in Bild 290, a dargestellten Balkens, d. h. der volle Drillwinkel, gleich Null sein muß. Der volle Drillwinkel wird als Summe der Drillwinkel der einzelnen Abschnitte gefunden. Schreiben wir die Drillmomente und Drillwinkel für jeden Abschnitt auf.

Für den linken Abschnitt ist $M_z' = M_A$ und $\varphi_1 = \dfrac{M_A l_1}{GJ_p}$

für den rechten Abschnitt ist $M_z'' = M_A - M_1$ und $\varphi_2 = \dfrac{(M_A - M_1) l_2}{GJ_p}$.

Setzen wir die Summe der Drillwinkel gleich Null:

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 = \frac{1}{G J_p} [M_A l_1 + (M_A - M_1) l_2] = 0.$$

Aus dieser Gleichung läßt sich das Reaktionsmoment M_A ermitteln. Es ist:

$$M_A = \frac{M_1 l_2}{L}, \quad \text{worin} \quad L = l_1 + l_2 \text{ ist.}$$

Aus der Gleichgewichtsbedingung finden wir das andere Reaktionsmoment:

$$M_B = M_1 - M_A = \frac{M_1 l_1}{L}.$$

Die Drillmomentenlinie ist in Bild 290, c dargestellt.

D. Bei der Bemessung von Wellen muß man gewöhnlich von der gegebenen Leistung, die von der Welle übertragen wird, und von der Umdrehungszahl je Minute ausgehen. Auf Grund dieser Daten ist es nicht schwer, das Drillmoment zu ermitteln. Bezeichnen wir mit N die Leistung der Kraftmaschine in Pferdestärken und mit n die Umdrehungszahl der Welle je Minute. Die Arbeit der Kraftmaschine in kgm/min drückt sich wie folgt aus:

$$T = 75\, N \cdot 60.$$

In diesem Zeitraum wird sich die Welle um den Winkel $\alpha = 2\pi n$ drehen. Folglich wird das von der Kraftmaschine herrührende und die Welle drehende Moment im Laufe einer Minute die Arbeit[1])

$$T = M\alpha = M \cdot 2\pi n$$

leisten. Setzt man die rechten Teile der aufgeschriebenen Gleichung einander gleich, so erhalten wir das von der Kraftmaschine auf die Welle übertragene Moment, das die Welle auf Drillung beansprucht:

$$M = \frac{75 \cdot 60\, N}{2\pi n} = 716{,}2\, \frac{N}{n} \text{ kgm}. \tag{9.17}$$

Wenn die Welle mehrere Werkbänke oder Maschinen antreibt, so werden die Drillmomente infolge des Widerstandes der Werkbänke nach der gleichen Formel (9.17) ermittelt, wenn man an Stelle von N die entsprechende Leistung in Pferdestärken, die von der Werkbank benötigt wird, einsetzt. Nachdem alle an der Welle angreifenden äußeren Momente auf diese Weise ermittelt sind, wird die Berechnung, wie oben beschrieben, durchgeführt.

In der Praxis hat man manchmal auch die umgekehrte Aufgabe zu lösen, nämlich die Leistung der Kraftmaschine durch Messung des Drillwinkels der Welle auf einer bestimmten Strecke seiner Länge zu ermitteln. Der gemessene Wert φ gibt die Möglichkeit, aus der Gleichung (9.10) das Drehmoment zu berechnen und alsdann auf Grund von (9.17) auch die Leistung in Pferdestärken.

---

[1]) Aus der Mechanik ist bekannt, daß die Arbeit eines Kräftepaares gleich dem Moment des Kräftepaares multipliziert mit dem Drehwinkel ist.

Beispiel 54

Eine Welle überträgt 240 PS bei 120 Umdrehungen je Minute. Die zulässige Spannung sei $\tau_{t_{zul}} = 250$ kg/cm². Der Durchmesser der Welle ist zu ermitteln.

Benutzen wir die Formel (9.16) und setzen wir aus (9.17) den Wert des Drillmoments ein:

$$d_{erf} = \sqrt[3]{\frac{M_t}{0{,}2\ \tau_{t_{zul}}}} = \sqrt{\frac{71\,620\ N}{0{,}2\ \tau_{t_{zul}} \cdot n}} = 71{,}1\ \sqrt[3]{\frac{N}{\tau_{t_{zul}}\ n}}. \qquad (9.18)$$

Setzt man die Zahlenwerte ein, so erhalten wir

$$d_{erf} = 71{,}1\ \sqrt[3]{\frac{240}{250 \cdot 120}} = 14{,}2 \text{ cm}.$$

9.3 Drillung von Balken mit nichtkreisförmigem Querschnitt

A. Bei der Drillung von Balken mit nicht kreisförmigem Querschnitt krümmen sich deren Querschnitte. Infolgedessen erweist sich die Aufgabe über die Drillung derartiger Balken viel komplizierter als für den runden Balken. Die allgemeine Lösung dieser Aufgabe ist erstmalig von *Saint-Venant* angegeben worden, der einige besondere Fälle von verschiedenen Querschnittsformen untersucht hat. Diese Lösungen werden in den Lehrbüchern der Elastizitätstheorie aufgeführt. Hier beschränken wir uns auf die Verwertung einiger Ergebnisse der genauen Lösung in bezug auf die in der Praxis gebräuchlichsten Querschnittsarten, in

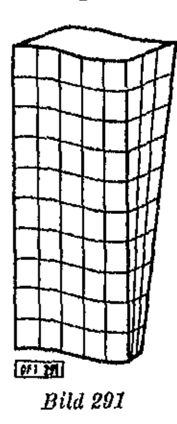


Bild 291

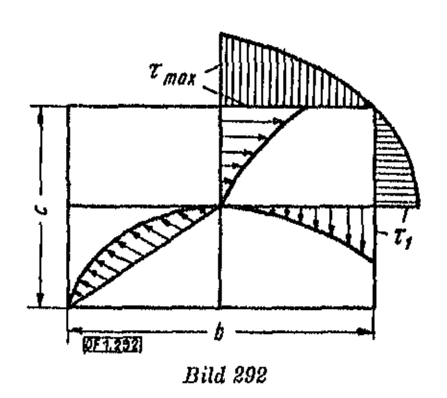


Bild 292

erster Linie in bezug auf die rechteckige Querschnittsform[1]). Die Formänderung des rechteckigen Balkens bei der Drillung kann man gut an einem Modell aus Gummi beobachten.

Die Verzerrung des auf der Oberfläche des Modells aufgetragenen quadratischen Netzes ist in Bild 291 gezeigt, in dem die Verzerrung der Querlinien, die auf eine entsprechende Verzerrung der Querschnitte hinweisen, deutlich zu erkennen ist. Auf Grund des Grades der Schrägstellung der Quadrate kann man über den Charakter der Verteilung der Schiebungen urteilen und folglich auch über die Schubspannungen an den Flächenelementen des Querschnitts in der Nähe seines

[1]) Eine ausführlichere Darlegung der Drillungstheorie wird im II. Teil des Lehrbuches gegeben.

Umrisses. Wie aus der Zeichnung 291 zu ersehen ist, behalten die Quadrate an den Kanten des Balkens die rechteckige Form bei; mit der weiteren Entfernung von den Kanten wächst jedoch die Verzerrung der Winkel an. Die größte Schrägstellung erleiden die längs der Mittellinien der Seitenflächen gelegenen Quadrate. Hieraus kann man annehmen, daß die Schubspannungen in den Ecken des Querschnitts gleich Null sind und zu den Mitten ihrer Querschnittsseiten hin anwachsen.

Die genaue Theorie bestätigt diese Annahme und zeigt, daß die größten Schubspannungen in den Mitten der *langen* Seiten des Querschnitts auftreten, während die Spannungen τ_1 in den Mitten der *kurzen* Seiten entsprechend geringer sind. Der Charakter der Spannungsverteilung entlang der Hauptachsen, der Diagonalen und des Umrisses des rechteckigen Querschnitts ist in Bild 292 dargestellt[1]).

Man kann leicht auf elementarem Wege beweisen, daß die Schubspannungen in den Ecken des rechteckigen Querschnitts gleich Null sind. Da am Umriß die Schubspannung parallel zum Umriß gerichtet ist, so folgern wir, indem wir in der Ecke des Rechtecks ein elementares Flächenelement dF abgrenzen, daß die Spannung an diesem gleichzeitig parallel zu zwei Seiten des Rechtecks gerichtet sein muß. Diesen Widerspruch kann man nur beseitigen, wenn man $\tau = 0$ annimmt.

Die in der Elastizitätstheorie aufgeführte Lösung liefert folgende Werte der größten Schubspannung (in den Mitten der *langen* Seiten) und des relativen Drillwinkels für einen Balken mit rechteckigem Querschnitt:

$$\tau_{\max} = \frac{M_z}{a b c^2}, \tag{9.19}$$

$$\Theta = \frac{M_z}{\beta b c^3 G}.\ ^{2)} \tag{9.20}$$

Hierin sind α und β Koeffizienten, die vom Verhältnis $\frac{b}{c}$ der Rechteckseiten abhängen, wobei b die *längere* Seite und c die *kürzere* Seite ist (Bild 292).

Bei der Berechnung von rechteckigen Balken auf Biegung und Drillung muß man nicht selten die Spannung τ_1 in den Mitten der kurzen Seiten des Querschnitts berechnen. Sie wird durch folgende Gleichung bestimmt:

$$\tau_1 = \frac{M_z}{\alpha_1 b c^2}. \tag{9.21}$$

Die Werte der Koeffizienten α, β und α_1 für verschiedene Verhältnisse $\frac{b}{c}$ sind in Tafel 12 angegeben.

Die größten Spannungen $\tau_{\max}$ kann man auch mit genügender Genauigkeit aus der Gleichung

$$\tau_{\max} = \frac{M_z}{b c^2}\left(3 + 1{,}8\,\frac{c}{b}\right) \tag{9.22}$$

berechnen, die angenähert solche Ergebnisse liefert, die sich beim Einsetzen der ersten Spalte der Tafel 12 in die Gleichung (9.19) ergeben.

---

[1]) Die τ-Linien für den Umriß stellen die Spannungen nur der Größe nach dar, nicht aber der Richtung nach.

[2]) Der Nenner der Formel (9.20) heißt die Steifigkeit des rechteckigen Querschnitts bei der Drillung.

Tafel 12

Werte der Koeffizienten α, β und α_1 für rechteckige Balken

b/c	1,0	1,5	1,75	2,0	2,5	3,0	4,0	6,0	8,0	10	∞
α	0,208	0,231	0,239	0,246	0,258	0,267	0,282	0,299	0,307	0,313	0,333
β	0,141	0,196	0,214	0,229	0,249	0,263	0,281	0,299	0,307	0,313	0,333
α_1	0,208	0,270	—	0,309	—	0,354	0,379	0,402	—	—	0,448

B. Aus Tafel 12 folgt, daß bei großen Verhältnissen $\frac{b}{c}$ die Koeffizienten α und β ungefähr $^1/_3$ sind. Daher kann man für schmale rechteckige Querschnitte (z. B. bei $\frac{b}{c} \geqq 10$) in praktischen Berechnungen $\alpha = \beta = \frac{1}{3}$ annehmen und die Gleichung (9.19) und (9.20) in die folgende Form bringen:

$$\tau_{\max} = \frac{3\,M_z}{b\,c^2}, \tag{9.23}$$

$$\Theta = \frac{3\,M_z}{b\,c^3 G}. \tag{9.24}$$

Die Gleichung (9.24) kann man mit genügender Genauigkeit aber nicht nur bei schmalen rechteckigen Stäben, sondern auch allgemein bei dünnwandigen nicht geschlossenen Profilen anwenden, wenn man an Stelle von b die Länge der

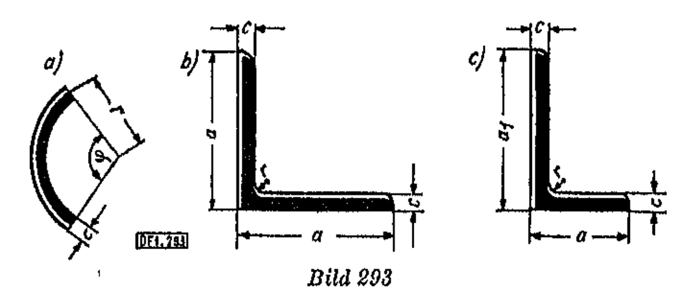


Bild 293

abgewickelten Achsenlinie des Querschnitts einsetzt. So muß man z. B. bei einem Querschnitt in Form eines Ringstückes (Bild 293, a) $b = \varphi r$, bei einem gleichschenkligen Winkel (Bild 293, b) $b = 2a - c$ und bei einem ungleichschenkligen Winkel (Bild 293, c) $b = a + a_1 - c$ einsetzen. Bei [- und I-Querschnitten (Bild 294), die eine ungleiche Steg- und Flanschendicke aufweisen, kann man den angenäherten Wert Θ erhalten, indem man als Drillungssteifigkeit des Querschnitts die Summe der Steifigkeiten der drei den Querschnitt bildenden Rechtecke annimmt. Zu diesem Zweck muß man in die Gleichung (9.24) an Stelle von $b\,c^3$ den Wert $b_1 c_1^3 + 2 b_2 c_2^3$ [1]) einsetzen:

$$\Theta = \frac{3\,M_z}{(b_1 c_1^3 + 2 b_2 c_2^3)\,G}. \tag{9.25}$$

[1]) Bei den gewalzten [- und I-Eisen ändert sich die Flanschdicke infolge der Neigung der inneren Flächen, und daher bezeichnet c_2 die in den Sortiment-Tafeln aufgeführte mittlere Dicke des Flansches.

Zur Berechnung der Spannungen bei der Drillung dünnwandiger Profile kann an die Gleichung (9.23) benutzen, aber hierbei ist es erforderlich, zwei Fälle zu ıterscheiden. Wenn der Querschnitt keine einspringenden Ecken hat (z. B. der uerschnitt in Bild 293, a), so muß man zur Berechnung der größten Spannung, e auch oben, in die Gleichung (9.23) an Stelle von b die abgewickelte Länge des uerschnitts einsetzen. Bei Vorhandensein von einspringenden Ecken ergibt ›h jedoch in diesen eine Konzentration von Spannungen, die dort ihre größten erte erreichen. Untersuchen wir zuerst einen Querschnitt von konstanter Dicke, B. einen gleichschenkligen Winkelquerschnitt (Bild 293, b). Setzt man in (9.23) e abgewickelte Länge des Querschnitts $2a - c$ ein, so erhalten wir die größte ›annung in den von der einspringenden Ecke entfernten Punkten, nämlich in r zwischen beiden Winkelschenkeln der Winkel. Bezeichnen wir diese Spanng mit τ_0:

$$\tau_0 = \frac{3 M_z}{(2a - c) c^2}. \tag{9.26}$$

Um die Spannung in der einspringenden Ecke zu erhalten, muß man die ›annung τ_0 mit einem gewissen Koeffizienten k multiplizieren, der größer als

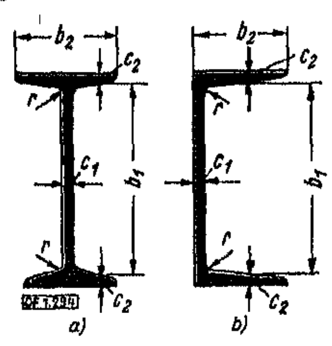


Bild 294

ıs ist und von dem Verhältnis der Schenkeldicke c und des Radius r der inneren ısrundung der Ecke abhängt:

$$\tau_{max} = k \tau_0. \tag{9.27}$$

Bei der theoretischen Untersuchung der Spannungskonzentration in der Ecke ıielt *E. Trefftz* folgenden Wert des Konzentrationskoeffizienten:

$$k = 1{,}74 \sqrt[3]{\frac{c}{r}}. \tag{9.28}$$

Bei den Werten $\frac{c}{r}$, die die Normalprofile aufweisen, stimmt die Formel (9.28) ·riedigend mit den experimentellen Daten überein. Im Fall von Querschnitten gleicher Dicke, z. B. von [- und I-Querschnitten, kann man die größte annung am Umriß τ_0 berechnen, indem man den rechten Teil der Gleichung 25) mit $c_2 G$ multipliziert:

$$\tau_0 = \frac{3 M_z c_2}{b_1 c_1^3 + 2 b_2 c_2^3}. \tag{9.29}$$

Dies folgt aus dem Vergleich der Gleichungen (9.23) und (9.24) miteinander, die erkennen lassen, daß die Spannung gleich dem relativen Drillwinkel multipliziert mit dem Elastizitätsmodul und der Dicke des Querschnitts ist.

Die Spannung τ_0 bezieht sich auf die Mitten der äußeren Flanschflächen der [- und I-Eisen. Zur Berechnung der Spannungen τ_{max} in den einspringenden Ecken kann man die Gleichungen (9.27) und (9.28) benutzen, indem man an Stelle von c die größte Dicke des Querschnitts einsetzt. Hier ist zu bemerken, daß für plastische Werkstoffe bei statischer Belastung die Spannungskonzentration in den einspringenden Ecken von keiner wesentlichen Bedeutung ist, da die Größe dieser Spannungen durch die Fließgrenze des Werkstoffs (vgl. Kapitel 2.07) begrenzt ist. Bei spröden Werkstoffen und bei wechselnder Belastung übt jedoch die Spannungskonzentration einen großen Einfluß auf die Festigkeit aus und muß daher berücksichtigt werden.

9.4 Berechnung von Schraubenfedern mit geringer Ganghöhe

A. Die Schraubenfeder stellt einen dünnen Stab von größtenteils rundem Querschnitt dar[1]), dessen Achse die Form einer Schraubenlinie hat. Trotz der verhältnismäßig komplizierten Form der Achse ist es nicht schwierig, auf elementarem Wege Formeln zur angenäherten Berechnung von Federn mit geringer Ganghöhe abzuleiten. Die Schraubenfedern werden als Waggonfedern und bei verschiedenen Maschinenelementen und Mechanismen angewandt. Bei einer Wirkung von Kräften, die längs der Achse der Feder gerichtet sind und diese ausziehen oder zusammendrücken, erleidet der Stab der Feder in der Hauptachse eine Drillung.

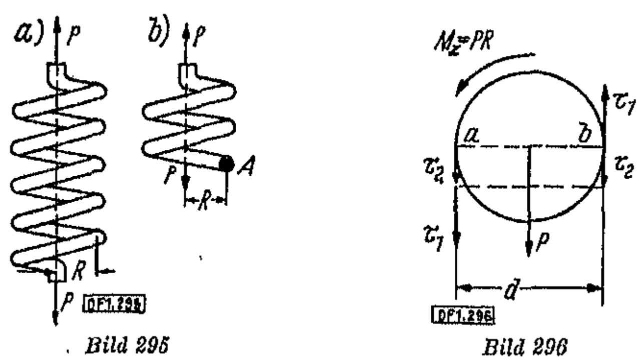


Bild 295 Bild 296

Um die Spannungen in einer zylindrischen Feder vom Radius R, die durch zwei Kräfte P (Bild 295) ausgezogen wird, zu ermitteln, zerschneiden wir an irgendeiner Stelle den Federstab mittels vertikaler, durch die Achse der Feder gehender Ebene (Bild 295, b) und entfernen den unteren Teil. Da die Achse des Stabes zur Waagerechten geneigt ist, so wird der Querschnitt die Form einer Ellipse aufweisen, aber wir werden ihn trotzdem als angenähert kreisförmig ansehen, indem wir annehmen, daß die Ganghöhe der Schraubenlinie genügend gering ist und die Neigung der Achse vernachlässigt werden kann.

[1]) Es kommt mitunter auch ein quadratischer und rechteckiger Querschnitt vor.

Die Wirkung des entfernten Teiles auf den oberen wird auf die Kraft P zurückgeführt, die längs der Achse der Feder nach unten gerichtet ist. Bei der parallelen Übertragung der Kraft P in die Mitte des Stabquerschnitts (Bild 296) tritt ein Kräftepaar $M_z = PR$ hinzu, das die Drillung bewirkt. Auf diese Weise werden die auf den entfernten Teil wirkenden äußeren Kräfte auf eine in der Mitte des Querschnitts wirkende Querkraft $Q = P$ und ein Drillmoment $M_z = PR$ zurückgeführt. Diese beiden Faktoren rufen im Querschnitt Schubspannungen hervor. Die größten Spannungen infolge der Drillung (am Umriß des Querschnitts) werden gleich:

$$\tau_1 = \frac{M_z}{W_p} = \frac{16\,PR}{\pi d^3}$$

sein, worin d der Durchmesser des Querschnitts ist.

Die Spannungen infolge der Querkraft erreichen ihren größten Wert τ_2 längs des horizontalen Durchmessers $a - b$ des Querschnitts, wo sie vertikal gerichtet sind. Nach der Formel (6.28) erhalten wir:

$$\tau_2 = \frac{4Q}{3F} = \frac{16\,P}{3\pi d^2}.$$

Der äußere Punkt a des Durchmessers ist als kritischer Punkt des Querschnitts anzusehen, da hier die Spannungen τ_1 und τ_2 der Richtung nach zusammenfallen und sich addieren. Die rechnerische Spannung wird

$$\tau_{max} = \tau_1 + \tau_2 = \frac{16\,PR}{\pi d^3}\left(1 + \frac{d}{3R}\right) = \frac{16\,PR}{\pi d^3}\left(1 + \frac{2}{3}\,\frac{d}{D}\right) \qquad (9.30)$$

sein, worin D der Durchmesser der Feder ist, d. h. der Durchmesser des Zylinders, in dem die Schraubenachse des Federstahls gelegen ist.

Bei kleinem Verhältnis $\frac{d}{D}$ kann man das zweite Glied in der Klammer als klein im Vergleich zu eins vernachlässigen, d. h. die Feder wird nur auf Drillung allein berechnet. Bei schweren Federn (bei Waggonfedern) ist der Einfluß der Querkraft auf die Spannungen bedeutend, da das Verhältnis $\frac{d}{D}$ in diesem Fall nicht klein ist:

B. Außer den Spannungen in der Feder ist es für praktische Zwecke erforderlich, auch die Verlängerung oder Zusammendrückung der Feder infolge der sie ausziehenden oder zusammendrückenden Kräfte berechnen zu können. Der Einfluß der Querkraft auf die Verlängerung ist nicht groß, daher wird gewöhnlich nur der Einfluß der Drillung der Windungen in die Berechnung aufgenommen.

Schneiden wir aus der Feder ein Element ds der Windung heraus (Bild 297), und untersuchen wir, wie sich der Angriffspunkt m der Kraft P infolge der Drillung dieses Elements verschiebt. Hierbei wollen wir alle übrigen Elemente der Feder als absolut starr ansehen. Zur Vereinfachung stellen wir den unteren Teil der Feder in der Form eines absolut starren rechtwinkligen Stabes mno dar, der den Punkt m mit dem Querschnitt A des Elements ds starr verbindet. Bei der Drillung des Elements ds wird sich der Querschnitt A um den Winkel $d\varphi$ drehen,

und der Punkt m wird sich in die Lage m' verschieben. Die vertikale Verschiebung des Punktes m ist:

$$mk = nn' = R\,d\varphi;$$

und da
$$d\varphi = \frac{M_z\,ds}{GJ_p} = \frac{PR\,ds}{GJ_p},$$

ist folglich
$$mk = \frac{PR^2}{GJ_p}\,ds.$$

Die gesamte Verlängerung der Feder ermittelt sich wie folgt:

$$\delta = \frac{PR^2}{GJ_p}\int_s ds = \frac{PR^2}{GJ_p}\,S. \tag{9.31}$$

Hier ist s die Länge der Schraubenachse des Federstahles[1]). Bei geringer Ganghöhe kann man diese Länge mit ausreichender Genauigkeit gleich $2\pi Rn$ annehmen, worin n die Anzahl der Federwindungen ist. Setzt man $J_p = \frac{\pi d^4}{32}$ ein, so erhalten wir folgende endgültige Formel der Verlängerung (Zusammendrückung) der Feder:

$$\delta = \frac{64\,PR^3 n}{Gd^4}. \tag{9.32}$$

Bild 297

Um die Formel leichter im Gedächtnis behalten zu können, sei auf Grund von (9.31) erwähnt, daß die Zusammendrückung gleich dem vollen Drillwinkel des Federstahles $\varphi = \frac{M_z s}{GJ_p}$ multipliziert mit dem Radius R der Feder ist.

Da die Federn genügend große elastische Verlängerungen liefern müssen, werden sie aus gehärtetem Stahl mit einer sehr hohen Proportionalitätsgrenze ausgeführt. Die zulässige Schubspannung τ_{zul} schwankt bei statischer Belastung von 3500 bis 5000 kg/cm² und ist für besonders widerstandsfähige Sonderstähle noch höher. Bei wechselnder Belastung wird die zulässige Spannung bedeutend herabgesetzt (um 30 bis 65%). Die Federn mit quadratischem und rechteckigem Querschnitt kann man auf die gleiche Weise berechnen, indem man das polare Widerstandsmoment W_p durch den Wert abc^2 und die Steifigkeit GJ_p durch die entsprechende Steifigkeit βbc^3G ersetzt.

[1]) Es ist nicht schwer zu erkennen, daß die Summe der Verschiebungen des Aufhängepunktes der Last gleich Null sein wird.

0 Zusammengesetzte Beanspruchung des geraden Balkens

0.1 Allgemeiner Fall der Kräftewirkung auf einen Balken Formel für die Normalspannung

A. Den allgemeinsten Fall der Wirkung von beliebigen Kräften auf den alken (Bild 298, a) kann man in drei Grundeinwirkungen zerlegen, die zu den runderscheinungen führen, die wir bisher untersucht haben:

1. Zug bzw. Druck,
2. Biegung,
3. Drillung (Torsion).

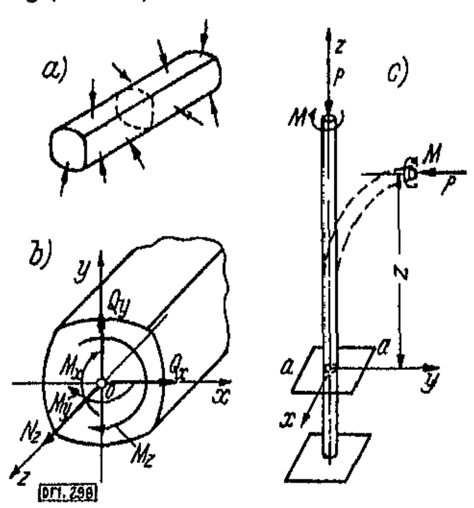


Bild 298

Führen wir an beliebiger Stelle einen Schnitt quer zur Balkenachse aus und ählen, nachdem der linke Teil des Balkens entfernt wurde, ein Koordinaten-stem auf folgende Weise. Den Koordinatenanfang ordnen wir im Schwerpunkt ›s Querschnitts an, die z-Achse richten wir längs der Achse des Balkens auf die ›ite des entfernten Teiles hin und der x- und y-Achse geben wir die Richtungen r *Hauptträgheitsachsen des Querschnitts*, indem wir ihre positiven Richtungen, ie in Bild 298, b dargestellt, wählen. Dieses Rechtsschraubensystem werden ir im weiteren benutzen, und für dieses werden die Vorzeichen der nach-ehenden Formeln zutreffen[1]).

[1]) Wenn man längs der z-Achse von ihrer positiven Richtung aus schaut, so befindet sich bei einem chtsschraubensystem die x-Achse rechts von der Halbierenden des Winkels xOy, aber bei einem ıksschraubensystem links davon.

Die äußeren Kräfte die die Wirkung des entfernten Teiles (in unserem Beispiel des linken Teiles) des Balkens auf den verbliebenen ersetzen, können im allgemeinsten Fall auf eine im Koordinatenanfang angreifende Kraft (auf den Hauptvektor) und ein Kräftepaar (auf das Hauptmoment) zurückgeführt werden. Projiziert man den Hauptvektor und das Hauptmoment (dargestellt in Form eines Vektors gemäß den Regeln der Statik) auf die Koordinatenachsen, so erhalten wir im allgemeinen Fall sechs Koordinatengleichungen, die die linken äußeren Kräfte bestimmen (Bild 298, b):

1. $\sum Z = N_z$ ist die axiale *Längskraft*,
2. $\sum Y = Q_y$ } sind die *Querkräfte* in den Hauptebenen yz
3. $\sum X = Q_x$ } und xz des Balkens,
4. $\sum M_x = M_x$ } sind die *Biegemomente* in den Hauptebenen
5. $\sum M_y = M_y$ } yz und xz,
6. $\sum M_z = M_z$ ist das *Drillmoment.*

Die im einzelnen infolge jeder der aufgezählten sechs Koordinatenzerlegungen der äußeren Kräfte im Querschnitt des Balkens auftretenden Kräfte sind schon in den vorhergehenden Kapiteln untersucht. Die Längskraft N_z (Zug- oder Druckkraft) und die Biegemomente M_x und M_y rufen Normalspannungen und die Querkräfte Q_x und Q_y sowie das Drillmoment M_z Schubspannung hervor.

Bezeichnen wir in der Folge alle Fälle als *zusammengesetzte Beanspruchung*, wenn die Kräfte im Querschnitt des Balkens in bezug auf unser Achsensystem nach mehr als einer Koordinatenachse bestimmt werden. Hieraus folgt, daß bei zusammengesetzter Beanspruchung in allen Fällen, wenn das Prinzip der Unabhängigkeit der Wirkungen der Kräfte anwendbar ist, wir die resultierende Spannung in einem beliebigen Punkt des Querschnitts durch einfache Addition der entsprechenden infolge jeder der sechs äußeren Kräftewirkungen hervorgerufenen Spannungen erhalten können. Hierbei werden selbstverständlich die Normalspannungen im gegebenen Punkt algebraisch und die verschiedene Richtungen aufweisenden Schubspannungen geometrisch addiert. Der Wert der resultierenden Schubspannung wird mittels der Gleichung

$$\tau = \sqrt{\tau_x^2 + \tau_y^2}$$

ermittelt, worin τ_x und τ_y die Summen der auf die Hauptachsen projizierten und zu addierenden Spannungen darstellen.

Genau so können die Verschiebungen und Formänderungen bei der zusammengesetzten Beanspruchung auf Grund des Prinzips der Addition (Superpositionsgesetz) erhalten werden, wenn sie nur genügend klein sind und keine merklichen Änderungen in bezug auf die gegenseitige Lage der äußeren Kräfte hervorrufen.

Inwieweit sich die Wirkung der Kräfte auf den Balken infolge seiner Formänderungen ändern kann, wird man an folgendem Beispiel (Bild 298, c) erkennen. Nehmen wir an, daß am oberen Ende eines geraden, mit dem unteren Ende eingespannten Stabes eine Druckkraft P und ein Drillmoment M wirken. Solange der Stab gerade bleibt, haben wir in einem beliebigen Querschnitt a—a desselben eine Normalkraft

$$N = P$$

und ein Drillmoment

$$M_z = M.$$

Wenn sich jedoch der Stab unter der Einwirkung irgendwelcher Ursachen in der Ebene yz krümmen und die durch die punktierte Linie gezeigte Lage einnehmen würde, so hätten wir im Querschnitt $a—a$

die Biegemomente $\begin{cases} M_y = M, \\ M_x = -Pz \end{cases}$

und die Querkraft $Q_y = -P.$

Demnach gehen der Druck und die Drillung im Querschnitt $a—a$ in eine reine Biegung um die y-Achse und eine Querbiegung um die x-Achse über. Es ist klar, daß sich hierbei auch die Spannungen im Stab vollständig ändern.

Hier ist das Beispiel einer sehr großen elastischen Formänderung angeführt, die nur bei einem sehr langen und dünnen Stab möglich ist. Man kann aber auch andere in der Praxis vorkommende Beispiele anführen, wo das Prinzip der Unabhängigkeit der Wirkungen nicht anwendbar ist, was die Berechnung stark erschwert. In Bild 312 (siehe weiter unten) ist ein Fall der Biegung und des Druckes eines dünnen Balkens dargestellt, bei dem die Längskräfte nicht nur die übliche Verkürzung hervorrufen, sondern auch eine wesentliche zusätzliche Biegung, da im Ergebnis der Durchbiegung infolge der Querbelastung die gebogene Balkenachse von der Wirkungslinie der Längskräfte bedeutend abweicht.

In einigen Fällen der zusammengesetzten Beanspruchung wirken die größten Normal- und Schubspannungen an irgendwie zum Querschnitt geneigten Flächenelementen (Ebenen). Dann muß man außer den resultierenden Spannungen im Querschnitt die Hauptflächenelemente (Hauptebenen) und Hauptspannungen ermitteln[1]).

Die in den vorhergehenden Kapiteln untersuchten Erscheinungen des Zugs bzw. des Drucks, der reinen Biegung und der Drillung gehören zu den einfachsten oder grundlegenden Fällen der Wirkung von äußeren Kräften auf einen Balken und sind dadurch gekennzeichnet, daß die Kräfte in einem beliebigen Querschnitt des Balkens nur durch einen Wert bestimmt werden (der axialen Längskraft, dem Biegemoment, dem Drillmoment).

Tatsächlich muß man sich fast immer mit komplizierteren Fällen befassen, bei denen die Kräfte im Querschnitt des Balkens durch mehrere Faktoren charakterisiert werden, die von den äußeren Kräften des entfernten Balkenteils abhängen. Nicht selten bedingen einige von diesen Faktoren im Balken Spannungen nebensächlichen Charakters, die man vernachlässigen kann, indem man sich mit der Ermittlung der Grundspannungen begnügt, die hinsichtlich der Festigkeit eine entscheidende Rolle spielen. So kann man z. B. bei der Berechnung von Balken auf Querbiegung in vielen Fällen die Überprüfung der Schubspannungen infolge der Wirkung der Querkraft unterlassen, indem man sich auf die Ermittlung der Normalspannungen infolge des Biegemoments beschränkt. Bei der Berechnung von Transmissionswellen auf Drillung braucht man in einigen Fällen die gleichzeitig mit der Drillung auftretende Biegung der Welle infolge des Eigengewichts nicht zu berücksichtigen, indem man entsprechende zulässige Spannungen wählt usw. Hierbei vereinfacht sich bedeutend die Berechnung des in Wirklichkeit unter den Bedingungen einer zusammengesetzten Beanspruchung arbeitenden Balkens.

[1]) Einen derartigen Fall hatten wir früher bei der Überprüfung der Hauptspannungen in Balken, die auf Biegung arbeiten.

In anderen Fällen spielen verschiedene Wirkungen der äußeren Kräfte hinsichtlich der Festigkeit die gleich wichtige Rolle, so daß man ihre gleichzeitige Wirkung berücksichtigen muß. Von den verschiedenen Kombinationen der Werte, die die Kräfte im Querschnitt des Balkens bestimmen, oder von den speziellen Arten der zusammengesetzten Beanspruchung sind folgende von großem praktischen Interesse:

1. *Zusammengesetzte* oder *schiefe Biegung*, die bei gleichzeitiger Wirkung von zwei Biegemomenten M_x und M_y in den Hauptebenen entsteht;
2. *Biegung mit Zug* oder *Druck*, wenn die Kräfte im Querschnitt auf eine Längskraft N und auf ein oder beide Biegemomente M_x und M_y zurückgeführt werden;
3. *Biegung mit Drillung*, wenn im Querschnitt Biegemomente und ein Drillmoment vorhanden sind.

In allen diesen Fällen können auch Querkräfte Q_x und Q_y vorhanden sein.

B. Im allgemeinen Fall der zusammengesetzten Beanspruchung hängen die Normalspannungen im Querschnitt des Balkens von drei Wirkungsarten der äußeren Kräfte ab: Von der Längskraft N und von den Biegemomenten M_x und M_y in bezug auf die Hauptachsen x und y des Querschnitts. Nehmen wir an, daß für irgendeinen Querschnitt des Balkens diese drei Kraftwirkungen positive Werte haben, d. h. die Längskraft ist eine Zugkraft und die Biegemomente haben die in Bild 299 dargestellten Drehrichtungen. Wählen wir dann im Querschnitt ein elementares Flächenelement dF, wobei wir dieses wegen der Allgemeinheit der Ableitung im ersten Quadranten der Ebene x, y abgrenzen, so werden die Koordinaten x und y des Flächenelements positiv sein. Die Richtung der auf das Flächenelement wirkenden Normalkraft σdF nehmen wir ebenfalls als positiv, d. h. als eine Zug ausübende Kraft an.

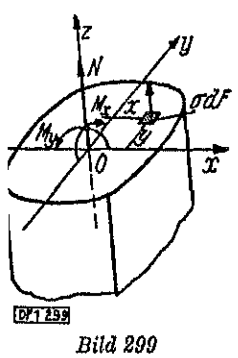


Bild 299

Die Statik bietet die Möglichkeit, folgende drei Bedingungen der Äquivalenz des Systems der Normalkräfte σdF zu den äußeren Kräften des entfernten Balkenteils aufzustellen:

$$\int_F \sigma dF = N, \tag{10.1}$$

$$-\int_F \sigma dF\, y = M_x, \tag{10.2}$$

$$\int_F \sigma dF\, x = M_y. \tag{10.3}$$

In diesen Gleichungen stellen die linken Teile die Projektion des Systems der Kräfte σdF auf die z-Achse und die Momente desselben um die Achsen x und y dar. Das Minuszeichen im linken Teil der Gleichung (10.2) ist dadurch zu erklären, daß für das gewählte Flächenelement dF das Moment der Kraft σdF um die x-Achse negativ ist (Bild 299), während $M_x > 0$ ist. Ähnliche Gleichungen, aber

nur bei anderer Lage der Koordinatenachsen, haben wir im Kapitel 6.01 beim Studium der reinen Biegung erhalten.

Wir stellen wie auch im Kapitel 6.01 fest, daß diese Gleichungen der Statik zur Ermittlung der Spannung σ nicht ausreichen. Um die Lösung dieser Aufgabe auf elementare Art zu Ende führen zu können, ohne den komplizierten Apparat der Elastizitätstheorie einzuführen, kann man folgende zwei Wege beschreiten:

1. Man kann sich der Untersuchung der geometrischen Seite der Aufgabe zuwenden und, indem man in bezug auf die Formänderungen wahrscheinliche, durch den Versuch bestätigte Annahmen (Hypothesen) macht, mit Hilfe des Hookeschen Gesetzes zu den Spannungen übergehen. Auf diese Weise sind wir nämlich bei der Untersuchung der Biegung von Balken vorgegangen, indem wir die Hypothese von *Bernoulli* einführten.
2. Man kann unmittelbar eine Hypothese über dieses oder jenes Gesetz der Verteilung der Spannungen σ annehmen, d. h. eine Form der Normalspannungsflächen voraussetzen.

Den zweiten Weg ging *Navier*, indem er die Hypothese darüber aufstellte, daß *im Querschnitt eines geraden Balkens die Normalspannungsfläche immer irgendeine Ebene ist:*

$$z = Ax + By + C.$$

Trägt man die Normalspannung σ in allen Punkten des Querschnitts in Form von Vektoren ab, so kann die Gleichung der Ebene, auf der die Endpunkte der Vektoren liegen, wie folgt aufgeschrieben werden:

$$\sigma = Ax + By + C. \tag{10.4}$$

Demnach setzt die Hypothese von *Navier* eine lineare Abhängigkeit der Spannung σ von den Koordinaten x und y des Querschnittspunktes voraus. Mit Hilfe dieser Hypothese wird die unendliche Anzahl der unbekannten Spannungen σ im Querschnitt auf zunächst drei unbekannte Koeffizienten der Formel (10.4) zurückgeführt, die man aus den drei Gleichungen der Statik (10.1), (10.2) und (10.3) finden kann. Auf diese Weise spielt hier die Hypothese von *Navier* die gleiche Rolle, wie die Hypothese von *Bernoulli* in der Aufgabe zur Ermittlung der Spannungen bei der Biegung.

Gehen wir zur Ermittlung der Koeffizienten A, B und C über. Setzt man den Ausdruck σ aus (10.4) in (10.1), (10.2) und (10.3) ein, so erhalten wir:

$$\int_F (Ax + By + C)\,dF = N,$$

$$\int_F (Ax + By + C)\,dFy = -M_x,$$

$$\int_F (Ax + By + C)\,dFx = M_y.$$

Löst man die Klammern auf, so finden wir:

$$\left.\begin{aligned} A\int x\,dF + B\int y\,dF + C\int dF &= N,\\ A\int xy\,dF + B\int y^2\,dF + C\int y\,dF &= -M_x\\ A\int x^2\,dF + B\int xy\,dF + C\int x\,dF &= M_y. \end{aligned}\right\} \tag{10.5}$$

Da die Achsen x und y bedingungsgemäß die Hauptzentralachsen des Querschnitts sind, so ist:

$$\int x\,dF = 0,\quad \int y\,dF = 0 \quad \text{und} \quad \int xy\,dF = 0.$$

Außerdem sind $\int y^2\,dF = J_x$ und $\int x^2\,dF = J_y$ die Hauptträgheitsmomente des Querschnitts, und $\int dF = F$ ist die Fläche des Querschnitts. Führt man diese Werte in die Gleichungen (10.5) ein und löst man sie, so finden wir die Koeffizienten A, B und C:

$$C = \frac{N}{F},\quad B = -\frac{M_x}{J_x} \quad \text{und} \quad A = \frac{M_y}{J_y}. \tag{10.6}$$

Setzt man diese Werte der Koeffizienten in (10.4) ein, so erhalten wir die allgemeinste Formel der Normalspannung im Querschnitt des geraden Balkens:

$$\sigma = \frac{M_y}{J_y}x - \frac{M_x}{J_x}y + \frac{N}{F}.\text{[1]} \tag{10.7}$$

Alle drei Glieder dieser Formel sind uns aus den vorhergehenden Kapiteln bekannt. Das dritte Glied drückt die Spannung infolge des Zuges bzw. Druckes eines Balkens durch eine zentral angreifende axiale Kraft N aus. Das zweite Glied gibt die Biegespannung des Balkens in der Ebene yz durch das in dieser Ebene wirkende Moment M_x an. Das erste Glied entspricht der Biegung in der Ebene xz.

Es ist augenscheinlich, daß wir die Formel (10.7) hätten erhalten können, ohne die Hypothese von *Navier* einzuführen, wenn die grundlegenden Formeln des einfachen Zuges bzw. Druckes sowie der Biegung und das Gesetz der Unabhängigkeit der Wirkungen benutzt worden wären. Hierbei hätte sich die Ableitung auf die Hypothese von *Bernoulli* über die ebenen Querschnitte gestützt, die bei der Ableitung der grundlegenden Abhängigkeiten der Biegung angenommen wurde. Sie trifft selbstverständlich auch für den Fall des einfachen Zuges bzw. Druckes zu.

Demzufolge erweisen sich die Hypothesen von *Navier* und *Bernoulli* für den geraden Balken als äquivalent:

Die Annahme einer von diesen zieht als Folge die andere nach sich.

10.2 Schiefe Biegung. Nullinie. Ermittlung der Durchbiegungen

A. Wenn die nach dem Zerschneiden auf den entfernten Teil des Balkens wirkenden äußeren Kräfte auf zwei Momente M_x und M_y in bezug auf die Hauptachsen x und y des Querschnitts zurückgeführt werden (Bild 299), so erleidet der Balken eine gleichzeitige Biegung in beiden Hauptebenen. Ein derartiger Spannungszustand wird *zusammengesetzte* oder *schiefe Biegung* genannt.

Setzt man in (10.7) $N = 0$, da gemäß den Bedingungen der Aufgabe eine Längskraft nicht vorhanden ist, so erhalten wir folgende Formel der Normalspannung in einem beliebigen Punkte (x, y) des Querschnitts bei der zusammengesetzten Biegung:

$$\sigma = \frac{M_y}{J_y}x - \frac{M_x}{J_x}y. \tag{10.8}$$

---

[1] Wir erinnern daran, daß die Vorzeichen des rechten Teils für das von uns angenommene Rechtsschraubensystem der Koordinatenachsen zutreffen.

Geht man von dieser Formel aus, so kann man leicht den Begriff der Spannungsverteilung über den Querschnitt festlegen. Da die Fläche der Normalspannungen eine Ebene ist, so schneidet sie sich mit der Ebene des Querschnitts auf einer Geraden. In jedem Punkt dieser Geraden ist die Spannung σ gleich Null, und deshalb heißt sie die *Nullinie*. Die Gleichung der Nullinie erhalten wir aus der Formel (10.8), indem wir in dieser $\sigma = 0$ setzen:

$$\frac{M_y}{J_y} x - \frac{M_x}{J_x} y = 0. \tag{10.9}$$

Diese Gleichung zeigt, daß die Nullinie durch den Koordinatenanfang geht, d. h. durch den Schwerpunkt des Querschnitts. Demnach teilt sie den Querschnitt in zwei Teile, wobei in einem von diesen Zugspannungen und in dem anderen Druckspannungen wirken. Die größten Spannungen dem absoluten Wert nach ergeben sich in den von der Nullinie am weitesten entfernten Punkten des Querschnitts. Die Lage der Nullinie wird am günstigsten durch ihren Winkelkoeffizienten bestimmt:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{y}{x} = \frac{M_y}{M_x} \cdot \frac{J_x}{J_y}. \tag{10.10}$$

Zieht man die Nullinie unter dem Winkel α zur x-Achse, so finden wir die am stärksten angespannten Punkte des Querschnitts. Setzt man die Koordinaten dieser Punkte in die Formel (10.9) ein, so finden wir die größten Zug- und Druckspannungen im Querschnitt. Die Werte der Biegemomente M_x und M_y und der Koordinaten x und y muß man selbstverständlich mit den entsprechenden Vorzeichen einsetzen.

B. Als ebene schiefe Biegung bezeichnet man den Fall der Biegung, bei dem die Querbelastung des Balkens in einer mit den Hauptebenen des Balkens xOz und yOz nicht zusammenfallenden Ebene gelegen ist.

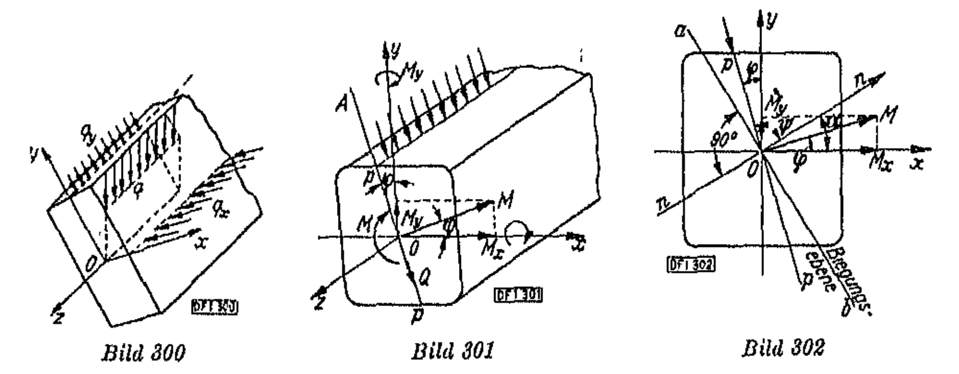


Bild 300 *Bild 301* *Bild 302*

Zur Benutzung der Formel (10.9) muß man die gegebene Belastung q in zwei in den Hauptebenen liegende Belastungskomponenten q_x und q_y zerlegen und alsdann das in der Ebene Oyz wirkende und durch die Belastung q_y hervorgerufene Biegemoment M_x sowie das in der Ebene Oxz wirkende und durch die Belastung q_x hervorgerufene Biegemoment M_y berechnen (Bild 300). Man kann

auch die Methode der Zerlegung der Resultierenden des Biegemoments in ihre Komponenten anwenden.

Wenn man nach dem Zerschneiden den linken Teil des Balkens entfernt hat, so ersetzen wir seine Wirkung durch ein Moment M und eine Querkraft Q, die in der Kraftebene AOz liegen, deren Spur $p-p$ auf der Querschnittsebene wir mit *Kraftlinie* bezeichnen (Bild 301).

Indem wir das Moment M gemäß den Regeln der Statik vom Punkte O senkrecht zur Kraftebene in Form eines Vektors abtragen, zerlegen wir es darauf in zwei Komponenten längs der Achsen x und y. Das werden auch die von uns benötigten Biegemomente

$$M_x = M \cos \varphi \quad \text{und} \quad M_y = M \sin \varphi$$

sein, worin φ den Neigungswinkel des Vektors M zur x-Achse (oder, was dasselbe ist, den Neigungswinkel der Kraftlinie zur y-Achse) darstellt. Setzt man diese Werte M_x und M_y in die Gleichung (10.10) ein, so erhalten wir:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{J_x}{J_y} \operatorname{tg} \varphi. \tag{10.11}$$

Da im allgemeinen $J_x = J_y$, so folgt aus der Formel (10.11), daß der Neigungswinkel α der Nullinie nicht gleich φ ist. Demzufolge schließt bei der schiefen Biegung zum Unterschied von der einfachen Biegung die Nullinie und die Kraftlinie einen vom rechten Winkel sich unterscheidenden Winkel φ ein. In dem Sonderfalle, wenn die Hauptträgheitsmomente einander gleich sind, werden alle Achsen des Querschnitts Hauptachsen sein, und der Balken wird bei beliebiger Lage der Wirkungsebene der Kräfte eine einfache Biegung in der gleichen Ebene erleiden, wobei die Nullinie zur Kraftlinie senkrecht stehen wird.

Da die Richtung der Nullinie in einem Balken mit konstantem Querschnitt gemäß (10.11) nur von der Richtung der Kraftebene abhängt, so werden die Nullinien aller Querschnitte des Balkens untereinander parallel sein. Bei der schiefen Biegung behält aber die Hypothese von *Bernoulli* ihre Gültigkeit. Folglich wird die Formänderung des Balkens wie auch bei der einfachen Biegung von einer Drehung jedes Querschnitts um seine Nullinie begleitet sein. Da die Nullinien aller Querschnitte parallel sind, so wird die Krümmung der Balkenachse in einer Ebene $a-b$ senkrecht zur Richtung der Nullinie $n-n$ vor sich gehen (Bild 302). Diese Ebene heißt die *Biegungsebene*.

Auf diese Weise wird die Richtung der Durchbiegungen bei der schiefen Biegung durch die Gerade $a-b \perp n-n$ bestimmt. Die Werte der Durchbiegungen finden wir leicht, indem wir die Gesamtbiegung in der Ebene $a-b$ in zwei Biegungen in den Hauptebenen yOz und xOz zerlegen. Bezeichnet man die Durchbiegung in Richtung der y-Achse wie früher mit v und die Durchbiegung in Richtung der x-Achse mit u, so können wir für diese beiden Biegungen die Differentialgleichungen aufschreiben:

$$\left.\begin{aligned} EJ \frac{d^2 u}{dz^2} &= M_y, \\ EJ \frac{d^2 v}{dz^2} &= M_x. \end{aligned}\right\} \tag{10.12}$$

Integriert man diese, so finden wir die Komponenten der Durchbiegung u und v. Benutzt man die graphoanalytische Methode, so finden wir u und v nach den Formeln

$$\left.\begin{aligned} u &= \frac{\overline{M}_y}{EJ_y}, \\ v &= \frac{\overline{M}_x}{EJ_x}. \end{aligned}\right\} \qquad (10.13)$$

Hier bezeichnen $\overline{M}_x = \overline{M} \cos \varphi$ und $\overline{M}_y = \overline{M} \sin \varphi$ die Projektionen des fiktiven Biegemoments auf die Hauptachsen.

Kennt man u und v, so ist es nicht schwer, den Wert der resultierenden Durchbiegung $|\mathfrak{u}| = \sqrt{u^2 + v^2}$ sowie ihre Komponente in beliebiger Richtung zu finden, z. B. die vertikale oder horizontale Verschiebung eines Punktes der Balkenachse bei geneigter Lage der Hauptachsen (Bild 303).

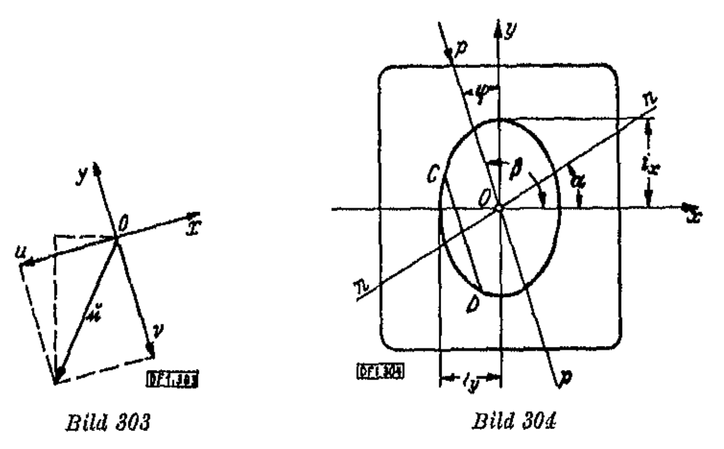


Bild 303 *Bild 304*

C. Vermerken wir noch eine interessante Abhängigkeit zwischen der Kraft- und der Nullinie. Nehmen wir in der Formel (10.11)

$$J_x = i_x^2 F \quad \text{und} \quad J_y = i_y^2 F$$

an, worin i_x und i_y die Hauptträgheitsradien sind. Außerdem führen wir an Stelle des Winkels φ den Neigungswinkel β der Kraftlinie zur x-Achse ein (Bild 304):

$$\beta = 90^\circ + \varphi \quad \text{und} \quad \operatorname{tg} \varphi = -\frac{1}{\operatorname{tg} \beta}.$$

Setzt man alles in (10.11) ein, so erhalten wir nach Kürzung durch F:

$$\operatorname{tg} \alpha = -\frac{i_x^2}{i_y^2 \operatorname{tg} \beta}$$

oder

$$\operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta = -\frac{i_x^2}{i_y^2}. \qquad (10.14)$$

In der analytischen Geometrie wird folgende Abhängigkeit zwischen den Winkelkoeffizienten $\operatorname{tg}\alpha$ und $\operatorname{tg}\beta$ der konjugierten Durchmesser der Ellipse bewiesen:

$$\operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta = -\frac{b^2}{a^2},$$

worin a und b die Halbachsen der Ellipse sind. Vergleicht man dies mit (10.14), so erkennen wir, daß die Kraft- und die Nullinie als konjugierte Durchmesser der Trägheitsellipse anzusehen sind, deren Halbachsen (Kapitel 4.08) entsprechend

$$b = i_x \quad \text{und} \quad a = i_y$$

sind.

Wenn folglich für den Querschnitt eine Trägheitsellipse gezeichnet ist, so kann man leicht die in einer beliebigen Richtung der Kraftlinie entsprechende Nullinie n—n graphisch auf nachstehende Weise finden (Bild 304).

Wir ziehen die Sehne CD parallel zur Kraftlinie p—p und teilen sie zur Hälfte. Die Nullinie n—n wird dann durch den Koordinatenanfang und die Mitte der Sehne gehen.

10.3 Berechnung von Balken bei schiefer Biegung. Biegung des Balkens durch Kräfte, die nicht in einer Ebene liegen

A. Bei der Berechnung der Balken auf schiefe Biegung muß man zuerst den gefährdeten Querschnitt ausfindig machen, in dem das Biegemoment das Maximum erreicht.

Der Umstand, daß bei der schiefen Biegung die Wirkungsebene der Belastung zu den Hauptebenen des Balkens geneigt ist, wirkt sich selbstverständlich in keiner Weise auf die Aufgabe der Auffindung des gefährdeten Querschnitts aus. Diese Aufgabe wird mit Hilfe der gleichen Verfahren, die im Abschnitt 4 für die einfache Biegung (Konstruktion der M-Linie) angegeben sind, gelöst. Ferner muß man im gefährdeten Querschnitt die am stärksten angespannten Punkte finden und ihre Spannungen ermitteln. Die am stärksten angespannten Punkte im Querschnitt werden die von der Nullinie am weitesten entfernten Punkte sein, folglich muß man zu ihrer Ermittlung vorher die Richtung der Nullinie festlegen.

Es ist offensichtlich, daß im Querschnitt im allgemeinen zwei gefährdete Punkte vorhanden sind:

In einem von diesen wirkt die größte Zugspannung und in dem anderen die größte Druckspannung. Wenn die zulässigen Spannungen des Balkenmaterials auf Zug und Druck die gleichen sind, so genügt es, die Spannung nur in einem Punkt zu überprüfen, in dem der zahlenmäßige Wert der Spannung der größte ist.

Der Gang der Berechnung ist folgender:

Indem wir das resultierende Moment M_{max} in die Momente M_x und M_y in bezug auf die Hauptachsen zerlegen und die Koordinaten x und y der am stärksten angespannten Punkte in bezug auf die gleichen Achsen an Hand der Zeichnung ausmessen oder berechnen, finden wir die größte Spannung nach der Formel (10.8).

In einigen speziellen Fällen von symmetrischen Querschnitten vereinfacht sich die Ermittlung der größten Spannungen bedeutend. Untersuchen wir z. B. einen rechteckigen Querschnitt (Bild 305). Es ist klar, daß die größten Spannungen

unabhängig von der Lage der Nullinie $n-n$ immer in den Ecken des Rechtecks auftreten werden. Nehmen wir z. B. an, daß die Belastung in der Ebene $p-p$ wirkt, so daß die Momente M_x und M_y in bezug auf die Hauptachsen beide positiv sind. Das Moment M_x ruft die größten Zugspannungen in den unteren Fasern des Querschnitts und die größten Druckspannungen in den oberen Fasern hervor, was in Bild 305 vereinbarungsgemäß durch die Zeichen (+) und (−) dargestellt ist. Der Wert dieser Spannungen ist folgender:

$$\sigma'_{\substack{\max\\\min}} = \pm \frac{M_x}{W_x}.$$

Analog ruft das Moment M_y den größten Zug in den äußersten rechten Fasern und den größten Druck in den äußersten linken Fasern hervor:

$$\sigma''_{\substack{\max\\\min}} = \pm \frac{M_y}{W_y}.$$

Bei gleichzeitiger Wirkung beider Momente werden sich die größten Spannungen σ' und σ'' in den Punkten A und B arithmetisch addieren und in den Punkten C

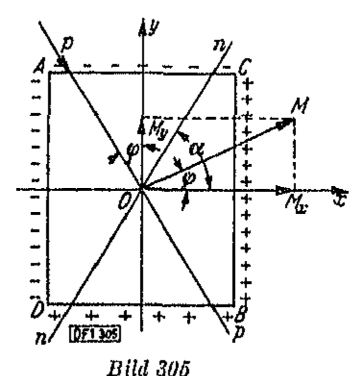


Bild 305

und D subtrahieren. Folglich werden A und B die gefährlichen Punkte sein. Der absolute Wert der größten Spannung ermittelt sich nach der Formel

$$\sigma_{\max} = \frac{M_x}{W_x} + \frac{M_y}{W_y}. \tag{10.15}$$

Diese Formel ist offenbar bei allen Querschnitten anwendbar, die sich so in ein Rechteck einzeichnen lassen, daß die äußersten vier Punkte des Querschnitts mit den Winkeln des Rechtecks zusammenfallen, z. B. bei den I-, [- und anderen Querschnitten, die in Bild 306 dargestellt sind und in der Praxis oft vorkommen.

In den anderen Fällen muß man die Formel (10.8) benutzen, indem man vorher die Richtung der Nullinie und die Werte des am stärksten angespannten Punktes des Querschnitts ermittelt. Bei der schiefen Biegung infolge einer Querbelastung wirken im Balkenquerschnitt neben den Biegemomenten M_x und M_y im größten Teil der Fälle auch Querkräfte Q_x und Q_y, die Schubspannungen hervorrufen. Die Ermittlung der Komponenten der Schubspannungen wird nach der gleichen Formel $\tau = \dfrac{QS}{Jb}$ wie im Falle der einfachen Querbiegung durchgeführt.

Wir erinnern daran, daß die hier aufgeführte Berechnungsart, streng genommen, für die reine schiefe Biegung Gültigkeit hat. Bei Vorhandensein von Schubspannungen im Querschnitt behalten die Ergebnisse ihre Gültigkeit nur bei Querschnitten, bei denen das Biegezentrum (Schubmittelpunkt) mit dem Schwerpunkt zusammenfällt, d. h. in der Hauptachse bei Querschnitten mit zwei Symmetrieachsen.

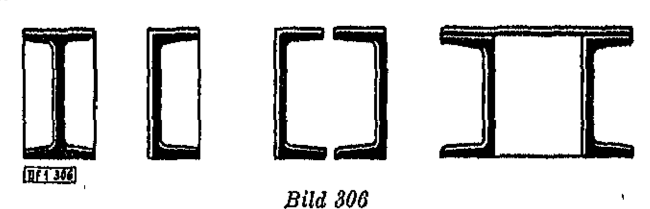


Bild 306

B. Die Aufgabe der Wahl des Querschnitts bei der schiefen Biegung ist komplizierter als bei der einfachen Querbiegung. Ersetzt man auf Grund der gegebenen Belastung und des Neigungswinkels φ der Kraftlinie zur y-Achse das resultierende Moment M_{max} durch seine Komponenten M_x und M_y und setzt man in der Formel (10.8) $\sigma = \sigma_{b_{zul}}$ (der zulässigen Spannung auf Biegung), so erhalten wir:

$$\sigma_{b_{zul}} \geqq \frac{M_y}{J_y} x - \frac{M_x}{J_x} y$$

mit den vier Unbekannten J_x, J_y, x und y, worin x und y die Werte des am stärksten angespannten Punktes des Querschnitts sind.

Zur Lösung der Aufgabe muß man im voraus ein zweckmäßiges Verhältnis der Trägheitsmomente $\frac{J_x}{J_y}$ annehmen und den Querschnitt durch Probieren wählen. Bei rechteckigen Querschnitten und solchen, die sich in ein Rechteck einzeichnen lassen (Bild 306), vereinfacht sich die Wahl des Querschnitts, da man in diesem Fall die Formel (10.15) benutzen kann. Nimmt man das Verhältnis $\frac{W_x}{W_y}$ an, so kommen wir zu einer Gleichung mit einer Unbekannten und werden die Aufgabe leicht zu Ende führen. Zu erwähnen ist, daß bei einem rechteckigen Querschnitt das Verhältnis der Widerstandsmomente $\frac{W_x}{W_y}$ gleich dem Verhältnis der Seiten des Rechtecks $\frac{h}{b}$ ist, das man auch im voraus wählen kann:

$$\frac{W_x}{W_y} = \frac{b h^2}{6} : \frac{h b^2}{6} = \frac{h}{b}.$$

Bei den gewalzten Querschnitten, z. B. bei den [- und I-Eisen, hängt das Verhältnis der Widerstandsmomente $\frac{W_x}{W_y}$ von der Profilnummer ab und ändert sich in recht weiten Grenzen. So ändert sich z. B. für I-Normalprofile dieses Verhältnis von 5 (Nr. 10) bis 11,7 (Nr. 40a) und mehr[1]). Bei der Wahl von [- und I-Querschnitten (z. B. von Dachpfetten aus Stahl, die durch schiefe Biegung

[1]) *Anm. d. deutschen Redaktion:* Bei den deutschen I-Normalprofilen schwanken die Verhältnisse zwischen 6,5 und 10,7.

beansprucht werden, muß man das Verhältnis $\frac{W_x}{W_y}$ in den angegebenen Grenzen bei Berücksichtigung der Belastung und der Stützweite der Pfette wählen, alsdann die Spannungen in dem gewählten Querschnitt überprüfen und diesen notfalls ändern[1]).

C. *Beispiele*

Beispiel 55

Es ist ein [-Querschnitt für Dachpfette zu wählen, die in den Knotenpunkten des Obergurtes eines Dachbinders aus Stahl angeordnet sind (Bild 307, a). Der Abstand der Pfetten in horizontaler Richtung ist $a = 1{,}8$ m, und die Stützweite der Pfetten, d. h. der Abstand der benachbarten Binder ist $l = 5{,}0$ m. Der Neigungswinkel des Obergurtes des Binders zur Horizontalebene ist $\varphi = 20°$. Die vertikale Belastung infolge Eigengewicht des Daches und des Schnees auf die Grundflächeneinheit ist $p = 170$ kg/m². Die zulässige Spannung ist $\sigma_{b_{zul}} = 1600$ kg/cm² (Ст. 3).

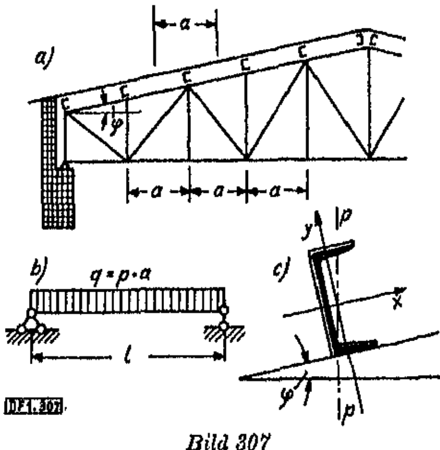


Bild 307

Jede Pfette trägt einen Belastungsstreifen von der Breite $a = 1{,}8$ m. Folglich ist die Größe der Belastung je Meter Pfettenlänge:

$$q = pa = 170 \cdot 1{,}8 = 306 \text{ kg/m}.$$

Das Berechnungsschema der Pfette ist in Bild 307, b dargestellt. Das größte Biegemoment in der Mitte der Öffnung ist:

$$M_{max} = \frac{ql^2}{8} = \frac{306 \cdot 5^2}{8} = 956 \text{ kgm}.$$

Zerlegen wir dieses in der vertikalen Ebene $p-p$ (Bild 307, c) wirkende Moment in die auf die Hauptachsen x und y bezogenen Momente:

$$M_x = M \cos 20° = 956 \cdot 0{,}94 = 899 \text{ kgm},$$
$$M_y = M \sin 20° = 956 \cdot 0{,}342 = 327 \text{ kgm}.$$

---

[1]) Gewöhnlich nimmt man als erste Annäherung bei I-Trägern das Verhältnis $\frac{W_x}{W_y}$ gleich 8,5 ··· 10 und bei [-Trägern gleich 6···8 an. Zur Erleichterung der Wahl der Querschnitte von Unterzügen sind sehr bequeme graphische Darstellungen aufgestellt [siehe Промстройпроект — Справочник по металлическим конструкциям, ОНТИ, 1937 (Promstroiprojekt — Handbuch für Metallkonstruktionen, ONTI, 1937)].

Zur Wahl des Querschnitts nehmen wir das Verhältnis $\frac{W_x}{W_y} = 7$ an und setzen es in die Formel (10.15) ein:

$$\sigma = \frac{M_x}{W_x} + \frac{M_y}{W_y} = \frac{M_x + 7\,M_y}{7\,W_y}.$$

Hieraus finden wir, indem wir $\sigma = \sigma_{b_{zul}} = 1600$ kg/cm² setzen,

$$W_y = \frac{M_x + 7 M_y}{7\,\sigma_{b_{zul}}} = \frac{89\,900 + 7 \cdot 32\,700}{7 \cdot 1600} = 28{,}5 \text{ cm}^3.$$

Von den [-Eisen eignet sich Nr. 22 a am besten, mit $W_y = 28{,}49\,\text{cm}^3$ und $W_x = 223{,}4\,\text{cm}^3$.[1]) Die Nachprüfung der Spannung ergibt:

$$\sigma = \frac{89\,900}{223{,}4} + \frac{32\,700}{28{,}5} = 1547 < 1600 \text{ kg/cm}^2.$$

Die Unterbeanspruchung beträgt 3,3%, so daß der gewählte Querschnitt als zweckmäßig beibehalten werden kann.

Die angeführte Berechnung berücksichtigt nicht die zusätzliche Drillung, die dadurch entsteht, daß die Belastung nicht durch das Biegezentrum (Schubmittelpunkt) des [-Eisens geht. Eine derartige Berechnung kommt jedoch in der Praxis zur Anwendung, da die durch die Drillung hervorgerufenen zusätzlichen Normalspannungen die Grundspannung der Biegung im gefährlichen Punkt des [-Querschnitts vermindern.

Beispiel 56

Ein Kragträger mit einem ꓶ-Querschnitt von der Stützweite $l = 2{,}0$ m ist am Ende mit einer vertikalen Last $P = 250$ kg belastet (Bild 308, a). Der Querschnitt (ꓶ-Eisen

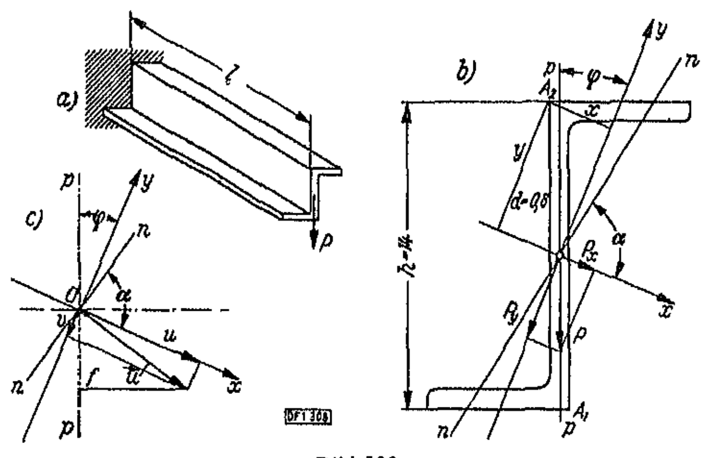


Bild 308

Nr. 14, OCT 29, Ausgabe 1926) ist in Bild 308, b dargestellt und hat die Trägheitsmomente $J_x = 847$ cm⁴ und $J_y = 61{,}4$ cm⁴[2]). Der Neigungswinkel der Hauptachse y zur Stegachse $-p$ ist $\varphi = 21°\,48'$. Das Material ist Cт. Oc. Die Spannungen sind zu überprüfen, und die ertikale Durchbiegung des Endes des Kragträgers ist zu bestimmen.

---

[1]) *Anm. d. deutschen Redaktion:* Von den deutschen Profilen paßt am ehesten [22 mit $W_x = 245$ cm³ nd $W_y = 33{,}6$ cm³.

[2]) *Anm. d. deutschen Redaktion:* Ein entsprechendes deutsches Profil ist nicht bekannt. Nach IN 1027 hat das Profil ꓶ 14 folgende Trägheitsmomente: $J_x = 676$ cm⁴; $J_y = 148$ cm⁴; ($J_\xi = 768$ cm⁴ nd $J_\eta = 56{,}4$ cm⁴). Der Winkel φ beträgt 71° 6'.

Der gefährdete Querschnitt befindet sich an der Einspannungsstelle. Indem wir die Last P in die Komponenten längs der Hauptachsen (x, y) zerlegen, finden wir für den erwähnten Querschnitt:

$$M_x = -P_y l = -Pl\cos\varphi = -250 \cdot 0{,}928 \cdot 200 = -232 \cdot 200 = -46400 \text{ kgcm},$$
$$M_y = -P_x l = -Pl\sin\varphi = -250 \cdot 0{,}371 \cdot 200 = -93 \cdot 200 = -18600 \text{ kgcm}.$$

Bestimmen wir den Neigungswinkel der Nullinie zur Hauptachse x des Querschnitts:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{J_x}{J_y}\operatorname{tg}\varphi = \frac{847}{61{,}4} \cdot 0{,}4 = 5{,}52, \qquad \alpha = 79^\circ\, 44'.$$

Trägt man die Nullinie n—n in die Zeichnung ein, so sehen wir, daß sich die größte Spannung in den am weitesten von der Nullinie entfernten Punkten A_1 und A_2 des Querschnitts ergeben. Die Koordinaten dieser Punkte in bezug auf die Hauptachsen sind:

$$x = \pm 2{,}97 \text{ cm (ist in der Tafel OCT 29 angegeben)}$$

$$y = \pm\left(\frac{h}{2}\cos\varphi - \frac{d}{2}\sin\varphi\right) = \pm(7 \cdot 0{,}928 - 0{,}4 \cdot 0{,}371) = \pm 6{,}35 \text{ cm}.$$

Die Spannung im Punkte $A_2(-2{,}97; +6{,}35)$ ist:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_y x}{J_y} - \frac{M_x y}{J_x} = \frac{18600 \cdot 2{,}97}{61{,}4} + \frac{46400 \cdot 6{,}35}{847} = 1248 \text{ kg/cm}^2,$$

die den zulässigen Wert für CT. Oc nicht übersteigt.

Zur Ermittlung der vertikalen Durchbiegung des Endes des Kragträgers finden wir zuerst die Durchbiegungen u und v in den Hauptebenen, indem wir die Formel (7.17) anwenden:

$$u = \frac{P_x l^3}{3EJ_y} = \frac{93 \cdot 200^3}{3 \cdot 2 \cdot 10^6 \cdot 61{,}4} = 2{,}02 \text{ cm},$$

$$v = -\frac{P_y l^3}{3EJ_x} = -\frac{232 \cdot 200^3}{3 \cdot 2 \cdot 10^6 \cdot 847} = -0{,}37 \text{ cm}.$$

Die resultierende Durchbiegung $\mathfrak{u}$ sei:

$$|\mathfrak{u}| = \sqrt{u^2 + v^2} = \sqrt{2{,}02^2 + 0{,}37^2} = 2{,}05 \text{ cm}.$$

Die Richtung des Vektors $\mathfrak{u}$ bestimmt die Biegungsebene des Kragträgers. Die vertikale Durchbiegung des Endes der Konsole ist:

$$f = \mathfrak{u}\cos(\alpha - \varphi) = 2{,}05\cos(79^\circ\,44' - 21^\circ\,48') = 2{,}05 \cdot 0{,}644 = 1{,}32 \text{ cm}.$$

Es ist zu beachten, daß im vorliegenden Beispiel der Winkel α viel größer als der Winkel φ ist und die Biegungsebene sich der Ebene der geringsten Steifigkeit Ox des Querschnitts nähert (Bild 308, c). Dies ist eine Folge des großen Unterschiedes in der Größe der Trägheitsmomente J_x und J_y. Die Ergebnisse der Berechnung kann man praktisch als genau ansehen, da das Biegezentrum (Schubmittelpunkt) des ⅂-Querschnitts mit dem Schwerpunkt zusammenfällt, durch den gemäß der Bedingung der Aufgabe die Kraft P geht.

D. Bei der Untersuchung der schiefen Biegung wurde angenommen, daß die auf den Balken wirkende Belastung in einer mit den Hauptebenen des Balkens nicht zusammenfallenden Ebene liegt. Hierbei liegt die gerade und gebogene Balkenachse ebenfalls in einer zur neutralen Faserschicht senkrechten Ebene (Biegungsebene). Es kommen aber in der Praxis auch solche Fälle vor, in denen die den Balken auf Biegung beanspruchenden Kräfte nicht in einer Ebene liegen

(z. B. bei der Biegung von Wellen). In diesen Fällen muß man die Belastung in die in den Hauptebenen liegenden Komponenten zerlegen und die einzelnen Momentenlinien M_x und M_y zeichnen.

Nehmen wir z. B. an, daß auf einen Balken auf zwei Stützen zu seiner Achse senkrechte Kräfte P_1, P_2 und P_3 wirken, die nicht in einer Ebene liegen (Bild 309, a), sondern mit der Hauptachse y die Winkel φ_1, φ_2 und φ_3 einschließen.

Zerlegen wir die Kräfte in die Komponenten $P_1 \cos \varphi_1$, $P_2 \cos \varphi_2$ und $P_3 \cos \varphi_3$, die in der xy-Hauptebene liegen, und in die Komponenten $P_1 \sin \varphi_1$, $P_2 \sin \varphi_2$ und $P_3 \sin \varphi_3$ in der Hauptebene xz. Nachdem wir die Auflagerreaktionen für jedes dieser Kräftesysteme getrennt ermittelt haben, können wir die Biegemomentenlinien M_x und M_y in den Hauptebenen zeichnen (Bild 309, b). Hierauf ist es nicht schwer, die Spannungen in einem beliebigen Querschnitt zu ermitteln, indem man die entsprechenden Werte M_x und M_y in die Formel (10.8) einsetzt. Der vorliegende Fall weist jedoch auch einen wesentlichen Unterschied gegenüber der ebenen schiefen Biegung auf. Bei der Biegung infolge einer in einer Ebene liegenden Belastung ist das Verhältnis der Biegemomente $M_y = M \sin \varphi$ und $M_x = M \cos \varphi$ ein konstanter Wert und gleich $\operatorname{tg} \varphi$. Folglich ist auch die Rich-

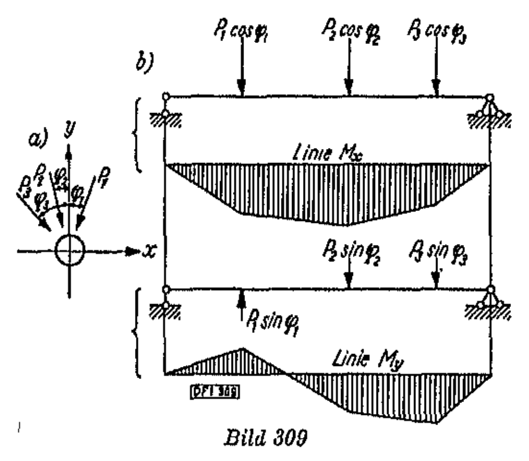


Bild 309

tung der Nullinie, die auf Grund der Formel (10.11) bestimmt wird, für alle Querschnitte des Balkens gleich. Die Biegung geht daher nur in einer Ebene vor sich. In dem vorliegenden Fall wird jedoch das Verhältnis $\frac{M_y}{M_x} = \operatorname{tg} \varphi$ nicht konstant sein und sich in Abhängigkeit von der Form der M_x- und M_y-Linien ändern. Folglich wird hier die Nullinie in verschiedenen Querschnitten eine verschiedene Richtung haben, und daher wird die gebogene Balkenachse nicht mehr eine ebene, sondern eine räumliche Kurve sein.

Außerdem wird das Auffinden des gefährdeten Querschnitts komplizierter. In der Tat muß sich das maximale resultierende Moment $M = \sqrt{M_x^2 + M_y^2}$ offenbar in einem Querschnitt befinden, in dem eine der Kräfte angreift. Diesen Querschnitt kann man manchmal sofort auf Grund der Form der M_x- und M_y-Linien

finden, manchmal muß man jedoch M in mehreren Querschnitten unter den Angriffspunkten der Kräfte berechnen.

Bei einem kreisförmigen Balkenquerschnitt (z. B. bei Wellen) wird der Querschnitt mit dem größten Moment $M = \sqrt{M_x^2 + M_y^2}$ der gefährdete sein, da bei einem Kreis alle Achsen Hauptachsen sind und die größten Spannungen im Querschnitt nicht von der Richtung des Moments abhängen (siehe weiter unten die Berechnung der Wellen auf Biegung mit Drillung). Wenn jedoch der Querschnitt des Balkens nicht kreisförmig ist, so hängen die größten Spannungen in diesem nicht nur von dem Wert des resultierenden Moments M ab, sondern auch von dem von seiner Wirkungsebene mit der y-Achse eingeschlossenen Winkel φ. Dieser Winkel bleibt jedoch, wie oben erwähnt wurde, nicht konstant. Folglich wird in diesem Fall der gefährdete Querschnitt offenbar mit der Angriffsstelle einer der Lasten zusammenfallen, aber er braucht nicht mit dem Querschnitt zusammenzufallen, in dem das resultierende Moment M sein Maximum erreicht.

10.4 Zug und Druck mit Biegung

Wenn die auf den Balken wirkenden Kräfte seine Achse unter den verschiedensten Winkeln schneiden, so erleidet der Balken gleichzeitig Zug oder Druck und zusammengesetzte Biegung. Jede der Kräfte P können wir tatsächlich in drei Komponenten zerlegen: In eine Längskomponente P_z und zwei Querkomponenten P_x und P_y, die in den Hauptträgheitsebenen xz und yz des Balkens liegen. Die Längskomponenten rufen Zug oder Druck hervor, und die Querkomponenten Biegung in zwei Hauptebenen.

Die Kräfte in einem beliebigen Querschnitt des Balkens werden hierbei durch fünf Kraftwirkungen nach Koordinatenrichtungen bestimmt: Die Längskraft N, die Biegemomente M_x und M_y in bezug auf die Hauptachsen des Querschnitts und die Querkräfte Q_x und Q_y.

Im Sonderfall, wenn $Q_x = Q_y = 0$ ist, werden wir einen Zug bzw. Druck und eine reine Biegung des Balkens in den Hauptebenen haben. Die Normalspannung in einem beliebigen Punkt (x, y) des Querschnitts wird mit Hilfe der allgemeinen Formel (10.7) der Normalspannung ermittelt:

$$\sigma = \frac{M_y}{J_y} x - \frac{M_x}{J_x} y + \frac{N}{F}. \tag{10.7}$$

Der Schnitt der Spannungsebene mit der Querschnittsebene des Balkens gibt die Nullinie an, deren Gleichung wir erhalten, wenn wir den rechten Teil der Gleichung (10.7) gleich Null setzen:

$$\frac{M_y}{J_y} x - \frac{M_x}{J_x} y + \frac{N}{F} = 0. \tag{10.16}$$

Diese Gleichung unterscheidet sich von der Gleichung (10.9) der Nullinie bei der schiefen Biegung nur durch das Vorhandensein des freien Gliedes $\frac{N}{F}$, so daß der Ausdruck des Winkelkoeffizienten der Nullinie der gleiche wie bei der schiefen Biegung bleibt und auf Grund der Formel (10.10):

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{J_x}{J_y} \cdot \frac{M_y}{M_x}$$

ermittelt wird. Das Vorhandensein des freien Gliedes weist jedoch darauf hin, daß beim Zug bzw. Druck mit Biegung die Nullinie nicht mehr durch den Koordinatenanfang geht. Hierbei kann die Nullinie den Querschnitt des Balkens schneiden oder aber sogar außerhalb des Querschnitts liegen. Im ersten Fall werden die Spannungen im Querschnitt verschiedene Vorzeichen haben. (Zugspannungen auf einer Seite der Nullinie und Druckspannungen auf der anderen Seite.) Im zweiten Fall werden die Spannungen in allen Punkten des Querschnitts nur ein Vorzeichen haben. Beide Fälle sind in Bild 310, a und b dargestellt. Es ist nicht schwer zu erkennen, daß die Spannungen proportional der Entfernung des Querschnittspunkts von der Nullinie anwachsen.

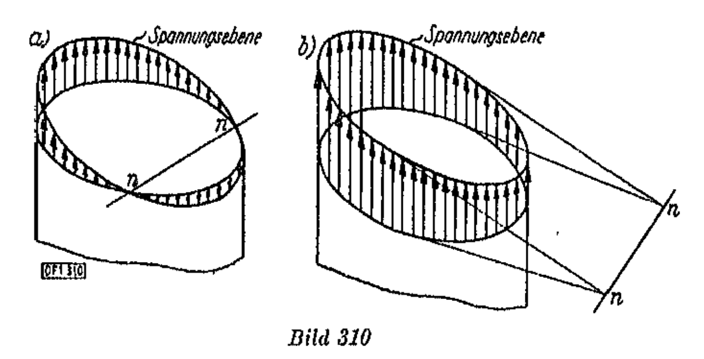


Bild 310

Setzt man in der Gleichung (10.16) $x = 0$, so finden wir die Koordinate y des Schnittpunktes der Nullinie mit der Hauptachse y, d. h. die Strecke b, die von der Nullinie auf der y-Achse abgeschnitten wird:

$$b = \frac{NJ_x}{FM_x} = i_x^2 \frac{N}{M_x}. \qquad (10.17\text{a})$$

Analog finden wir auch die Strecke a auf der x-Achse:

$$a = -\frac{NJ_y}{FM_y} = -i_y^2 \frac{N}{M_y}. \qquad (10.17\text{b})$$

Kennt man die Strecken a und b, so kann man in der Zeichnung die Nullinie eintragen und die größten Spannungen ermitteln, d. h. die am weitesten von der Nullinie des Querschnitts entfernten Punkte. Nachdem man die Spannungen in diesen Punkten berechnet hat, kann man die Linie der Normalspannungen im Querschnitt zeichnen, die eine geradlinige Form hat. Als Achse dieser Linie muß man natürlich eine zur Nullinie senkrechte Gerade wählen. Die Form der Spannungslinien für die in Bild 310, a und b aufgeführten Fälle ist in Bild 311, a und b dargestellt.

Es ist zu beachten, daß im Schwerpunkt des Querschnitts die Spannung immer gleich $\frac{N}{F}$ sein wird. Hiervon kann man sich überzeugen, wenn man in die Formel (10.7) die Koordinaten des Schwerpunkts $x = y = 0$ einsetzt.

Das Auffinden des gefährdeten Querschnitts des gleichzeitig durch Zug oder Druck und Biegung beanspruchten Balkens stellt wegen des Charakters der auf den Balken wirkenden äußeren Kräfte eine mehr oder weniger schwierige Aufgabe dar. Wenn alle äußeren Kräfte in einer die Achse des Balkens in sich einschließenden Ebene liegen und außerdem die Längskraft N in allen Querschnitten konstant ist, so wird derjenige Querschnitt der gefährdete sein, in dem das resultierende Biegemoment M (das in der Kraftebene wirkt) sein Maximum erreicht. Dieser Querschnitt ist leicht durch die Konstruktion der M-Linie zu finden. Wenn sich die Längskraft N längs der Länge des Balkens ändert (wenn z. B. in verschiedenen Punkten längs der Balkenachse mehrere Kräfte angreifen), so braucht der Querschnitt mit der größten Kraft N nicht mit dem Querschnitt zusammenzufallen, in dem das Moment M das größte ist. Dann muß man die Spannung in mehreren Querschnitten überprüfen.

Wenn die auf dem Balken eine Biegung ausübenden Kräfte nicht in einer Ebene liegen, so ist das Auffinden des gefährdeten Querschnitts noch komplizierter, da die größten Spannungen im Querschnitt nicht nur von den Werten M und N

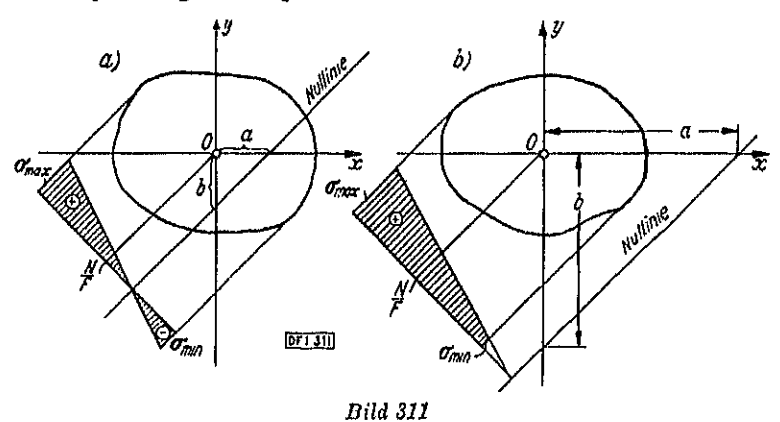


Bild 311

abhängen, sondern auch von dem Winkel, den die Wirkungsebene des resultierenden Moments M mit den Hauptebenen des Balkens einschließt (siehe Kapitel 10.3).

Zum Schluß wäre noch zu bemerken, daß die Formel (10.7) der Normalspannung im Falle eines Druckes mit Biegung nur anwendbar ist, solange die Länge des Balkens im Vergleich mit den Abmessungen seines Querschnitts gering ist, da man hierbei den Einfluß der Längskräfte auf die Biegung des Balkens vernachlässigen kann. Zur Erläuterung betrachten wir einen Balken, der durch zwei an den Enden angreifenden Kräfte P_1 zusammengedrückt wird und gleichzeitig durch zu seiner Achse senkrechte Kräfte P_2, P_3 und P_4 auf Biegung beansprucht wird (Bild 312). Die Biegung des Balkens unter der Einwirkung der Querbelastung ruft in diesem zusätzliche Biegemomente infolge der Längskräfte P_1 hervor. Der Wert des zusätzlichen Moments in irgendeinem Querschnitt m—n stellt sich wie folgt dar:

$$\Delta M = P_1 v.$$

Hier ist v die Durchbiegung im gegebenen Querschnitt. Solange die Durchbiegungen klein sind, kann man das zusätzliche Moment ΔM im Vergleich zu dem Grundbiegemoment infolge der Querbelastung vernachlässigen. Im Falle eines langen und dünnen Balkens wird seine Durchbiegung den Wert des Biegemoments wesentlich beeinflussen, und sie muß dann berücksichtigt werden[1]).

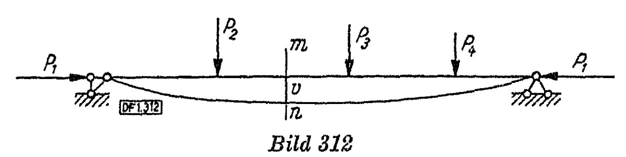


Bild 312

Außerdem kann sich ein langer und dünner Balken allein infolge der Druckkräfte P_1 durchbiegen, wenn ihre Größe den sogenannten kritischen Wert übersteigt, der von dem Material und den Abmessungen des Balkens abhängt. Diese Erscheinung, die man Knickung nennt, wird im Abschnitt 11 untersucht. Folglich kann man die Formel (10.7) benutzen, solange die Druckkraft N bedeutend geringer als der kritische Wert ist.

10.5 Exzentrischer Zug oder Druck. Kern eines Querschnitts

A. Biegemomente M_x und M_y können im Querschnitt des Balkens nicht nur durch eine Querbelastung hervorgerufen werden, sondern auch durch zur Achse parallele Kräfte, wenn sie exzentrisch angreifen, d. h. in einem gewissen Abstand von der Achse. Untersuchen wir diesen Fall, den man exzentrischen Zug bzw. Druck nennt, und der in der Praxis oft vorkommt.

Es wird angenommen, daß auf den Balken nur eine Kraft N wirkt, die zur Balkenachse parallel gerichtet ist und einen beliebigen Querschnitt im Punkt A mit den Koordinaten x_0 und y_0 in bezug auf die Hauptachsen x und y des Querschnitts schneidet (Bild 313, a). Um eine allgemeingültige Ableitung zu erhalten,

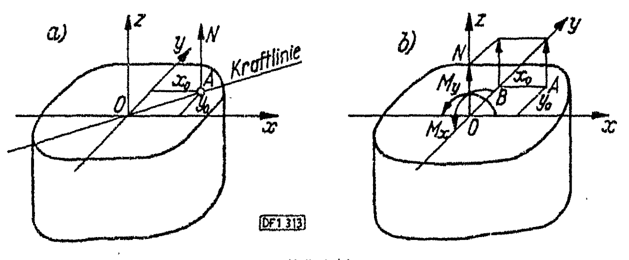


Bild 313

nehmen wir die Kraft N als positiv, d. h. als Zugkraft an. Wir bringen dann die Kraft N parallel zur Ebene zOx in den Punkt B der y-Achse hinüber, indem wir ein Moment (Übertragungsmoment) M_y hinzufügen, und bringen die Kraft aus dem Punkt B in den Schwerpunkt O, indem wir das Moment M_x hinzusetzen:

$$M_y = N x_0; \quad M_x = -N y_0. \tag{10.18}$$

[1]) In diesem Falle erweist sich das Prinzip der Unabhängigkeit der Wirkung der Kräfte als nicht mehr anwendbar.

Die Richtungen der Momente sind in Bild 313, b eingetragen, und ihre Vorzeichen in den Gleichungen (10.18) entsprechen dem von uns angenommenen Rechtsschraubensystem der Achsen. Im Ergebnis dieser beiden Übertragungen haben wir den exzentrischen Zug auf einen axialen Zug und eine Biegung in den beiden Hauptträgheitsebenen zurückgeführt. Das gleiche Ergebnis würden wir erhalten, wenn wir die Kraft N unmittelbar in den Schwerpunkt übertragen und das in der Kraftebene AOz wirkende hinzugefügte Moment $M = N \cdot \overline{OA}$ (Bild 313, a) in die Momente M_x und M_y in bezug auf die Hauptachsen zerlegen würden.

Wenn die Kraft N eine Druckkraft ist, d. h. negativ, so ändern die Momente M_x und M_y ihre Richtungen (Vorzeichen) in die umgekehrten. Auf diese Weise ist der exzentrische Zug bzw. Druck dem axialen Zug bzw. Druck und der reinen schiefen Biegung äquivalent[1]). Zur Ermittlung der Normalspannung in einem beliebigen Punkt (x, y) des Querschnitts setzen wir in die Formel (10.7) die Werte M_x und M_y aus den Gleichungen (10.18) ein:

$$\sigma = \frac{N x_0 x}{J_y} + \frac{N y_0 y}{J_x} + \frac{N}{F}.$$

Setzt man für $J_y = i_y^2 F$ und für $J_x = i_x^2 F$ ein, worin i_x und i_y die Hauptträgheitsradien sind, und bringt man den gemeinsamen Multiplikator $\frac{N}{F}$ vor die Klammer, so erhalten wir folgende Formel der Normalspannung bei exzentrischem Zug bzw. Druck:

$$\sigma = \frac{N}{F}\left(\frac{x x_0}{i_y^2} + \frac{y y_0}{i_x^2} + 1\right). \tag{10.19}$$

Die Gleichung der Nullinie nimmt dann folgendes Aussehen an:

$$\frac{x x_0}{i_y^2} + \frac{y y_0}{i_x^2} + 1 = 0. \tag{10.20}$$

Bringen wir diese Gleichung in die übliche Form der Abschnittsgleichung einer Geraden $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$:

$$\frac{x}{-\left(\frac{i_y^2}{x_0}\right)} + \frac{y}{-\left(\frac{i_x^2}{y_0}\right)} = 1.$$

Hieraus sieht man, daß die Strecken, die von der Nullinie auf den Hauptachsen x und y abgeschnitten werden, entsprechend

$$a = -\frac{i_y^2}{x_0} \quad \text{und} \quad b = -\frac{i_x^2}{y_0} \tag{10.21}$$

sind.

Auf Grund der Abschnitte a und b kann man die Lage der Nullinie in der Zeichnung eintragen und die am weitesten von der Nullinie entfernten Punkte des Querschnitts ermitteln. Die Normalspannungslinie im Querschnitt wird, wie oben (Abschnitt 10.4) gezeigt worden ist, konstruiert und hat das in Bild 311, a und b dargestellte Aussehen. Aus den Gleichungen (10.21) ist zu ersehen, daß die

[1]) Wenn im Sonderfall $M_x = 0$ oder $M_y = 0$ ist, so werden wir einen Zug bzw. Druck und eine einfache reine Biegung haben.

Abschnitte a und b gegenüber den Koordinaten x_0 und y_0 des Angriffspunktes der Kraft N umgekehrte Vorzeichen haben. Wenn daher z. B. die Kraft N im Punkt A des ersten Quadranten angreift, so schneidet die Nullinie $n—n$ das Dreieck OLK auf den Koordinatenachsen im dritten Quadranten ab (Bild 314).

Oben haben wir den exzentrischen Zug bzw. Druck auf den axialen Zug bzw. Druck und eine reine schiefe Biegung durch Übertragung der Kraft N in den Schwerpunkt des Querschnitts zurückgeführt. Man kann selbstverständlich auch umgekehrt vorgehen, d. h. man kann die zentrale Kraft N und die Momente M_x und M_y durch eine exzentrisch angreifende Kraft N ersetzen[1]). Zu diesem Zweck muß man die Koordinaten des Angriffspunktes der Kraft so wählen, daß sie den Gleichungen (10.18) genügen, d. h.

$$x_0 = \frac{M_y}{N} \quad \text{und} \quad y_0 = -\frac{M_x}{N} \tag{10.18a}$$

annehmen und im weiteren die Berechnung nach den Formeln des exzentrischen Zugs bzw. Drucks führen.

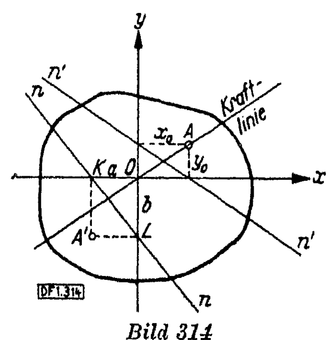


Bild 314

B. Vermerken wir eine interessante Abhängigkeit zwischen den Abschnitten a und b und den Koordinaten x_0 und y_0, die durch die Gleichungen (10.21) zum Ausdruck kommt. Wenn man in diesen Gleichungen die Plätze der Abschnitte und Koordinaten wechselt, so wird die Gültigkeit der Gleichungen nicht beeinträchtigt:

$$x_0 = -\frac{i_y^2}{a}; \quad y_0 = -\frac{i_x^2}{b}. \tag{10.21a}$$

Hieraus kann man folgern, daß wir, wenn man eine Kraft in einem neuen Punkt A' mit den Koordinaten a und b anbringt (Bild 314), eine neue Lage der Nullinie $n'—n'$ erhalten, die auf den Achsen x und y Strecken abschneiden und den Koordinaten x_0 und y_0 des Punktes A gleich sein werden. Das heißt, die Abschnitte a und b und die Koordinaten x_0 und y_0 besitzen die Eigenschaft der Gegenseitigkeit. Beachten wir auch, daß die Lage der Nullinie im gegebenen Querschnitt nur von den Koordinaten x_0 und y_0 des Angriffspunktes der Kraft N und nicht von der Größe dieser Kraft abhängt. Mit der Vergrößerung der Koordi-

[1]) Eine derartige Operation muß man z. B. bei der Berechnung von Säulen, die auf Druck mit Biegung arbeiten, und in anderen Fällen vornehmen. Hierbei werden die in Wirklichkeit durch die Querbelastung hervorgerufenen Momente M_x und M_y durch die Momente einer exzentrisch angreifenden Längskraft ersetzt, was die Normalspannungen im Querschnitt nicht ändert.

naten, d. h. mit dem Entfernen des Angriffspunktes der Kraft (x_0, y_0) vom Schwerpunkt des Querschnitts, verringern sich die Abschnitte a und b und die Nullinie nähert sich dem Schwerpunkt des Querschnitts. Mit dem Herannahen des Punktes (x_0, y_0) an den Schwerpunkt entfernt sich die Nullinie vom Querschnitt. Im Grenzfall, wenn $x_0 = y_0 = 0$ ist, haben wir einen axialen Zug bzw. Druck. Die Nullinie entfernt sich hierbei in die Unendlichkeit, und die Spannungsebene wird parallel der Querschnittsebene.

Bei einigen Werten der Koordinaten x_0 und y_0 kann die Nullinie den Umriß des Querschnitts tangieren, ohne ihn zu schneiden. Hierbei ist die Spannung im Tangierungspunkt C gleich Null und im weitesten von der Nullinie entfernten Punkte des Querschnitts D am größten (Bild 315). Die Spannungslinie nimmt eine dreieckige Form an. Mit diesem Fall, der ein großes praktisches Interesse hat, befassen wir uns weiter unten.

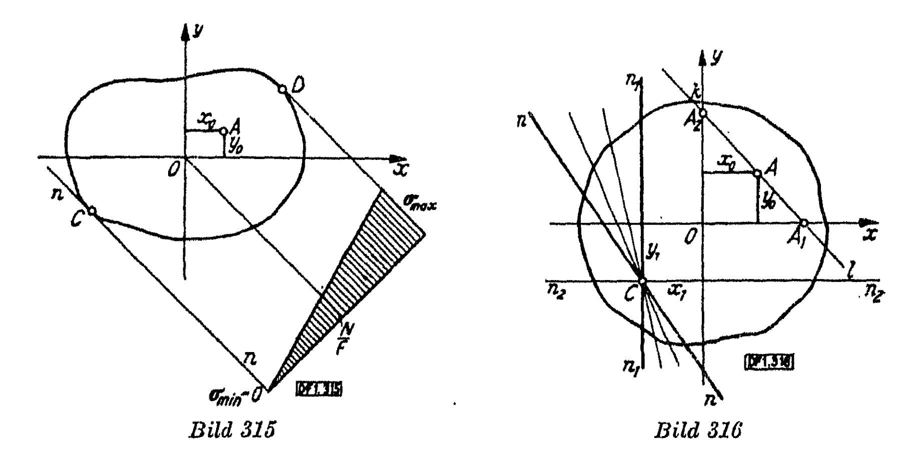


Bild 315 *Bild 316*

Es besteht noch eine wichtige Abhängigkeit zwischen der Lage der Nullinie und dem entsprechenden Angriffspunkt der Kraft oder dem sogenannten *Pol* der Nullinie:

Wenn sich die Nullinie um irgendeinen bestimmten Punkt dreht, so bewegt sich der Pol (der Angriffspunkt der Kraft) auf einer Geraden.

Nehmen wir z. B. an, daß die Kraft im Punkt A (x_0, y_0) angreift und die entsprechende Nullinie $n—n$ die in Bild 316 gezeigte Lage einnimmt. Wählen wir auf der Linie $n—n$ einen beliebigen Punkt C (x_1, y_1), und verfolgen wir, indem wir die Nullinie um diesen drehen, wie sich die Koordinaten des Pols A ändern werden. Da die Nullinie bei allen ihren Lagen durch den festen Punkt C geht, so müssen die Koordinaten desselben (x_1, y_1) der Gleichung (10.20) der Nullinie genügen. Setzt man in (10.20) an Stelle der veränderlichen Koordinaten (x, y) die Koordinaten des Punktes C ein, so erhalten wir:

$$\frac{x_1 x_0}{i_y^2} + \frac{y_1 y_0}{i_x^2} + 1 = 0. \qquad (10.22)$$

Die Gleichung (10.22) kann man als Gleichung einer Geraden ansehen, in der als veränderliche Koordinaten die Koordinaten des Pols x_0 und y_0 erscheinen.

Folglich bewegt sich bei einer Drehung der Nullinie um den Punkt C der Pol A auf einer Geraden $k—l$, die durch die Gleichung (10.22) bestimmt wird. Da die veränderlichen Koordinaten x und y und die Koordinaten des Pols x_0 und y_0 in der Gleichung (10.20) völlig gleichberechtigt erscheinen, so hat auch die umgekehrte Sachlage Gültigkeit, d. h. *bei einer Bewegung des Pols auf einer Geraden dreht sich die Nullinie um einen gewissen auf ihr liegenden Punkt.*

Bei der Lage des Pols in den Punkten A_1 und A_2 der Geraden $k—l$ (Bild 316), d. h. auf den Achsen Ox und Oy, nimmt die Nullinie entsprechend die Lagen $n_1—n_1$ und $n_2—n_2$ ein, deren Schnittpunkt das Zentrum C ihrer Drehung bestimmt. In der Tat wird bei der Lage des Pols auf einer der Achsen der Abschnitt, der von der Nullinie auf der anderen Achse abgeschnitten wird, gemäß (10.21) unendlich groß, d. h. die Nullinie ist parallel der anderen Achse.

C. Wenn die exzentrische Zug- oder Druckkraft in einer der Hauptträgheitsebenen des Balkens liegt, so wird eine der Koordinaten x_0 und y_0 des Angriffspunktes der Kraft N im Querschnitt und folglich auch eines von den Momenten M_x oder M_y gleich Null. Hierbei wird der exzentrische Zug bzw. Druck auf einen axialen Zug bzw. Druck und eine einfache Biegung in der Hauptträgheitsebene zurückgeführt. Ein derartiger Fall kommt in der Praxis am häufigsten vor, und daher befassen wir uns mit diesem ausführlicher.

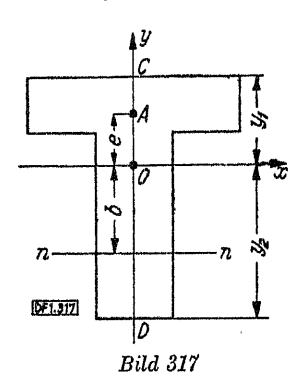


Bild 317

Wir vereinbaren im folgenden als Oy-Achse diejenige von den Hauptachsen des Querschnitts zu bezeichnen, auf der der Angriffspunkt der Kraft N liegt[1]). Die Koordinate y_0 des Punktes A wird in diesem Falle *Exzentrizität* genannt und mit dem Buchstaben e bezeichnet (Bild 317).

Die Formeln (10.7) und (10.19) der Normalspannung vereinfachen sich, da $x_0 = 0$ und $M_y = 0$ ist:

$$\sigma = -\frac{M_x}{J_x}\,y + \frac{N}{F} = \frac{N}{F}\left(1 + \frac{y\,e}{i_x^2}\right). \qquad (10.23)$$

Die Gleichung der Nullinie erhält somit die Form:

$$1 + \frac{y\,e}{i_x^2} = 0,$$

die darauf hinweist, daß die Nullinie parallel der Ox-Achse des Querschnitts gerichtet ist. Die Strecke b oder der Abstand der Nullinie vom Schwerpunkt (Bild 317) erhält den Wert $b = -\frac{i_x^2}{e}$, aus dem zu ersehen ist, daß die Nullinie und der Angriffspunkt der Kraft auf verschiedenen Seiten der Hauptachse x liegen.

Die größten und die kleinsten Spannungen im Querschnitt werden in den am weitesten von der x-Achse entfernten Punkten C und D auftreten. Hierbei werden natürlich die Spannungen auf der Seite der Nullinie, wo die Kraft N

[1]) Bei der Lage der Kraft auf der Ox-Achse muß man in den weiteren Formeln nur die Indizes des Biegemoments und des Trägheitsmoments oder des Trägheitsradius ändern.

angreift, das Vorzeichen der Kraft N haben. Bei praktischen Anwendungen ist es zweckmäßig, als positiv die Zugspannung anzusehen, wenn N eine Zugkraft ist, und die Druckspannung dann, wenn N eine Druckkraft ist. Es ist leicht zu erkennen, daß auf der Seite der Nullinie, wo die Kraft N angreift, die Zug- bzw. Druckspannung $\frac{N}{F}$ und die Biegespannung $\frac{M_x}{J_x} y$ arithmetisch addiert und auf der entgegengesetzten Seite subtrahiert werden. Setzt man in (10.23) die Koordinaten y_1 und y_2 der äußersten Punkte C und D des Querschnitts ein, so erhalten wir (Bild 318):

$$\sigma_{\max} = \frac{N}{F} + \frac{M_x}{J_x} y_1 = \frac{N}{F} + \frac{M_x}{W_1},$$

$$\sigma_{\min} = \frac{N}{F} - \frac{M_x}{J_x} y_2 = \frac{N}{F} - \frac{M_x}{W_2},$$

worin W_1 und W_2 die Widerstandsmomente des Querschnitts in bezug auf die beiden äußersten Fasern sind (siehe Kapitel 6.02).

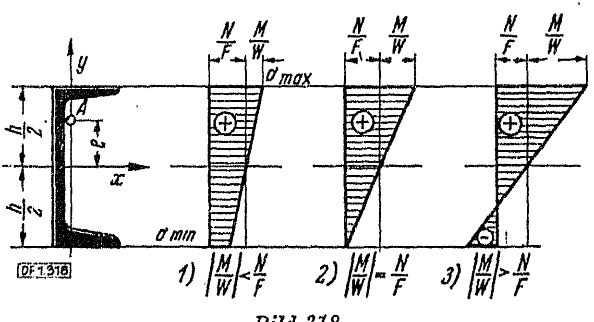


Bild 318

Wenn der Querschnitt in bezug auf die x-Achse symmetrisch ist, so ist:

$$y_1 = y_2 = \frac{h}{2}, \quad W_1 = W_2 = W_x,$$

$$\sigma_{\substack{\max \\ \min}} = \frac{N}{F} \pm \frac{M_x}{W_x} = \frac{N}{F}\left(1 \pm \frac{h\,e}{2\,i_x^2}\right). \tag{10.24}$$

In Bild 318 sind drei Formen von Spannungslinien für die Fälle dargestellt,

wenn 1. $\left|\frac{M_x}{W_x}\right| < \left|\frac{N}{F}\right|$, 2. $\left|\frac{M_x}{W_x}\right| = \left|\frac{N}{F}\right|$, 3. $\left|\frac{M_x}{W_x}\right| > \left|\frac{N}{F}\right|$ ist.

Diese Linien erhält man durch Addition der uns gut bekannten Spannungslinien infolge Zug bzw. Druck bei einer gleichzeitigen Biegung. Im letzten der drei Fälle ergeben sich im Querschnitt Spannungen mit dem der Kraft N entgegengesetzten Vorzeichen. Hierbei ist $\frac{h\,e}{2\,i_x^2} > 1$ und die Exzentrizität

$$e > \frac{2\,i_x^2}{h}.$$

Im zweiten Fall haben die Spannungen der äußersten Querschnittsfasern die Werte:

$$\sigma_{max} = \frac{2N}{F}; \quad \sigma_{min} = 0. \text{ Hierbei ist } e = \frac{2 i_x^2}{h}.$$

Bei einem rechteckigen Querschnitt von der Höhe h und der Breite b erhalten wir die größten Spannungswerte, wenn man in (10.24)

$$F = bh; \quad i_x^2 = \frac{J_x}{F} = \frac{bh^3}{12bh} = \frac{h^2}{12} \text{ [1]}$$

einsetzt; dann wird

$$\sigma_{\substack{max\\min}} = \frac{N}{bh}\left(1 \pm \frac{6e}{h}\right). \tag{10.25}$$

Diese Formel benutzt man gewöhnlich in der Praxis bei der Berechnung von rechteckigen Säulen, Bögen, Stützmauern usw. auf exzentrischen Druck. Wenn ähnliche Bauwerke aus Mauerwerk oder Beton hergestellt werden, die dem Zug schwachen Widerstand leisten, so läßt man bei der Berechnung nur sehr geringe Zugspannungen (etwa $\frac{1}{10}$ der zulässigen Druckspannung) oder sogar überhaupt keine Zugspannungen zu.

Aus der Formel (10.25) ersieht man, daß Zugspannungen im Querschnitt bei $\frac{6e}{h} > 1$ oder bei $e > \frac{h}{6}$ auftreten. Um Zug zu vermeiden, muß man die Abmessungen des Querschnitts so wählen, daß der Angriffspunkt A der Druck-

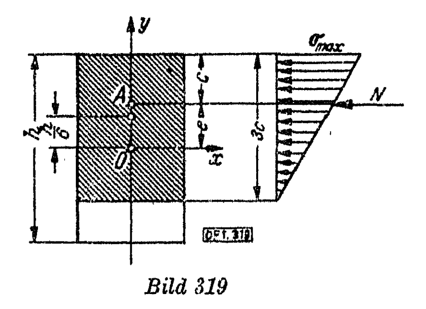


Bild 319

kraft nicht aus dem mittleren Drittel der Querschnittshöhe fällt, d. h. es muß $e \leqq \frac{h}{6}$ sein. Wenn es aus irgendeinem Grunde nicht gelingt, dies zu erreichen, so fällt bei einem Baustoff, der dem Zug gar keinen Widerstand leistet[2], ein Teil des Querschnitts für die Arbeit aus, und der übrige Teil erleidet verstärkte Druckspannungen. Nehmen wir an, daß $e > \frac{h}{6}$ und folglich der Abstand des Angriffspunktes A der Kraft vom Rande des Querschnitts $c < \frac{h}{3}$ ist (Bild 319). Die Länge des auf Druck arbeitenden Querschnittseils kann in diesem Fall aus der

[1]) *Anm. d. deutschen Redaktion:* Oft in der Praxis geschrieben: $i_x = 0{,}289 \cdot h$ und $i_y = 0{,}289 \cdot b$.
[2]) *Anm. d. deutschen Redaktion:* Zum Beispiel bei der Berechnung von Spannungen in der Bodenfuge exzentrisch belasteterFundamente.

Bedingung gefunden werden, daß sich die Druckspannungen nach dem linearen Gesetz verteilen. Die Spannungslinie hat die Form eines Dreiecks, durch dessen Schwerpunkt die Resultierende N der Druckkräfte im Querschnitt gehen muß. Folglich ist die Länge des gedrückten Querschnittsteiles gleich $3c$ (Bild 318). Die größte Spannung finden wir aus der Bedingung, daß die Fläche der Spannungslinie multipliziert mit der Breite des Querschnitts gleich der Kraft N sein muß. Es ist:

$$\frac{\sigma_{\max} 3c}{2} b = N,$$

woraus sich

$$\sigma_{\max} = \frac{2N}{3bc} \tag{10.26}$$

ergibt.

D. Bei einem exzentrischen Druck von Balken, deren Material dem Zug schwachen Widerstand leistet, muß man darauf achten, daß im Querschnitt keine Zugspannungen auftreten. Hierzu ist es erforderlich, daß die Nullinie außerhalb des Querschnitts liegt oder im Grenzfall den Querschnitt höchstens tangiert, aber ihn nicht schneidet (Bild 311, b und 315).

Es erweist sich, daß man für jeden Querschnitt einen gewissen geschlossenen Umriß zeichnen kann, der die Eigenschaft besitzt, daß bei der Ermittlung des

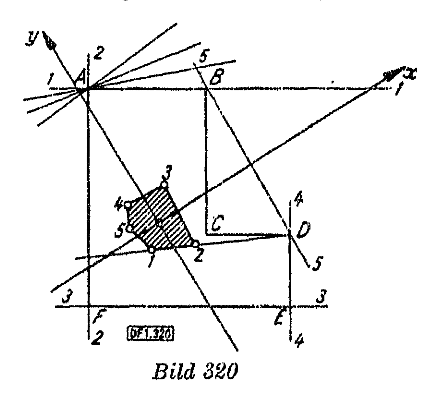


Bild 320

Angriffspunkts der Längskraft innerhalb oder an der Grenze dieses erwähnten Umrisses im Querschnitt Spannungen mit nur einem Vorzeichen auftreten. Der von diesem Umriß begrenzte Teil des Querschnitts trägt die Bezeichnung *Kern* des Querschnitts. Tritt die Druckkraft aus dem Kern heraus, so treten im Querschnitt Zugspannungen auf.

Bei der Konstruktion des Querschnittskerns gehen wir auf folgende Weise vor. Wir nehmen die Lage der Nullinie so an, daß sie den Querschnitt tangiert, ohne ihn irgendwo zu schneiden, und ermitteln den entsprechenden Pol oder den Angriffspunkt der Kraft. Hierbei werden die Spannungen im Querschnitt das gleiche Vorzeichen haben (Bild 315). Zeichnet man eine Schar von Tangenten zum Querschnitt, so erhalten wir eine entsprechende Anzahl von Polen, deren geometrischer Ort den Umriß (die Kerngrenze) des Querschnittskerns ergibt.

Wenn der Querschnitt einen polygonalen Umriß hat, so wird der Kern des Querschnitts ebenfalls ein Polygon sein. Nehmen wir z. B. an, daß der in Bild 320 dargestellte Querschnitt mit den Hauptachsen x und y gegeben ist. Zur Konstruktion des Querschnittskerns genügt es, fünf Tangenten zum Umriß des Querschnitts zu zeichnen, von denen vier mit den Seiten AB, AF, EF und ED des Querschnitts zusammenfallen und die fünfte die Punkte B und D verbindet.

Tangenten, die mit den Seiten BC und CD zusammenfallen, kann man nicht ziehen, da sie den Querschnitt schneiden würden. Mißt oder berechnet man die Abschnitte, die von den Tangenten *1—1* ... *5—5* auf den Achsen x und y abgeschnitten werden, und setzt man die Werte der Abschnitte in die Formeln (10.21a) ein, so erhalten wir die Koordinaten x_0 und y_0 der fünf Pole *1*, *2*, ... *5*, die den fünf Lagen der Nullinie entsprechen. Die Pole tragen wir auf der Zeichnung ein. Die Tangente *1—1*, der der Pol *1* entspricht, kann man in die Lage *2—2* bringen, indem man sie um den Punkt A dreht. Hierbei muß sich der Pol *1* gemäß der oben (Punkt B, Kapitel 10.5) bewiesenen Abhängigkeit auf einer Geraden bewegen und im Ergebnis der Drehung der Tangente im Punkt *2* liegen. Folglich werden alle Pole, die den Zwischenstellungen der Tangente zwischen *1—1* und *2—2* entsprechen, auf der Geraden *1—2* gelegen sein. Auf gleiche Weise erhalten wir, indem wir die Tangente *2—2* durch Drehung derselben um den Punkt F in die Lage *3—3* bringen, die zweite Seite *2—3* des Querschnittskerns usf. Hieraus ersieht man, daß der Kern des Querschnitts ein Polygon sein muß, zu dessen Konstruktion es genügt, die Pole *1*, *2*, ..., *5* durch gerade Linien zu verbinden.

Wenn der Querschnitt (oder ein Teil desselben) einen krummlinigen Umriß aufweist, so wird der Umriß des Kerns (oder eines entsprechenden Teiles desselben) ebenfalls krummlinig sein.

Da man zwischen zwei äußersten Tangenten irgendeines Abschnittes der Kurve in der Tat eine unendliche Anzahl von Zwischentangenten ziehen kann, die nicht durch den Schnittpunkt der äußersten Tangenten gehen werden, können die ihnen entsprechenden Pole nicht auf einer Geraden liegen.

Bei der Konstruktion des Querschnittskerns ist es zweckmäßig, die Strecken, die von den Tangenten zum Umriß des Querschnitts abgeschnitten werden, durch unmittelbare Messung derselben in der Zeichnung zu bestimmen. Hierbei kann es sich aber erweisen, daß der Schnittpunkt der Tangente mit der Hauptachse über die Grenzen der Zeichnung hinausgeht (z. B. der Schnittpunkt der Tangente *5—5* und der y-Achse in Bild 320). Diese Schwierigkeit kann man vermeiden, wenn man eine andere Konstruktionsmethode des Querschnittskerns anwendet.

Wählen wir irgendeine Ecke A des Querschnitts (Bild 320), und drehen wir um diese die Nullinie, nachdem wir ihre Koordinaten x_A und y_A bestimmt haben. Hierbei wird sich der Pol auf einer Geraden bewegen, die durch die Gleichung (10.22) bestimmt ist. Die Strecken, die von dieser Geraden auf den Achsen abgeschnitten werden, sind

$$a = -\frac{i_y^2}{x_A} \quad \text{und} \quad b' = -\frac{i_x^2}{y_A}.$$

Bei der Drehung der Nullinie aus der Lage BA in die Lage AF fällt natürlich der entsprechende Teil der Trajektorie *1—2* des Pols mit der Grenze des Querschnittskerns zusammen.

Tragen wir die Gerade *1—2* auf Grund der Abschnitte in die Zeichnung ein, und wiederholen wir die gleiche Operation nacheinander für alle übrigen Spitzen des Querschnitts. Dann wird die Gesamtheit aller sich schneidenden Geraden *1—2*, *2—3*, *3—4* usf. den Kern des Querschnitts abgrenzen. Die Schnittpunkte dieser Geraden, d. h. die Spitzen des Kerns entsprechen dem Zusammenfallen der Nullinie mit den Seiten des Querschnitts[1]).

E. *Beispiele*

1. *Rechteck-Querschnitt* (Bild 321)

Zu dem Umriß eines Rechtecks kann man vier Tangenten ziehen, die zu den Hauptachsen des Querschnitts parallel gerichtet sein werden, und daher werden die entsprechenden Pole auf den Hauptachsen liegen. Wegen der Symmetrie genügt es, die Lage von zwei Polen zu ermitteln, z. B. von *1* und *2*. Die Tangente *1—1* schneidet auf der y-Achse die Strecke $\frac{h}{2}$ ab. Der entsprechende Pol *1* hat gemäß (10.25) die Exzentrizität $e_1 = -\frac{h}{6}$. Für den Pol *2* der Tangente *2—2* finden wir analog $e_2 = -\frac{b}{6}$. Verbindet man die Pole *1*, *2*, *3* und *4* durch gerade Linien, so erhalten wir den Kern des Rechteck-Querschnitts als einen Rhombus mit den Diagonalen $\frac{h}{3}$ und $\frac{b}{3}$.

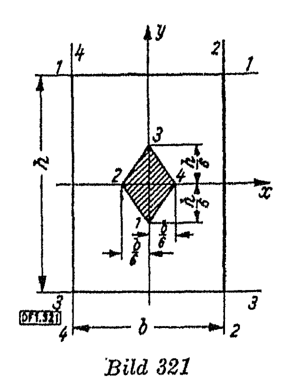


Bild 321

Bild 322

2. I-*Querschnitt* (Bild 322)

Das System der Tangenten zum Querschnitt ist das gleiche wie beim Rechteck, und folglich ist der Kern des I-Querschnitts ebenfalls ein Rombus, dessen Diagonalhälften e_1 und e_2 aus der Gleichung (10.24) bestimmt werden, indem man in dieser den linken Teil gleich Null setzt:

$$e_1 = \pm \frac{2\,i_x^2}{h}, \quad e_2 = \pm \frac{2\,i_y^2}{b}.$$

---

[1]) *Anm. d. deutschen Redaktion:* Dem Leser sei bei dieser Gelegenheit gesagt, daß es Querschnittsformen gibt, bei denen der Kern des Querschnitts nicht innerhalb der eigentlichen Querschnittsfläche liegt. Dies trifft zum Beispiel für Hohlquerschnitte und für Winkelquerschnitte zu. Bei letzteren ist Bedingung, daß die Schenkelbreiten gering sind im Verhältnis zur Abmessung des Gesamtquerschnitts.

3. *Kreis-Querschnitt*

Alle Zentralachsen des Kreises sind gleichzeitig dessen Hauptachsen, und der Pol einer beliebigen Tangente CD (Bild 323) wird daher auf dem durch den Tangierungspunkt gehenden Durchmesser liegen und die Exzentrizität

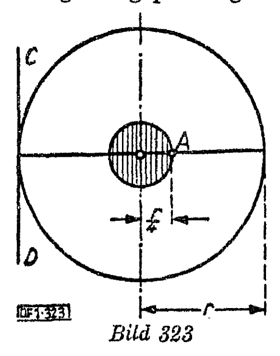


Bild 323

$$e = \frac{i_x^2}{r}$$

haben, worin r der Radius des Kreises ist.

Setzt man $\quad i_x^2 = \frac{J_x}{F} = \frac{\pi r^4}{4\pi r^2} = \frac{r^2}{4}$

ein, so erhalten wir $e = \frac{r}{4}$. Auf Grund der Symmetrie folgern wir, daß der Kern des Kreis-Querschnitts ebenfalls ein Kreis mit dem Radius $e = \frac{r}{4}$ sein wird.

4. *Ringförmiger Querschnitt*

Er hat offenbar einen Querschnittskern ebenfalls in Form eines Kreises. Bezeichnet man den äußeren Radius des Ringes mit R und den inneren mit r, so drückt sich das Trägheitsmoment und der Trägheitsradius des Ringes wie folgt aus:

$$J = \frac{\pi}{4}(R^4 - r^4), \quad F = \pi(R^2 - r^2),$$

$$i^2 = \frac{J}{F} = \frac{R^4 - r^4}{4(R^2 - r^2)} = \frac{R^2 + r^2}{4}.$$

Hieraus ergibt sich der Radius des Querschnittskerns eines Kreisringes

$$e = \frac{i^2}{R} = \frac{R^2 + r^2}{4R}.$$

Wenn sich der innere Radius des Ringes vergrößert und dem Ergebnis $r = R$ zustrebt, so wird der Radius e des Querschnittskerns dem Wert $\frac{R}{2}$ zustreben. Vergleicht man diesen Wert mit dem Radius des Kerns $e = \frac{R}{4}$ eines Vollkreises, so kann man die Zweckmäßigkeit der Anwendung von dünnen Ringquerschnitten bei Balken, die auf exzentrischen Druck beansprucht werden (z. B. Säulen, Schornsteine usw.), erkennen.

10.6 Berechnungsbeispiele für exzentrischen Zug (Druck)

Beispiel 57

Eine Stützmauer hat die Höhe $H = 6{,}0$ m, oben die Breite $a = 1{,}5$ m und die Sohlenbreite $h = 2{,}5$ m (Bild 324). Das Raumgewicht des Mauerwerks der Wand ist $\gamma = 2{,}2$ t/m³. Der Erddruck, der von der Wand gehalten wird, sei $R = 10{,}0$ t und horizontal gerichtet. Der Angriffspunkt der Kraft R befindet sich auf der Höhe $\frac{1}{3}H = 2{,}0$ m von der Sohle der Wand. Die zulässige Spannung des Bodens auf Druck sei $\sigma_{dzul} = 2{,}5$ kg/cm². Zu überprüfen sind die Bodenspannungen unter der Sohle der Stützmauer.

Zur Berechnung schneiden wir aus der Wand einen Fundamentstreifen mit der Länge

$b = 1{,}0$ m (in der zur Zeichnung senkrechten Richtung)[1]) heraus. Die Grundfläche des Fundamentstreifens ist ein Rechteck, das die Abmessungen $b = 1{,}0$ m und $h = 2{,}5$ m hat. Für den mit der Basis der Wand zusammenfallenden Querschnitt (Bodenfuge) ist die Druckkraft N gleich dem Gewicht G des Wandstreifens:

$$N = G = \frac{a+h}{2} H\gamma = \frac{1{,}5 + 2{,}5}{2} \cdot 6 \cdot 2{,}2 = 26{,}4 \text{ t}.$$

Das Biegemoment M_x ist gleich der Summe der Momente der Kräfte G und R in bezug auf den Schwerpunkt der Grundfläche:

$$M_x = R\frac{H}{3} - Ge_1.$$

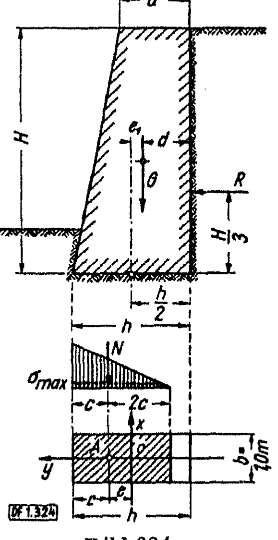


Bild 324

Die Kraft G geht in einer Entfernung d von der rechten Kante durch den Schwerpunkt des trapezförmigen Querschnitts der Wand:

$$d = \frac{1}{3}\frac{h^2 + ha + a^2}{h+a} = \frac{1}{3}\frac{2{,}5^2 + 2{,}5 \cdot 1{,}5 + 1{,}5^2}{2{,}5 + 1{,}5} = 1{,}02 \text{ m.}^{2)}$$

Der Abstand der Kraft G von dem Schwerpunkt der Wandgrundfläche ist

$$e_1 = \frac{h}{2} - d = 1{,}25 - 1{,}02 = 0{,}23 \text{ m},$$

und $$M_x = 10 \cdot 2 - 26{,}4 \cdot 0{,}23 = 13{,}92 \text{ tm}.$$

Führt man hier den Druck und die Biegung auf einen exzentrischen Druck zurück, so finden wir die Exzentrizität der Kraft N in dem mit der Sohle zusammenfallenden Querschnitt:

$$e = \frac{M_x}{N} = \frac{13{,}92}{26{,}4} = 0{,}53 \text{ m}.$$

Da $e > \frac{h}{6}$ ist, so liegt der Angriffspunkt A der Kraft N außerhalb des Querschnittkerns. Folglich müssen auf der anderen Seite der x-Achse Zugspannungen im Querschnitt vorhanden sein. Da aber der Boden keinen Zug aufnehmen kann (d. h. Loslösung der Wandsohle vom Boden), so muß man die Spannungsberechnung auf Grund der Formel (10.26) durchführen, indem man die Zugzone des Querschnitts aus der Betrachtung ausschließt. Der Abstand des Punktes A von der linken Kante des Querschnitts ist:

$$c = \frac{h}{2} - e = 1{,}25 - 0{,}53 = 0{,}732 \text{ m},$$

und $$\sigma_{\max} = \frac{2N}{3bc} = \frac{2 \cdot 26\,400}{3 \cdot 100 \cdot 72} = 2{,}45 \text{ kg/cm}^2,$$

so daß die zulässige Spannung von 2,5 kg/cm² nicht überschritten wird. Die Bodenspannungslinie ist in Bild 324 dargestellt.

Beispiel 58

Die Zugstrebe eines Binders ist aus einem ungleichschenkligen Winkel ∟ 100.75.10[3]) ausgeführt, der mit seinen Enden an Knotenbleche von 12 mm Dicke angenietet ist

[1]) Alle derartigen Streifen arbeiten unter den gleichen Bedingungen, und daher ist es nicht notwendig, die ganze Länge der Wand in die Berechnung einzuführen (siehe Kapitel 6.09).
[2]) Diese Formel wird gewöhnlich in den Handbüchern aufgeführt.
[3]) *Anm. d. deutschen Redaktion:* Die Abstufung entsprechender deutscher Profile ist nach DIN 1029, Bl. 1 und 2: ∟ 75 · 100 · 7; ∟ 75 · 100 · 9; ∟ 75 · 100 · 11.

(Bild 325). Es ist die größte Spannung im Winkel zu ermitteln und diese mit der Spannung bei zentralem (axialem) Zug des Winkels zu vergleichen.

Der Winkel erleidet einen exzentrischen Zug, wobei die Zugkraft N durch den Schnittpunkt A der Achse des Knotenbleches mit der Achse des Niets geht (wobei die Achse des Niets in der Mitte des längeren Winkelschenkels angenommen ist). Aus der Profiltafel für ungleichschenklige Winkel entnehmen wir die Werte der Querschnittsfläche, der Hauptträgheitsmomente und den Tangens des Neigungswinkels der Hauptachse y zu der Richtung des langen Winkelschenkels:

$$F = 16{,}7\ \text{cm}^2, \quad J_y = 42{,}6\ \text{cm}, \quad i_y^2 = 1{,}6^2 = 2{,}56\ \text{cm}^2,$$

$$J_x = 163 + 78{,}5 - 42{,}6 = 198{,}9\ \text{cm}^4,$$

$$i_x^2 = \frac{198{,}9}{16{,}7} = 11{,}92\ \text{cm}^2, \qquad \operatorname{tg}\alpha = 0{,}545.$$

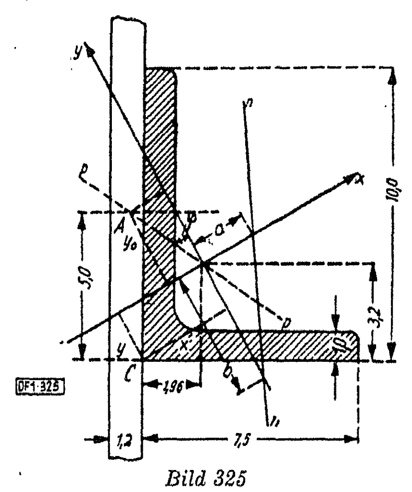


Bild 325

Ziehen wir die Hauptachsen x und y, und ermitteln wir durch Messung in der Zeichnung die Koordinaten des Punktes A:

$$x_0 = -1{,}4\ \text{cm},$$
$$y_0 = 2{,}8\ \text{cm}.$$

Wir ermitteln dann die Abschnitte der Nullinie auf den Achsen x und y:

$$a = \frac{2{,}56}{1{,}4} = 1{,}83\ \text{cm},$$

$$b = -\frac{11{,}92}{2{,}8} = -4{,}27\ \text{cm}.$$

Auf Grund der Abschnitte tragen wir die Nullinie $n-n$ ein und messen die Koordinaten x und y des am weitesten von der Nullinie entfernten Punktes C:

$$x = -3{,}25\ \text{cm},$$
$$y = -1{,}9\ \text{cm}.$$

Setzt man die Werte der Koordinaten des Punktes C in die Formel (10.19) ein, so erhalten wir die größte Spannung im Querschnitt[1]):

$$\sigma_{\max} = \frac{N}{F}\left(1 + \frac{3{,}25 \cdot 1{,}4}{2{,}56} - \frac{1{,}9 \cdot 2{,}8}{11{,}92}\right) = 2{,}33\,\frac{N}{F}.$$

[1]) Zur Vereinfachung vernachlässigen wir die Schwächung des Winkels durch das Nietloch.

Hieraus ersieht man, daß sich die Spannungen im Vergleich zu einem axialen Zug mit derselben Kraft N auf das 2,33fache vergrößern[1]). Daher wird in der Praxis ein Querschnitt aus nur einem Winkel lediglich in schwach beanspruchten und untergeordneten Elementen eines Binders angewandt, und bei der Wahl eines solchen Querschnitts wird die zulässige Spannung für einen axialen Zug bedeutend herabgesetzt.

10.7 Biegung mit Drillung

A. Am Anfang des Abschnitts 9 ist darauf hingewiesen worden, daß ein System von zur Balkenachse senkrecht gerichteten, aber diese nicht schneidenden Kräfte auf Biegekräfte, die die Balkenachse unter einem rechten Winkel schneiden, und Verdrehung ausübende Kräftepaare (Momente) zurückgeführt werden kann. Im Ergebnis der Wirkung der Biegekräfte treten im Querschnitt des Balkens Biegemomente M_x und M_y und Querkräfte Q_x und Q_y auf. Die eine Drehung ausübenden Kräftepaare werden auf ein Drillmoment M_z im Querschnitt zurückgeführt[2]). Auf diese Weise wird das Kräftesystem im Querschnitt bei der Biegung mit Drillung durch fünf Koordinatengleichungen bestimmt.

Die Normalspannungen im Querschnitt infolge der Momente M_x und M_y werden auf Grund der Formeln der zusammengesetzten Biegung gefunden. Die Schubspannungen infolge der Wirkung der Querkräfte Q_x und Q_y sind größten-

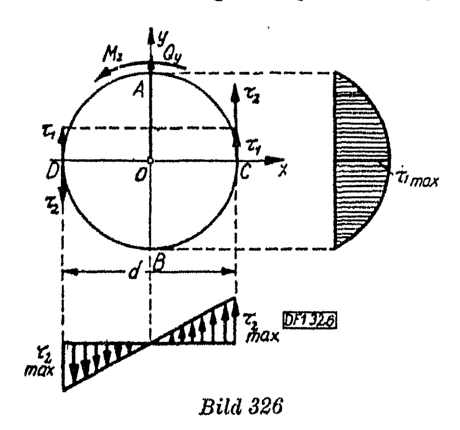


Bild 326

teils gering und werden daher bei der Berechnung oft nicht berücksichtigt. Bei einer etwaigen bedeutenden Größe dieser Spannungen muß man diese zu den Schubspannungen infolge des Drillmoments addieren. Hierbei muß man diejenigen Punkte des Querschnitts wählen, in denen sowohl diese wie auch jene Schubspannungen ihren größten Wert erreichen.

Wählen wir als Beispiel einen Balken mit kreisförmigem Querschnitt und dem Durchmesser d, der durch ein Drillmoment M_z und in der Ebene yOz gelegene Biegekräfte beansprucht wird (Bild 326). Die größten Spannungen τ_1 infolge der

---

[1]) In Wirklichkeit werden die Ergebnisse infolge der Steifigkeit der Befestigung des Winkels durch Niete, die den Charakter der Biegung des Winkels beeinflußt, etwas anders ausfallen.

[2]) Bei der Berechnung von Transmissionswellen vernachlässigt man oft die Biegung der Welle auf Grund der im Abschnitt 9 niedergelegten Überlegungen. Im allgemeinen muß man jedoch die Wellen auf die gleichzeitige Wirkung einer Biegung und Drillung berechnen.

Querkraft Q_y treten in der Ebene der neutralen Achse x auf und sind gemäß der Formel (6.28) gleich $\tau_1 = \frac{4Q_y}{3F}$.

Die Schubspannungen τ_2 infolge des Drillmoments werden in den Punkten des Querschnittsumrisses am größten sein. Die Änderung der Spannungen τ_1 über die Höhe des Querschnitts und der Spannungen τ_2 längs der neutralen Achse x ist durch entsprechende Linien in Bild 326 dargestellt. Aus der Zeichnung ist zu ersehen, daß die größten Schubspannungen im Punkte C der neutralen Achse wirken werden, wo $\tau_{2\max}$ und $\tau_{1\max}$ auf ein und dieselbe Seite gerichtet sind und sich damit addieren:

$$\tau_{\max} = \tau_{2\max} + \tau_{1\max} = \frac{M_z}{W_p} + \frac{4Q_y}{3F}.$$

Aus dem eben Gesagten geht hervor, daß die Ermittlung der größten Normal- und Schubspannungen in einem Querschnitt des Balkens keine Schwierigkeiten bereitet. Zur Beurteilung der Festigkeit des Balkens bei der Biegung mit Drillung genügt es aber nicht, sich auf die Spannungen in einem Querschnitt zu beschränken. Einen viel höheren Wert können die Hauptspannungen und größten Schubspannungen an geneigten Flächenelementen erreichen.

Beim Aufsuchen solcher Punkte des Balkens, in denen die Hauptspannungen die größten sind, muß man so wie im Falle der einfachen Querbiegung vorgehen, d. h. man muß zuerst den gefährdeten Querschnitt des Balkens finden und alsdann in diesem Querschnitt die gefährdeten Punkte. Untersuchen wir zuerst einen Balken mit kreisförmigem Querschnitt. Da für einen Kreis alle Zentralachsen Hauptachsen sind, so wird in einem beliebigen Querschnitt des Balkens die neutrale Achse senkrecht zu der Wirkungsebene des Biegemoments im gegebenen Querschnitt gerichtet sein. Folglich liegen die bei der Biegung am stärksten angespannten Punkte immer an den Enden des mit der Kraftlinie zusammenfallenden Durchmessers (die Punkte A und B in Bild 326). In diesen Punkten werden die Schubspannungen infolge des Drillmoments ebenfalls am größten sein.

Da die Spannungen σ und τ proportional dem Wert des Biege- und Drillmoments sind, so wird der gefährdete Querschnitt derjenige sein, in dem das Biegemoment $M = \sqrt{M_x^2 + M_y^2}$ und das Drillmoment M_z ihren größten Wert erreichen. Wenn sich hierbei erweist, daß die Querschnitte mit $M_{\max}$ und $M_{z\max}$ nicht zusammenfallen, so muß man eine Nachprüfung der Spannungen in zwei oder mehreren der gefährdeten Querschnitten durchführen. Das Aufsuchen der gefährdeten Querschnitte wird auf Grund der gezeichneten Biegemomentenlinien M_x und M_y (siehe oben Absatz C des Kapitels 10.3) und des Drillmoments M_z durchgeführt.

Wenn die den Balken auf Biegung beanspruchenden Kräfte in einer Ebene liegen, so genügt es, die Linie des resultierenden Biegemoments $M = \sqrt{M_x^2 + M_y^2}$ zu zeichnen, ohne die Belastung in Richtung der Hauptachsen zu zerlegen, da der Balken in diesem Falle eine ebene Querbiegung erleidet.

Nachdem man den gefährdeten Querschnitt gefunden hat, muß man die Hauptspannungen und größten Schubspannungen in den gefährdeten Punkten A und B des Querschnitts ermitteln, die an den Enden der Kraftlinie $p-p$ liegen (Bild 327). Zu diesem Zwecke schneiden wir am Punkt A aus einer dünnen äußeren Schicht des Balkens ein elementares dreiseitiges Prisma Abc durch drei

Schnitte heraus: Einen Querschnitt *1—1*, einen diametralen (Längsschnitt) *2—2* und einen geneigten Schnitt *3—3*. An der in der Ebene des Querschnitts *1—1* gelegenen Seitenfläche Ab wird die Normalspannung σ infolge der Biegung und die senkrecht zur Kraftlinie $p—p$ gerichtete Schubspannung τ infolge der Drillung wirken. An der in der Kraftebene $p—p$ gelegenen Seitenfläche Ac wirkt eine gleichgroße Schubspannung τ, die längs der Erzeugenden gerichtet ist.

Analoge Spannungen an den Seitenflächen des Prismas hatten wir bei der Untersuchung der Hauptspannungen in dem auf Biegung beanspruchten Balken (Kapitel 6.10), und daher sind im vorliegenden Falle die früher abgeleiteten Formeln der Hauptspannungen und der größten Schubspannungen anwendbar:

$$\left.\begin{aligned} \sigma'_{\substack{\max\\ \min}} &= \frac{\sigma}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2 + \tau^2}, \\ \tau'_{\substack{\max\\ \min}} &= \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma}{\tau}\right)^2 + \tau^2}. \end{aligned}\right\} \qquad (10.27)$$

Die Spannungen σ und τ des Punktes A haben die Werte

$$\sigma = \frac{M}{W} \quad \text{und} \quad \tau = \frac{M_z}{W_p},$$

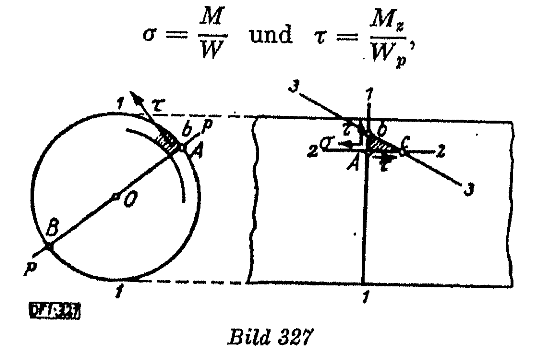


Bild 327

worin M und M_z das Biege- und Drillmoment und W und W_p die Widerstandsmomente der Biegung und der Drillung darstellen.

Für den kreisförmigen Querschnitt ist:

$$W = \frac{\pi d^3}{32} \quad \text{und} \quad W_p = \frac{\pi d^3}{16}.$$

Setzt man in die Gleichungen (10.27) die Werte σ und τ ein, und setzt man $W_p = 2W$, so erhalten wir folgende Formeln der Hauptspannungen und größten Schubspannungen bei der Biegung mit Drillung eines runden Balkens:

$$\sigma'_{\substack{\max\\ \min}} = \frac{M \pm \sqrt{M^2 + M_z^2}}{2W}, \qquad (10.28)$$

$$\tau'_{\substack{\max\\ \min}} = \pm \frac{\sqrt{M^2 + M_z^2}}{2W}. \qquad (10.29)$$

Beim Ringquerschnitt ist das Biegewiderstandsmoment W ebenfalls zweimal kleiner als das polare Widerstandsmoment W_p, und daher sind die Formeln

(10.28) und (10.29) bei der Berechnung runder Hohlbalken anwendbar. Hierbei wird W_p nach der Formel (9.15) ermittelt.

Bei der Berechnung von auf Biegung mit Drillung beanspruchten Balken, z. B. von Wellen, taucht die Frage auf, welche von den beiden Spannungen σ'_{max} und τ'_{max} in bezug auf die Festigkeit die entscheidende ist. Diese Frage wird ausführlich im II. Teil des Lehrbuchs in dem Abschnitt über verschiedene Festigkeitstheorien behandelt. Gemäß der ersten dieser Theorien (die historisch früher als die anderen entstand) hängt die Festigkeit bei der zusammengesetzten Beanspruchung wie bei dem einfachen Zug von der größten Normalspannung ab.

Diese Theorie ist bei der Verwendung spröder Werkstoffe als ausreichend anzusehen, deren Zerstörung infolge der Wirkung der Hauptzugspannungen entsteht (Absatz E des Kapitels 9.1).

Für plastische Werkstoffe (z. B. zähen Stahl) kommt bei der Berechnung oft die sogenannte dritte Festigkeitstheorie zur Anwendung, die in befriedigender Weise durch Versuche bestätigt worden ist. Gemäß dieser Theorie hängt die Festigkeit des Werkstoffs von den in ihm wirkenden größten Schubspannungen ab. Als Grenzwert des haltbaren Widerstandes der plastischen Werkstoffe ist gewöhnlich die Fließgrenze σ_F anzusehen, die auf Grund des Versuchs eines Probestabes auf einfachen Zug ermittelt wird. Der Sicherheitsgrad wird auch in bezug auf die Fließgrenze festgelegt. Da die größte Schubspannung beim Zug im Moment des Fließbeginns gleich $\frac{\sigma_F}{2}$ ist (in Schnitten unter 45°), so muß auch die zulässige Schubspannung gemäß der dritten Festigkeitstheorie gleich der Hälfte der zulässigen Normalspannung angenommen werden.

Es ist offensichtlich, daß die Festigkeitsbedingungen nach der ersten Theorie, $\sigma'_{max} \leqq \sigma_{zul}$, und nach der dritten Theorie, $\tau_{max} \leqq \sigma_{zul} \cdot \frac{1}{2}$, bei der Berechnung zu den gleichen Ergebnissen nicht nur beim einfachen Zug, sondern auch bei der reinen Biegung sowie bei Kombinationen reiner Biegung mit Zug oder Druck führen, da in allen diesen Fällen die größte Schubspannung gleich der Hälfte der Normalspannung in der am stärksten angespannten (in der äußersten) Faser sein wird. Aus diesem Grunde benutzten wir die erste Festigkeitstheorie in den vorhergehenden Berechnungen für Fälle der zusammengesetzten Beanspruchung. Bei der Biegung mit Drillung kann man auf diese Weise nicht vorgehen. Die auf Biegung mit Drillung beanspruchten Wellen aus zähem Stahl werden gewöhnlich nach der dritten Theorie berechnet.

Wenn wir mit τ_{zul} die zulässige Schubspannung bezeichnen, so wird die Festigkeitsbedingung einer Welle wie folgt aufgeschrieben:

$$\frac{\sqrt{M^2 + M_x^2}}{2W} \leqq \tau_{zul} = \frac{\sigma_{zul}}{2}. \qquad (10.30)$$

Wenn die Biegekräfte nicht in einer Ebene liegen, so muß man die Kräfte zerlegen und die einzelnen M_x- und M_y-Linien zeichnen (siehe Kapitel 10.3,

Absatz D). Hierbei ist es zweckmäßig, die Festigkeitsbedingungen der Welle in einem beliebigen Querschnitt in folgender Form aufzuschreiben:

$$\frac{\sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_z^2}}{W_p} \leqq \tau_{zul}. \tag{10.30a}$$

Aus dieser Formel kann man ersehen, daß die Berechnung einer runden Vollwelle oder Hohlwelle auf Biegung mit Drillung der Berechnung auf einfache Drillung auf Grund des zurückgeführten (reduzierten) Drillmoments $M_z^1 = \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_z^2}$ analog ist:

$$\frac{M_z^1}{W_p} \leqq \tau_{zul}$$ [1]).

Beispiel 59

Auf eine runde Welle, die in zwei Lagern gehalten ist, sind zwei Scheiben A und B mit gleich großem Durchmesser $D = 100$ cm und einem Gewicht von $P = 500$ kg aufgesetzt.

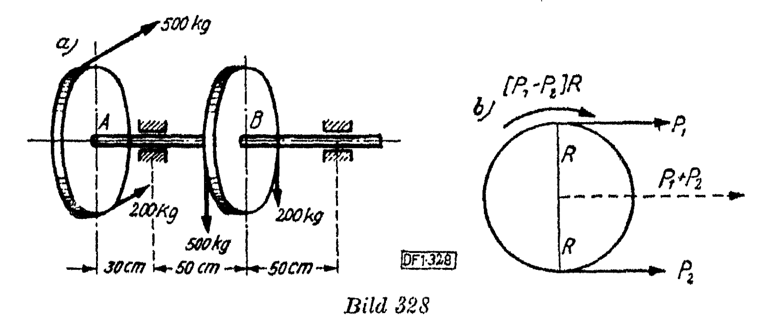


Bild 328

Die Antriebsriemen an der Scheibe A haben horizontale und die an der Scheibe B vertikale Richtung. Die Riemenzüge und die Abstände zwischen den Scheiben und Lagern sind in Bild 328, a angegeben. Es ist der Durchmesser der Welle bei einer zulässigen Schubspannung $\tau_{zul} = 400$ kg/cm² zu ermitteln.

Wenn die Züge der Trums der Riemenscheibenübertragung gleich P_1 und P_2 sind (Bild 328, b), so erhalten wir, indem wir diese Kräfte unter Hinzufügung der entsprechenden Kräftepaare auf die Wellenachse übertragen und die übertragenen Kräfte und Kräftepaare addieren, als Ergebnis der Addition die zur Wellenachse senkrechte Kraft $P_1 + P_2$ und das eine Drillung ausübende Kräftepaar $(P_1 - P_2) R$, worin R der Radius der Scheibe ist. Gemäß den Bedingungen unserer Aufgabe ist der Wert der von den Scheiben herrührenden und die Drillung ausübenden Kräftepaare gleich

$$M_z = (500 - 200) \cdot 0{,}5 = 150 \text{ kgm}.$$

Die Drillmomentenlinie der Welle und auch die auf die Welle wirkenden vertikalen und horizontalen Kräfte sowie die entsprechenden Biegemomentenlinien M_x (in der vertikalen Ebene) und M_y (in der horizontalen Ebene) sind in Bild 329 dargestellt. Mit Hilfe der Momentenlinien finden wir, daß der Querschnitt der Welle am linken Lager der gefährdete sein wird, wo das Drillmoment am größten ist:

$$M_z^1 = \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_z^2}.$$

---

[1]) M_z^1 stellt nichts anderes dar, als das Hauptmoment im Querschnitt des auf den Schwerpunkt des Querschnitts zurückgeführten Kräftesystems.

Setzt man die Werte M_x, M_y, M_z und τ_{zul} in die Formel (10.30a) ein, und nimmt man $W_p = 0{,}2\,d^3$ an, so ermitteln wir den erforderlichen Durchmesser der Welle:

$$\frac{\sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_z^2}}{W_p} = \frac{\sqrt{15000^2 + 21000^2 + 15000^2}}{0{,}2\,d^3} = 400\ \mathrm{kg/cm^2},$$

woraus sich $d_{erf} = 7{,}2$ cm ergibt.

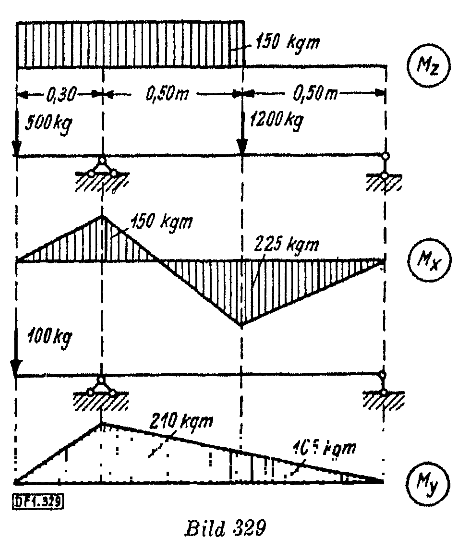


Bild 329

B. Die größten Schubspannungen bei der Drillung eines Balkens mit rechteckigem Querschnitt treten, wie im Kapitel 9.3 erwähnt, in den Mitten der längeren Seiten des Querschnitts auf und werden nach der Formel

$$\tau_{max} = \frac{M_z}{a\,b\,c^2}$$

ermittelt. Bedeutende Spannungen treten aber auch in den Mitten der kürzeren Seiten des Querschnitts auf, nämlich

$$\tau_1 = \frac{M_z}{a_1\,b\,c^2}.$$

Die Spannungen τ_{max} und τ_1 sind parallel zu den entsprechenden Seiten des Rechtecks gerichtet (Bild 330). Die Werte der von dem Verhältnis $\frac{b}{c}$ der Seiten des Querschnitts abhängenden Koeffizienten a und a_1 sind in der Tafel 12 (Kapitel 9.3) angegeben.

Bei einer zusammengesetzten Biegung des Rechteckbalkens ergeben sich die größten Normalspannungen in den Ecken des Rechtecks, wo die Schubspannungen gleich Null sind. Auf diese Weise fallen bei der gleichzeitigen Biegung und Drillung des Rechteckbalkens die Punkte des Querschnitts mit den größten Werten σ und τ im Gegensatz zu den runden Balken nicht zusammen. Daher muß man die Ermittlung der Hauptspannungen und der größten Schubspannungen in mehreren Punkten des rechteckigen Querschnitts durchführen.

In den charakteristischen Punkten A, B und C des Querschnitts (Bild 330) haben wir folgende Werte σ und τ:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{im Punkt } A & \sigma = \dfrac{M_y}{W_y} \quad \text{und} \quad \tau_{\max} = \dfrac{M_z}{a\,b\,c^2}; \\ \text{im Punkt } B & \sigma = \dfrac{M_x}{W_x} \quad \text{und} \quad \tau_1 = \dfrac{M_z}{a_1 b\,c^2}; \\ \text{im Punkt } C & \sigma_{\max} = \dfrac{M_x}{W_x} + \dfrac{M_y}{W_y} \quad \text{und} \quad \tau = 0. \end{array}\right\} \tag{10.31}$$

Wenn die Querkräfte Q_x und Q_y im Querschnitt einen großen Wert haben, so muß man zu den Spannungen $\tau_{\max}$ und τ_1 noch die Schubspannungen infolge der Querkräfte hinzufügen. Dann werden sich die summarischen Schubspannungen in den Punkten A und B entsprechend der Formel (6.26) wie folgt darstellen:

$$\tau_A = \frac{M_z}{a\,b\,c^2} \pm \frac{3Q_y}{2\,b\,c}, \quad \tau_B = \frac{M_z}{a_1\,b\,c^2} \pm \frac{3Q_x}{2\,b\,c}. \tag{10.32}$$

In dem größten Teil der Fälle sind die Schubspannungen infolge der Querkräfte gering und werden in der Berechnung nicht berücksichtigt. In den Punkten A und B des Rechteckquerschnitts kann man genau so wie beim runden Balken

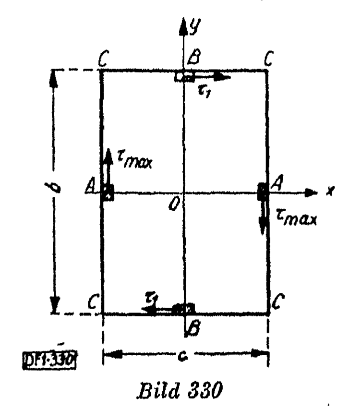


Bild 330

elementare dreikantige Prismen herausschneiden und sich davon überzeugen, daß die Hauptspannungen und die größten Schubspannungen in diesen Punkten nach den Formeln (10.27) bestimmt werden können, indem man in diese die entsprechenden Werte σ und τ aus (10.31) einsetzt. Was jedoch die elementaren Flächenelemente in den Punkten C des Rechteckquerschnitts anbetrifft, so sind sie offenbar als Hauptflächenelemente anzusehen, und die Normalspannungen an diesen sind die Hauptspannungen. Die größten Schubspannungen in diesen Punkten (an den unter 45° geneigten Flächenelementen) sind:

$$\tau'_{\max} = \frac{\sigma'_{\max}}{2}.$$

Wenn das Drillmoment M_z nicht groß ist, so kann es sich erweisen, daß die Spannungen in den Ecken des Rechteckquerschnitts von entscheidender Bedeu-

tung hinsichtlich der Festigkeit sein werden. Danach erhalten wir folgende Formeln der Hauptspannungen und der größten Schubspannungen in den charakteristischen Punkten des Querschnitts.

In den Punkten A:

$$\left.\begin{aligned} \sigma'_{\substack{\max\\ \min}} &= \frac{M_y}{2W_y} \pm \sqrt{\left(\frac{M_y}{2W_y}\right)^2 + \left(\frac{M_z}{abc^2}\right)^2}, \\ \tau'_{\max} &= \sqrt{\left(\frac{M_y}{2W_y}\right)^2 + \left(\frac{M_z}{abc^2}\right)^2}. \end{aligned}\right\} \tag{10.33}$$

In den Punkten B:

$$\left.\begin{aligned} \sigma'_{\substack{\max\\ \min}} &= \frac{M_x}{2W_x} \pm \sqrt{\left(\frac{M_x}{2W_x}\right)^2 + \left(\frac{M_z}{a_1bc^2}\right)^2}, \\ \tau'_{\max} &= \sqrt{\left(\frac{M_x}{2W_x}\right)^2 + \left(\frac{M_z}{a_1bc^2}\right)^2}. \end{aligned}\right\} \tag{10.34}$$

In den Ecken des Querschnitts:

$$\left.\begin{aligned} \sigma'_{\substack{\max\\ \min}} &= \frac{M_x}{W_x} \pm \frac{M_y}{W_y}, \\ \tau'_{\max} &= \frac{1}{2}\left(\frac{M_x}{W_x} \pm \frac{M_y}{W_y}\right). \end{aligned}\right\} \tag{10.35}$$

Die Festigkeit des Balkens kann man dann als gewährleistet ansehen, wenn diese Spannungen die zulässige Normalspannung σ_{zul} oder die zulässige Schubspannung $\tau_{zul} = \frac{\sigma_{zul}}{2}$ nicht überschreiten (in Abhängigkeit davon, ob das Material spröde oder plastisch beschaffen ist).

10.8 Kurbelwelle

Als einfachstes Beispiel einer Kurbelwelle ist die in Bild 331 dargestellte Kurbelwelle mit nur einer Kröpfung anzusehen. Sie besteht aus zwei Lagerzapfen, die sich auf die Lager A und B stützen, dem Kurbelzapfen C und zwei Backen D mit gewöhnlich rechteckigem Querschnitt. Auf den Kurbelzapfen wirkt der Druck der Pleuelstange, die die Welle dreht. Auf das Kragende eines der Lagerzapfen ist in der Nähe des Lagers eine Schwungscheibe mit einer Riemenübertragung aufgesetzt. Das vom Druck der Pleuelstange herrührende Moment in bezug auf die Kurbelwellenachse wird von dem von der Scheibe auf die Welle übertragenen Reaktionsmoment im Gleichgewicht gehalten. Hierbei erleiden Teile der Welle eine Biegung mit Drillung. Bei der Berechnung wird die Kurbelwelle als Balken mit einer gebrochen geführten Achse betrachtet, der in zwei Punkten, nämlich in den Lagermitten, gelenkig gelagert ist. Da die Länge der Lager verhältnismäßig groß ist, so ist die letztere Annahme als nur recht bedingt anzusehen. Außerdem sind die Abmessungen der Querschnitte aller Wellenteile nicht klein im Vergleich zu ihren Längen, so daß man sie nur angenähert als Balken betrachten kann.

Auf diese Weise ist die elementare Berechnung einer Kurbelwelle nur als grob angenähert anzusehen[1]). Bei der Berechnung einer Kurbelwelle muß man alle auf sie wirkenden Kräfte in Komponenten zerlegen, die in der Ebene des Kurbel-

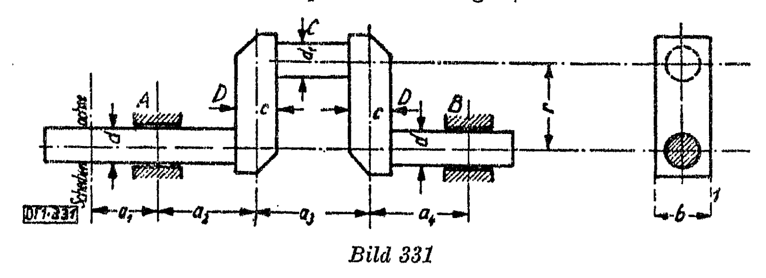


Bild 331

knies und in der senkrechten Ebene liegen sollen. Darauf ist es leicht, die entsprechenden Komponenten der Lagerstützdrücke zu finden und die Biege- und Drillmomente in den verschiedenen Abschnitten der Welle zu berechnen. Zum

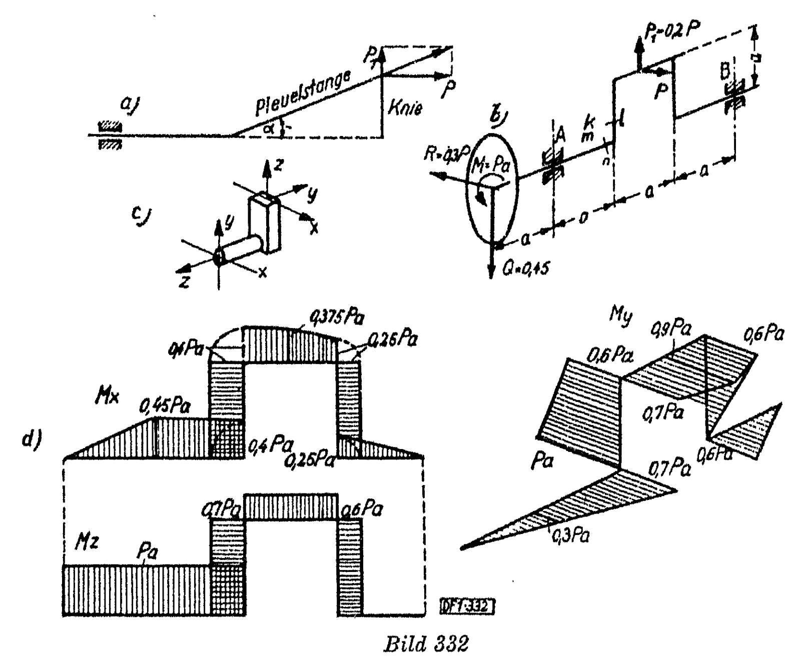


Bild 332

Auffinden der gefährdeten Kurbelwellenquerschnitte ist es vorteilhaft, die Biege- und Drillmomentenlinien aufzuzeichnen, wie dies oben bei der geraden Welle gemacht wurde.

In Bild 332, a ist das Schema einer Welle mit *einer* Kröpfung dargestellt, die sich in der zur Totlage senkrechten Lage befindet. Nehmen wir an, daß hierbei

[1]) Wie auch im allgemeinen bei einer Reihe von Berechnungen im Maschinenbau, wo man es mit kurzen Einzelteilen zu tun hat, die Theorie des angespannten Zustandes eines Balkens nur selten anwendbar ist.

$\operatorname{tg} \alpha = 0{,}2$ ist. Die horizontale Komponente des Triebstangendrucks bezeichnen wir mit P. Dann ist die Vertikalkomponente $P_1 = 0{,}2\,P$. Außer diesen zwei Kräften wirken auf die Welle das Gewicht der Scheibe Q und die horizontal gerichtete Resultierende der Riemenzüge R (Bild 332, b). Es soll $Q = 0{,}45\,P$ und $R = 0{,}3\,P$ sein. Die Längen aller Kurbelwellenteile sind der Einfachheit wegen gleich angenommen: $a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = r = a$ (Bild 331 und 332, b). Um für die Kurbelwellenteile die früher eingeführten Bezeichnungen der Biegemomente (M_x, M_y) und des Drillmoments M_z beibehalten zu können, muß man die Koordinatenachsen in den einzelnen Abschnitten so anordnen, wie dies im Bild 332, c gezeigt ist.

Nachdem man die Lagerstützdrücke (die vertikalen und horizontalen) ermittelt hat, ist es nicht schwer, die Momentenlinie zu zeichnen. Wenn man die Ordinaten der Biegemomente auf der Seite der gezogenen Faser abträgt, so muß man die M_y-Linie infolge der Wirkung der zur Ebene des Knies senkrechten Kräfte axonometrisch darstellen, so daß sie ein eigenartiges Aussehen erhält. Die M_x-, M_y- und M_z-Linien sind in Bild 332, d dargestellt. Es wird darauf hingewiesen, daß bei einer Änderung der Richtung der Achse um einen rechten Winkel das Biegemoment irgendeines Abschnitts in das Drillmoment des nächsten Abschnitts und umgekehrt übergeht. Dies erleichtert das Zeichnen und die Kontrolle der Linien.

In Bild 332, d ist sofort zu ersehen, daß der gefährdete Querschnitt der Backe der untere Querschnitt k—l derselben ist (Bild 332, b). An den Lagerzapfen ist der Querschnitt m—n der gefährdete und am Kurbelzapfen der Querschnitt in der Mitte der Zapfenlänge, wo der Druck der Pleuelstange angreift, da in diesen Querschnitten das zurückgeführte Moment M'_z am größten ist.

Die Überprüfung der Spannungen wird, wie im Kapitel 10.7 gezeigt, durchgeführt.

Hierbei muß an den Backen zu der Normalspannung infolge der Biegung eine Normalspannung infolge der Zugkraft $N = \frac{P_1}{2}$ hinzugefügt werden. Bei einem kleinen Wert von P_1 vernachlässigt man allerdings oft diesen Zusatz.

Außer der Berechnung für die zur Totlage senkrechte Lage führt man auch eine Berechnung für die Totlage der Welle selbst durch. Diese Berechnung ist einfacher, da alle Kräfte in der Ebene des Knies liegen.

Die Berechnung einer in drei oder mehr Lagern gehaltenen mehrfach gekröpften Kurbelwelle stellt eine statisch unbestimmte Aufgabe dar. Sie wird analog der Aufgabe eines durchlaufenden Balkens gelöst, wobei man annimmt, daß die Welle in den Mitten aller Lager frei gestützt ist. Eine derartige Lösung ist selbstverständlich wie dort nur als grobe Annäherung anzusehen.

11 Stabilität elastischer Gleichgewichtsformen. Knickung

11.1 Stabile und labile Gleichgewichtsformen

A. In diesem Kapitel werden wir uns mit der Untersuchung einiger Aufgaben befassen, die sich ihrem Wesen nach von all dem unterscheiden, womit wir uns in den vorhergehenden Kapiteln beschäftigt haben. Die Ermittlung der Spannungen, Formänderungen und Verschiebungen von Balken und Stäben bei verschiedenen Belastungsbedingungen wurde hauptsächlich zur Beurteilung der Festigkeit derselben als Teile irgendeiner Konstruktion durchgeführt. Hierbei betrachteten wir die Arbeit der Teile der betreffenden Konstruktion im Gleichgewichtszustand. Jetzt werden wir zu den Aufgaben übergehen, bei denen es nicht genügt, nur das Vorhandensein eines Gleichgewichts festzustellen, um direkt zu der Untersuchung der Festigkeit überzugehen. Aus der theoretischen Mechanik ist uns bekannt, daß man stabile und labile Formen des Gleichgewichts unterscheiden muß. Wenn wir bisher über das Gleichgewicht dieses oder jenes Konstruktionsteiles sprachen, so nahmen wir an, daß das Gleichgewicht als

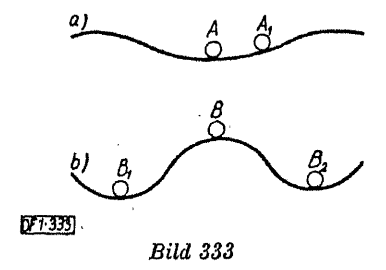


Bild 333

stabil anzusehen ist, und die Aufgaben, die bisher von uns gelöst wurden, entsprachen fast immer dieser Bedingung. Indessen sind in der Praxis des Ingenieurs die Fälle nicht selten, in denen man es mit labilen Formen des Gleichgewichts zu tun hat.

Bringen wir uns an einem Beispiel die Definition des stabilen und labilen Gleichgewichts in Erinnerung.

Nehmen wir an, daß wir einen stofflichen Punkt (Bild 333, a), z. B. eine Kugel, haben, die auf dem Boden irgendeiner Vertiefung liegt. Diese Kugel befindet sich im Zustand des *stabilen* Gleichgewichts. Wenn wir die Kugel von dieser Lage in irgendeine benachbarte Lage A_1 bringen und sie sich selbst überlassen, so wird sie beginnen, unter der Einwirkung der Schwerkraft hin- und herschwingende Bewegungen um die Gleichgewichtslage A auszuführen. Diese Bewegungen werden infolge des Einflusses verschiedener Widerstände jedoch allmählich abklingen, und schließlich kehrt die Kugel in ihre stabile Gleichgewichtslage zu-

rück. Wenn wir jedoch diese Kugel auf einen höher gelegenen Punkt B (Gipfelpunkt) irgendeiner wellig ausgebildeten Oberfläche setzen (Bild 333, b), so wird sie sich auch im Gleichgewicht befinden. Dieses Gleichgewicht der Kugel wird aber ein *labiles* sein. Bei einer nur sehr geringfügigen Abweichung der Kugel von der Gleichgewichtslage wird sie in Bewegung geraten, aber dann nicht mehr in die Anfangslage B zurückkehren, sondern hin- und herschwingende Bewegungen um die stabile Gleichgewichtslage ausführen, z. B. um B_1 oder B_2 in Bild 333, b.

Ein Körper kann sich nur theoretisch in der Lage des labilen Gleichgewichts befinden, da man ihn praktisch in dieser Lage nur äußerst selten halten kann, wie dies aus der alltäglichen Erfahrung bekannt ist. Hieraus ziehen wir die äußerst wichtige Folgerung:

Wenn sich der zu berechnende Konstruktionsteil auch im Gleichgewichtszustand befinden sollte, jedoch im Zustande des labilen Gleichgewichts, so verliert die weitere Festigkeitsberechnung dieses Teils jeden Sinn; der Teil wird unvermeidbar die Lage, bei der wir ihn berechnet haben, verlassen, und es kann seine Zerstörung oder sogar die der ganzen Konstruktion eintreten, aber nicht mehr infolge eines Festigkeitsmangels, sondern infolge seiner anfänglich labilen Lage.

Erläutern wir diesen Gedanken an einem sehr einfachen Beispiel.

Es sollen die größten Druckspannungen in einem vertikalen Stab von 1 m Länge mit einem Querschnitt von 1 cm² nachgeprüft werden, der mit seiner Grundfläche auf einer Ebene steht und sich nur unter der Einwirkung seines Eigengewichts befindet. Es bereitet hier keine Mühe, die größten Spannungen im unteren Querschnitt des Stabes zu finden. Es ist dabei vollkommen gleich, aus welchem Material der Stab auch bestehen mag (Stahl, Stein, Beton), wir werden uns stets davon überzeugen können, daß die Spannungen geringfügig sind und die Festigkeit unseres Stabes überhaupt nicht in Frage gestellt ist. Zugleich kann man leicht erkennen, daß bei den hier gegebenen Bedingungen die Festigkeitsberechnung selbst ihren Sinn verliert. Der Stab wird nämlich praktisch wegen seiner geringfügigen Stabilität nicht in der Gleichgewichtslage verbleiben und unvermeidbar umfallen. Hierbei kann er natürlich im Falle eines spröden Stabmaterials brechen. Für uns ist hierbei nicht die Tatsache der Zerstörung des Stabes selbst wichtig, da die Gefahr für denselben wegen des labilen Gleichgewichts schon vor der Zerstörung bestand und man daher vor der Lösung der Frage über die Festigkeit für die Stabilität des Gleichgewichts dieses Stabes Sorge tragen muß, wenn er als Teil irgendeiner Konstruktion dienen soll. Wichtig ist der Umstand, daß die Aufgabe über die Stabilität ihrem Wesen nach unabhängig von der Berechnung auf Festigkeit gelöst wird, wenn auch der äußeren Form nach die Berechnung auf Festigkeit und Stabilität manchmal miteinander recht verwandt erscheinen. Diese Sachlage ist äußerst wichtig zum klaren Verständnis der Aufgabe über die Knickung, die wir jetzt behandeln werden.

Bemerken wir noch folgendes. Das labile Gleichgewicht des Stabes in dem speziellen Falle, den wir hier eben betrachtet haben, ist ausschließlich durch seine Lage bestimmt und hängt nicht von den auf ihn wirkenden Kräften ab. Die in der Ingenieurpraxis vorkommenden Fälle des labilen Gleichgewichts zeichnen sich durch die Besonderheit aus, daß wir in manchen Konstruktions-

teilen bei einer Zunahme der wirkenden Kräfte über eine gewisse Grenze hinaus einen Übergang vom stabilen zum labilen Gleichgewicht haben. Dieser Umstand veranlaßt uns oft, sich gleichzeitig mit den Fragen sowohl der Festigkeit als auch der Stabilität zu befassen; hier besteht besonders die Gefahr der Verwechslung dieser beiden Fragen, was zu wesentlichen Fehlern führen kann.

B. Die erste der Aufgaben dieser Art ist schon im Jahre 1744 von *Euler* gelöst worden. Ihr Wesen besteht aus folgendem: Stellen wir uns einen geraden elastischen Stab vor, der sich unter der Einwirkung von zwei an seinen Enden wirkenden Kräften P im Zustand des Druckes befindet (Bild 334). Solange die Kräfte P eine gewisse Grenze nicht überschreiten, die von der Länge des Stabes, seinem Querschnitt und Materiai bestimmt wird, wird sich der Stab im Zustande des einfachen Druckes befinden, den wir schon ausreichend im Abschnitt 2 studiert haben. Wenn jedoch die Kräfte P diese Grenze überschreiten, so beginnt eine recht plötzliche Ausbiegung des Stabes. Dieser Fall der Biegung heißt *Knickung*. Der Wert der Druckkraft P, bei dem die Knickung beginnt, heißt die kritische Last, im weiteren mit P_k bezeichnet.

Solange die Druckkräfte den kritischen Wert nicht erreicht haben, erweist sich die gerade Form des Stabes als stabil. Wenn wir durch irgendwelche anderen Kräfte den Stab aus seinem geraden Zustand bringen, so wird er, falls er darauf sich selbst überlassen bleibt, wegen der Elastizität zu seiner ursprünglichen

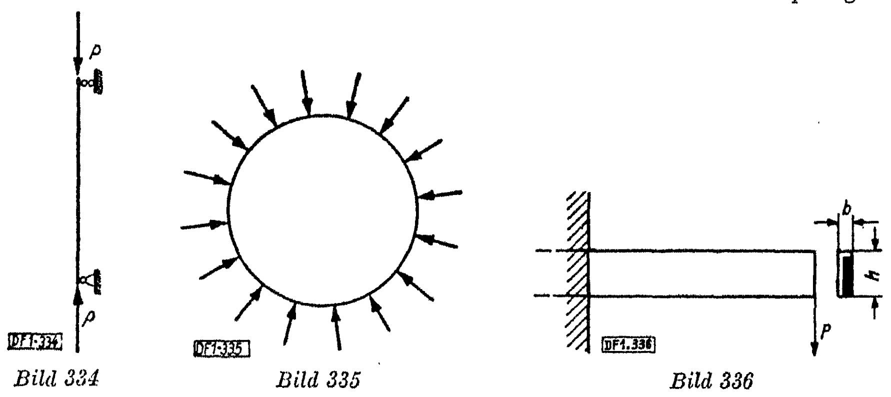


Bild 334 *Bild 335* *Bild 336*

Form zurückkehren. Folglich ist, solange $P < P_k$ ist, die Form des Gleichgewichts des Stabes stabil. Wenn jedoch $P > P_k$ ist, so gelingt es uns praktisch nicht, den Stab vor einem Ausbiegen zu bewahren.

Unter der Einwirkung einer ganz beliebigen geringfügigen Ursache wird er sich durchbiegen und eine neue gebogene Form annehmen, wobei diese letztere bei bestimmten Lastgrößen durchaus stabil sein kann.

Betrachten wir ein anderes Beispiel (Bild 335). Nehmen wir an, daß wir einen dünnen runden Ring haben, der unter der Einwirkung eines äußeren gleichmäßig an seinem Umfang verteilten Druckes p steht. Solange dieser Druck einen gewissen kritischen Wert p_k nicht überschreitet, wird die runde Form des Ringes stabil sein. Der Ring wird nach der Entfernung der Ursachen, die ihn zwangen, seine Form leicht zu verändern, stets zu seiner ursprünglichen Form zurück-

kehren. Wenn jedoch der Druck den kritischen Wert p_k überschreitet, so wird der Ring jedoch plötzlich eine elliptische Form annehmen.

Befassen wir uns jetzt mit dem Fall eines Kragträgers, der die Form eines dünnen hochstehenden Rechteckquerschnittes hat. Er ist mit dem einen Ende eingespannt und ist an dem anderen freien Ende belastet (Bild 336). Bisher waren wir gewohnt anzunehmen, daß sich ein derartiger Streifen in der vertikalen Ebene durchbiegen wird. Hier stellt es sich indessen heraus, daß zu der Grundbiegung eine Biegung des Querschnitts in der horizontalen Ebene hinzutritt, die eine Drillung des Querschnitts bewirkt, wenn die Last P einen gewissen kritischen Wert P_k überschreitet. Folglich erweist sich oberhalb der *kritischen Last* P_k die ebene Grundform der Biegung des Querschnitts als labil.

Kehren wir noch zu dem Fall der Biegung eines genieteten Stahlträgers mit einem dünnen Steg zurück. Wir hatten angenommen, daß sich bei der Biegung die Form des Trägerquerschnitts nicht ändert. Indessen erweist es sich, daß beim Überschreiten der Belastung über eine gewisse Grenze (kritische Belastung) hinaus sich die Form des Querschnitts infolge des seitlichen Ausbeulens des dünnen Steges recht scharf ändert.

Beschränken wir uns auf diese wenigen Fälle des labilen Gleichgewichts. Bemerken wir jedoch, daß in der heutigen Zeit in Verbindung mit der Entwicklung der Konstruktionsformen und ihrer Abmessungen der Ingenieur oft mit der Möglichkeit des labilen Gleichgewichts rechnen muß und Maßnahmen dagegen ergreifen muß, um seine Konstruktion vor unerwarteten Schäden zu bewahren, ungeachtet dessen, daß die durchgeführte vorherige Berechnung auf Festigkeit scheinbar keinen Grund gibt, dies zu befürchten.

11.2 Eulersche Aufgabe

A. In diesem Kapitel befassen wir uns nur mit dem ersten der im vorherigen Kapitel erwähnten Fälle. Andere Aufgaben dieser Art werden dann im zweiten Teil des Lehrbuchs behandelt.

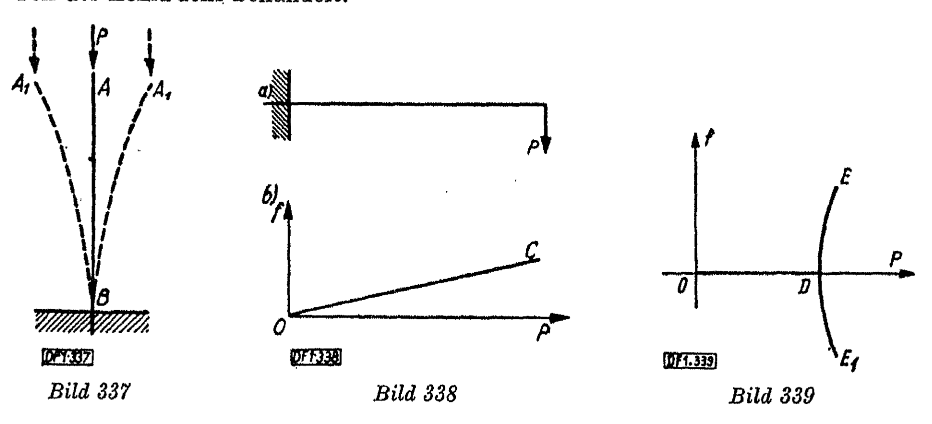


Bild 337 *Bild 338* *Bild 339*

Betrachten wir hier einen dünnen Stab AB (Bild 337), der mit dem unteren Ende eingespannt und am anderen Ende mit einer Last P belastet ist. Nehmen wir an, daß die Last genau in der Mitte des oberen Querschnitts A angreift und

parallel zur Stabachse gerichtet ist. Parallel hierzu wollen wir zunächst auch einen anderen Fall des gleichen Balkens im Auge behalten (Bild 338, a), bei dem die Last P *senkrecht* zur Achse gerichtet ist. In diesem letzteren Falle wird die Durchbiegung des Stabendes, wie uns bekannt [siehe Kapitel 7.2, Formel (7.17)], nach der Formel

$$f = \frac{Pl^3}{3EJ} = kP \quad \left(\text{wo } k = \frac{l^3}{3EJ} \text{ ist}\right)$$

bestimmt.

Wenn die Last P von Null beginnend zunimmt, dann nimmt die Durchbiegung f am Stabende proportional der Last zu, wie dies in Bild 338, b in Form einer geradlinigen graphischen Linie OC zum Ausdruck gebracht ist. Folglich trifft hier auch das Hookesche Gesetz zu, das die Werte P und f in Verbindung bringt. In dem in Bild 337 dargestellten Fall verläuft jedoch die Erscheinung, wie wir bereits gesagt haben, anders. Solange die Last P den kritischen Wert P_k nicht erreicht hat, gibt es noch keine Biegung, sondern der Stab bleibt gerade. Oberhalb der kritischen Last entsteht die Biegung jedoch plötzlich und beginnt äußerst schnell selbst bei einer nur geringfügigen Vergrößerung der Last P anzuwachsen.

Die Lösung dieser Aufgabe zeigt, daß die Durchbiegung des oberen Stabendes z. B. 22% der Stablänge erreichen kann, wenn die Last P den kritischen Wert im ganzen nur um etwa 1,5% überschreitet. Eine so starke Durchbiegung können wir allerdings bei unseren Konstruktionen nicht zulassen. (Hierbei setzen wir natürlich voraus, daß der Stab so dünn ist, daß selbst bei einer solchen Durchbiegung die Spannungen im Stab die Elastizitätsgrenze noch nicht überschreiten.)

In diesem Fall erhält die graphische Darstellung, die die Abhängigkeit zwischen der Last und der Durchbiegung des Endes ausdrückt, die in Bild 339 dargestellte Form, worin $OD = P_k$ die kritische Last ist. Vor Erreichen der kritischen Last fällt die graphische Linie auf der Strecke OD mit der OP-Achse zusammen. Bei Überschreitung der kritischen Last hat die graphische Aufzeichnung die Form einer Kurve EE_1, die zwei Zweige aufweist (da in dem in Bild 337 dargestellten Falle die Biegung des Stabes von der ursprünglichen Form AB aus auf beide Seiten hin gleich möglich ist). Wir stellen fest, daß in diesem Fall die graphische Aufzeichnung keine geradlinige Form hat und folglich P und f also nicht mehr durch das Gesetz der einfachen Proportionalität miteinander verbunden sind, wie dies für den Fall in Bild 338, a zutraf.

Wenn wir die Fälle gemäß Bild 337 und 338, a vergleichen, bemerken wir, daß die Richtungsänderung der Last in bezug auf die Stabachse die Eigenschaft der Aufgabe selbst wesentlich geändert hat[1]).

B. Versuchen wir den kritischen Wert der Last P_k zu ermitteln und, wenn möglich, die Kurve A_1B (Bild 337) zu finden, auf der sich der Stab beim Überschreiten der kritischen Last durchbiegt. Wenn die Hauptträgheitsmomente des Stabquerschnitts verschieden sind, so wird sich natürlich der Stab in der Ebene seiner geringsten Steifigkeit durchbiegen. Diese Steifigkeit bezeichnen wir mit EJ.

Wir nehmen an, daß die Durchbiegung sich eingestellt hat, und stellen die Differentialgleichung der elastischen Linie auf:

$$EJv'' = M.$$

[1]) Vgl. Bild 298, b des Kapitels 10.1.

Den Koordinatenanfang nehmen wir im Punkte A_1 (Bild 340) an, die x-Achse richten wir vertikal nach unten und die y-Achse nach rechts. Das Biegemoment M in dem im Abstande x von dem oberen Ende gelegenen Punkt ist

$$M = -Pv, \tag{11.2}$$

worin v die von der x-Achse aus nach links abgelesene Durchbiegung im gegebenen Punkt ist. Wir wollen uns hierbei merken, daß in der Formel (11.2) im wesentlichen alle Ursachen der Besonderheiten der vorliegenden Aufgabe enthalten sind, die sie von den in den Abschnitten 5 und 6 behandelten Fällen gewöhnlicher Biegung unterscheiden. Wir haben uns daran gewöhnt, daß das Biegemoment M eine Funktion der Abszisse des zu untersuchenden Querschnitts ist:

$$M = f(x).$$

In unserer Aufgabe jedoch hängt M von der Durchbiegung v ab, die als elastische Verschiebung anzusehen ist. Bisher haben wir den Einfluß der Formänderung auf die Kräfte M und Q im Querschnitt vernachlässigt. Hier kann man das offenbar nicht tun.

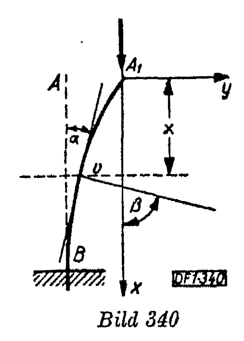


Bild 340

Aus dem Gesagten ziehen wir folgende äußerst wichtige Folgerungen: Erstens wird die Biegemomentenlinie durch die elastische Linie BA_1 (Bild 340) selbst dargestellt, und zweitens hat in unserer Aufgabe wegen der Abhängigkeit des Biegemoments von der Durchbiegung das Gesetz der Unabhängigkeit der Wirkungen keine Gültigkeit. Wenn wir zu der Last P irgendeine Last P_1 hinzufügen, so wird das Moment infolge der Summe dieser Lasten nicht mehr gleich der Summe der Momente infolge jeder Last im einzelnen sein, da in dem rechten Teil der Formel (11.2) beide Multiplikatoren P und v zunehmen.

Setzt man den Wert des Moments aus (11.2) in (11.1) ein, so erhalten wir

$$EJv'' = -Pv.$$

Dies ist die Differentialgleichung der elastischen Linie für unsere Aufgabe. Führt man die Bezeichnung

$$a^2 = \frac{P}{EJ} \tag{11.3}$$

ein, so bringen wir unsere Gleichung auf die Form

$$v'' + a^2 v = 0. \tag{11.4}$$

Diese Gleichung kann man entweder mit Hilfe der in der Theorie der linearen Differentialgleichungen dargelegten allgemeinen Methode integrieren oder mit Hilfe der Methode der *Trennung der Veränderlichen.*

Das allgemeine Integral derselben hat die Form:

$$v = C_1 \sin ax + C_2 \cos ax. \tag{11.5}$$

C. Zur Integration mit Hilfe der Methode der Trennung der Veränderlichen schreiben wir die Gleichung (11.4) wie folgt um:

$$v'' = -a^2 v.$$

Multipliziert man die Glieder derselben mit den Gliedern der offensichtlichen Indentität

$$v'\,dx = dv,$$

so erhalten wir

$$v''\,v'\,dx = -a^2\,v\,dv.$$

Beide Teile dieser Gleichung stellen vollständige Differentiale dar:

$$d\left(\frac{v'^2}{2}\right) = d\left(-a^2\,\frac{v^2}{2}\right).$$

Integriert man diese, so erhalten wir $v'^2 = D_1^2 - a^2 v^2$,

worin D_1^2 eine beliebige Konstante ist, die offenbar positiv sein muß. Die Gleichung schreiben wir wie folgt um:

$$v' = \frac{dv}{dx} = \pm\sqrt{D_1^2 - a^2 v^2} = \pm\, a\sqrt{\frac{D_1^2}{a^2} - v^2}.$$

Behalten wir nur das Pluszeichen vor der Wurzel bei, und trennen wir nochmals die Veränderlichen, dann ist

$$\frac{dv}{\sqrt{\frac{D_1^2}{a^2} - v^2}} = a\,dx.$$

Integriert man, so erhalten wir:

$$\arcsin\frac{av}{D_1} = ax + D_2,$$

worin D_2 die zweite beliebige Kostante der Integration ist. Aus dieser Gleichung erhalten wir

$$v = \frac{D_1}{a}\cos D_2\,\sin ax + \frac{D_1}{a}\sin D_2\,\cos ax = C_1\sin ax + C_2\cos ax;$$

hier sind mit C_1 und C_2 die neuen beliebigen Konstanten bezeichnet.

D. Zur Bestimmung der beliebigen Konstanten C_1 und C_2, die zu dem allgemeinen Integral (11.5) gehören, ziehen wir die Randbedingungen unseres Stabes in Betracht:

am oberen Ende bei:

$$x = 0 \text{ ist } v = 0, \tag{11.6a}$$

am unteren Ende bei:

$$x = l \text{ ist } v' = 0. \tag{11.6b}$$

Die erste dieser Bedingungen ergibt

$$C_2 = 0,$$

und die Gleichung der elastischen Linie erhält die Form

$$v = C_1\sin ax. \tag{11.7}$$

Differenziert man diese Gleichung, so erhalten wir:

$$v' = C_1 a\cos ax.$$

Bei Berücksichtigung der Bedingung (11.6b) ergibt sich hieraus:

$$C_1 a \cos al = 0. \tag{11.8}$$

Gemäß dieser Gleichung muß das Produkt der drei Multiplikatoren gleich Null sein. Demnach müssen wir drei Fälle untersuchen.

Erster Fall: $C_1 = 0.$

Wir finden aus der Gleichung (11.7), daß bei allen Werten von x die Durchbiegung $v = 0$ ist. Folglich wird der Stab AB unter der Einwirkung der Last gerade bleiben. Diese Lösung hätte man auch erhalten können, ohne sich der Integration der Differentialgleichung zuzuwenden. Sie ist a priori augenscheinlich und heißt die „triviale" Lösung. Im vorliegenden Fall interessiert sie uns nicht.

Zweiter Fall: $a = \sqrt{\frac{P}{EJ}} = 0.$

Hieraus ist: $P = 0,$

und aus (11.7) finden wir wie auch im ersten Fall, daß

$$v = 0 \quad \text{ist.}$$

Dieses Ergebnis weist darauf hin, daß beim Fehlen einer Last P der Stab gerade bleibt, d. h. wir erhalten ebenfalls eine triviale Lösung.

Dritter Fall: $\cos al = 0.$

Hieraus erhalten wir eine Reihe von Werten für al

$$al = \frac{\pi}{2}, \quad \frac{3\pi}{2}, \dots$$

Allgemein ist: $al = \frac{n\pi}{2},$

worin n eine ungerade Zahl ist.

Daher erhalten wir: $a^2 l^2 = \frac{n^2\pi^2}{4},$

d. h. $a^2 = \frac{n^2\pi^2}{4l^2} = \frac{P}{EJ}.$

Aus dieser Beziehung ermitteln wir die Last P:

$$P = \frac{n^2 EJ\pi^2}{4l^2}. \tag{11.9}$$

Nimmt man hier, wie früher erwähnt,

$$n = 1, 3, 5, \dots$$

an, so erhalten wir eine Reihe von Werten für die Last.

Kehren wir noch einmal zu dem Gang der von uns durchgeführten Überlegungen zurück. Wir hatten die beliebigen Konstanten C_1 und C_2 zu ermitteln. Die Konstante C_2 haben wir gefunden, aber die andere, zu der Gleichung der elastischen Linie (11.7) gehörige Konstante C_1 in dem betrachteten dritten Fall

blieb unbestimmt, und wir verfügen über keinerlei Unterlagen zu ihrer Ermittlung. Statt dessen fanden wir eine Reihe von Werten für die Last P [siehe die Formel (11.9)]. Der kleinste dieser Werte (bei $n = 1$) liefert uns nämlich den kritischen Wert der Last

$$P_k = \frac{EJ\pi^2}{4l^2}. \tag{11.10}$$

Dieser Wert der kritischen Last wurde erstmalig von *Euler* gefunden, und daher wird er manchmal auch Eulersche Knicklast genannt und mit P_E bezeichnet.

E. Wir ziehen den Schluß aus der von uns durchgeführten Ableitung und vermerken die folgenden Besonderheiten derselben:

Wenn auch erstens die Gleichung (11.7) zeigt, daß der Stab im Falle der Abweichung von der geraden Form sich in Form einer Sinuslinie durchbiegt, so blieb jedoch diese elastische Linie wegen der Unbestimmtheit des Koeffizienten C_1 unbestimmt. Indessen zeigt der Versuch, daß beim Überschreiten der kritischen Last jedem Wert der Last P eine bestimmte elastische Linie entspricht, die nur einen zweiwertigen Charakter hat (d. h. ein Abweichen des Stabes auf die linke oder rechte Seite). Die Unbestimmtheit der elastischen Linie ist offenbar als Mangel unserer Ableitung anzusehen.

Zweitens haben wir noch nicht bewiesen, daß der Wert der Last (11.10) der kritische ist. Diese beiden Mängel kann man leicht ausschließen, wenn man die Bedingung (11.6b) aufmerksamer betrachtet. Da wir angenommen haben, daß sich der Stab durchgebogen hat, so ist die Abszisse x des eingespannten Punktes B nicht mehr gleich l, wie wir voraussetzten, sondern ein wenig kleiner als dieser Wert. Demnach wird die Bedingung (11.6b) genauer wie folgt aufgeschrieben:

$$\text{bei} \quad x = l - \Delta \quad \text{ist} \quad v' = 0. \tag{11.11}$$

Hier ist Δ die Differenz zwischen der tatsächlichen Länge l des Stabes und seiner Projektion auf die x-Achse.

Wenn wir aber die am Stab angreifende Kraft P langsam verringern werden, so wird der Stab allmählich gerade werden. Hierbei wird Δ dem Nullwert zustreben. Der Grenzwert von Δ ist

$$\Delta = 0, \tag{11.12}$$

und die Bedingung (11.6b) wird vollständig genau, und der Stab wird geradlinig werden. Die Bedingung (11.6b) führt uns dann zu der Gleichung (11.8), aus der wir den Wert der Last (11.10) finden.

Hieraus ersieht man, daß die auf Grund der Formel (11.10) ermittelte Last eine Grenzlast ist, bei der der allmählich sich geradlinig ausrichtende Stab gerade wird. Folglich ist P_k tatsächlich als kritische Last anzusehen. Da der Stab hierbei geradlinig ist, so muß man ferner in der Gleichung der elastischen Linie desselben (11.7) $C_1 = 0$ setzen. Hierdurch wird die oben erwähnte Unbestimmtheit der Konstanten C_1 beseitigt.

Die hier angeführten Überlegungen zeigen, daß wir es in der ganzen Ableitung unter den Punkten A—D dieses Kapitels im Grunde genommen mit einem geraden Stab zu tun hatten. Der Begriff der Ausbiegung wies nur auf die Möglichkeit des Verlassens des geradlinigen Zustandes hin. Dabei wurde lediglich eine unendlich kleine Ausbiegung in Betracht gezogen. Hieraus folgt, daß bei der Er-

mittlung der kritischen Last (11.10) durch die Benutzung der angenäherten Gleichung der elastischen Linie an Stelle der genauen

$$\frac{EJv''}{(1+v'^2)^{3/2}} = M \tag{11.13}$$

keine Fehler hineingetragen wurden, und sein Wert ist in dieser Hinsicht ganz genau. Hier ist der Wert v' nicht mehr einfach ein kleiner Wert an sich, sondern vielmehr ein unendlich kleiner. Das Fortlassen dieses Wertes im Nenner zieht keine Fehler nach sich.

F. Hier ist allerdings noch eine wesentliche Feststellung zu treffen:

Alle vorhergehenden Folgerungen beziehen sich auf einen Stab, der durch eine genau in Achsenrichtung angreifende Last gedrückt wird; in der Praxis ist dies allerdings nicht zu verwirklichen. Wenn die Last auch nur mit einer sehr geringen Exzentrizität angreift, so wird eine Ausbiegung des Stabes sogar bei einer ganz geringfügigen Last vorhanden sein, die sich schon stark der Ausbiegungsform unter der kritischen Last nähert, ohne diese erst erreicht zu haben,

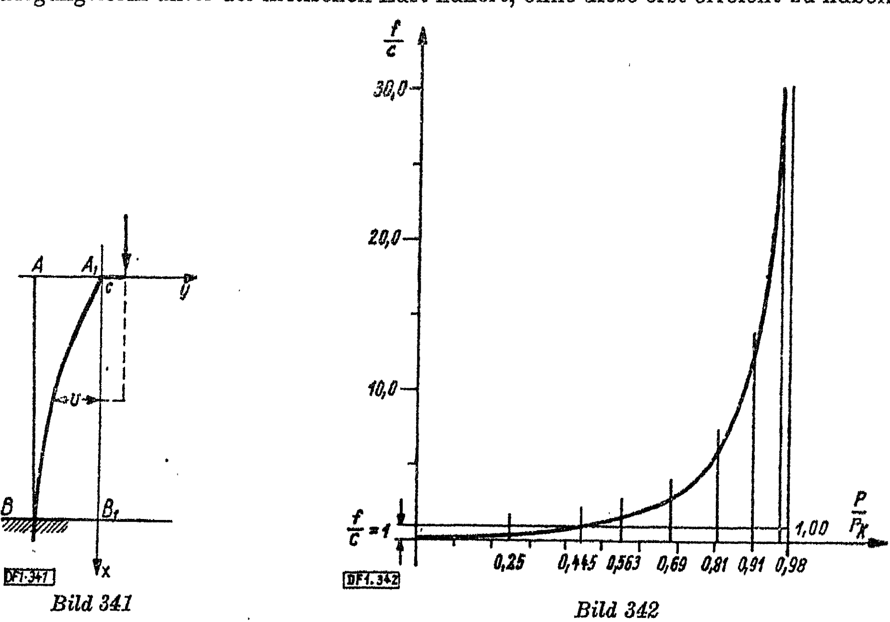


Bild 341

Bild 342

wie dies bei der Knickung unter genau zentrischer Last zutraf. Nehmen wir hier einmal an, daß die Last P mit einer geringen Exzentrizität c angreift (Bild 341). Dann ist das Moment im Querschnitt x

$$M = P(c - v). \tag{11.14}$$

An Stelle von (11.4) unter Punkt B des Kapitels 11.2 erhalten wir die Differentialgleichung

$$v'' + a^2 v = a^2 c, \tag{11.15}$$

worin

$$a^2 = \frac{P}{EJ} \tag{11.16}$$

ist.

Als partielle Lösung dieser Gleichung kann man offenbar die Form

$$v = c \tag{11.17}$$

annehmen, aber die allgemeine Lösung der entsprechenden homogenen Gleichung hat wie früher die Form (11.5) des Kapitels 11.2.

Daher ist die allgemeine Lösung unserer Gleichung:

$$v = C_1 \sin ax + C_2 \cos ax + c. \tag{11.18}$$

Die Randbedingungen behalten die Form (11.6a) und (11.6b) des Kapitels 11.2 bei; benutzt man diese, so finden wir leicht:

$$C_1 = -c \frac{\sin al}{\cos al}; \quad C_2 = -C_1 \tag{11.19}$$

und erhalten nach dem Einsetzen in (11.18) und einiger Umbildungen:

$$v = -c \left[\frac{\cos (al - ax)}{\cos al} - 1\right]. \tag{11.20}$$

Die Durchbiegung des oberen Stabendes $f = AA_1 = BB_1$ erhalten wir hieraus, indem wir $x = l$ setzen. Es ist:

$$f = -c \frac{1 - \cos al}{\cos al},$$

oder, wenn man (11.16) benutzt,

$$f = -c \frac{1 - \cos \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{P}{P_k}}}{\cos \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{P}{P_k}}}. \tag{11.21}$$

Die auf Grund der Formel (11.21) errechnete Tafel 13 zeigt die äußerst schnelle Zunahme der Durchbiegung des Stabendes beim Annähern der Last P an den kritischen Wert. In Bild 342 sind die Ergebnisse in Form einer graphischen Darstellung angegeben.

In ähnlicher Form erhält man auch gewöhnlich die Abhängigkeit zwischen der Last und der Durchbiegung des Stabendes beim Knickversuch wegen der unvermeidbaren, wenn auch geringfügigen Exzentrizität des Angriffs der Last P und auch wegen der unvermeidbaren anfänglichen Krümmung der Stabachse (eine anfängliche Krümmung des Stabes wirkt sich qualitativ ebenso wie die Exzentrizität der Last aus). Hieraus sieht man, daß die zulässige Last P beim Druck eines dünnen Stabes nicht nahe der kritischen Last liegen darf. Das Bild 342 zeigt, daß bei dem kleinsten in der UdSSR jetzt angenommenen Sicherheitsgrad für Stahlkonstruktionen von 1,5 (in bezug auf die Fließgrenze) wir

$$\frac{P}{P_k} = \frac{1}{1{,}5} \approx 0{,}67$$

und

$$\frac{f}{c} > 2$$

haben werden, d. h. die Durchbiegung übersteigt um mehr als das Zweifache die vorhandene Exzentrizität. Wenn die Exzentrizität im ganzen 0,001 der Stablänge ausmacht, so erhalten wir eine Durchbiegung

$$f > \frac{1}{500} l.$$

Tafel 13

Relative Durchbiegung des Stabendes bei einer Exzentrizität c

$\frac{P}{P_k}$	0,040	0,062	0,111	0,250	0,445	0,563	0,693	0,810	0,902	0,980
$\frac{f}{c}$	0,052	0,082	0,155	0,415	1,000	1,61	2,86	5,42	11,7	30,2

G. Die vorangegangene Untersuchung zeigt, daß zur vollständigen Vermeidung der unter Punkt E aufgeführten beiden Mängel unserer Ableitung es erforderlich ist, in die Differentialgleichung (11.1) den genauen Ausdruck der Krümmung

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{v''}{(1 + v'^2)^{3/2}}$$

einzuführen und die Bedingungen am unteren Ende des Stabes genau zu berücksichtigen. Das Lösen der auf diesem Wege erhaltenen Differentialgleichung ist recht kompliziert und führt zu elliptischen Integralen[1]). Diese genauere Lösung der Aufgabe zeigt, daß der kritische Wert der Knicklast (11.10) mit Hilfe der angenäherten Differentialgleichung (11.4) von uns richtig gefunden ist, und daß diese Methode es nur nicht ermöglicht, die elastische Linie des Stabes zu finden, wenn die Last P den kritischen Wert übersteigt.

Sehr vollständige Untersuchungen über die Knickung sind von Prof. *F. S. Jassinski*[2]) (siehe die vollständige Sammlung seiner Aufsätze) durchgeführt. Siehe auch *S. P. Timoschenko*[3]), „Die Stabilität der elastischen Systeme", Moskau 1946, und „Lehrbuch der Elastizitätstheorie", II. Teil, St. Petersburg 1916; Akad. *A. N. Dinnik*, „Die Knickung", Gosstroiisdat., Moskau 1939; *F. Bleich*, „Theorie und Berechnung der eisernen Brücken", Gosstroiisdat., Moskau 1931; *Hartmann*, „Die Stabilität der Ingenieur-Bauwerke", Gosstroiisdat. 1939.

11.3 Verschiedene Fälle der Befestigung von Stabenden

A. Der Fall der Befestigung eines Stabes (Bild 337) kommt in praktischen Berechnungen seltener vor. Am häufigsten hat man es dagegen mit einem Stab zu tun, der ähnlich wie ein einfacher Balken an beiden Enden gelenkig befestigt ist (Bild 343).

Diesen Fall kann man ebenfalls mit Hilfe des allgemeinen Integrals (11.5) des Abschnitts 11.2 lösen, indem man die entsprechenden Randbedingungen an den Enden A und B des Stabes einsetzt ($y = 0$ bei $x = 0$ und $x = l$). Das von uns benötigte Ergebnis kann man jedoch unmittelbar aus der schon durchgeführten Lösung eines mit einem Ende eingespannten Stabes erhalten, wenn man seine Aufmerksamkeit auf folgenden Umstand richtet (Bild 343). Da sich der Stab in Form einer Kurve durchbiegen wird, die in bezug auf die durch die Mitte der Stablänge gehende Achse DE symmetrisch ist, so wird die Tangente zur elastischen Linie im Punkt C vertikal sein. Folglich hat die obere Hälfte AC des

[1]) Vgl. den II. Teil des Lehrbuches.

[2]) Ф. С. Ясински, (см. полное собрание его сочинений).

[3]) С. П. Тимошенко, „Устойчивость упругих систем" Москва, 1946 и Теория и расчёт железных мостов". Гостройиздат. Москва 1931. Гартман, „Устойчивость инженерных сооружений", Гостройиздат. 1939.

Stabes die gleichen Bedingungen an den Enden wie auch der Stab in Bild 340. Hieraus kann man leicht schließen, daß die ganze von uns unter Punkt D des Abschnitts 11.2 durchgeführte Lösung unmittelbar auch auf unseren Fall angewandt werden kann, wenn man überall l durch $\frac{l}{2}$ ersetzt. So finden wir insbesondere an Stelle des Ausdrucks der kritischen Last (11.10)

$$P_k = \frac{EJ\pi^2}{4\left(\frac{l^2}{4}\right)} = \frac{EJ\pi^2}{l^2}, \tag{11.22}$$

d. h. wir erhalten eine um *viermal* größere kritische Last als im vorhergehenden Fall.

Auf ähnliche Weise können wir die kritische Last für einen an beiden Enden eingespannten Stab erhalten (Bild 344). Die elastische Linie wird in diesem Fall zwei Wendepunkte K und L in den Viertelpunkten der Stablänge aufweisen. Folglich wird jedes Stabviertel im einzelnen die gleichen Bedingungen an den

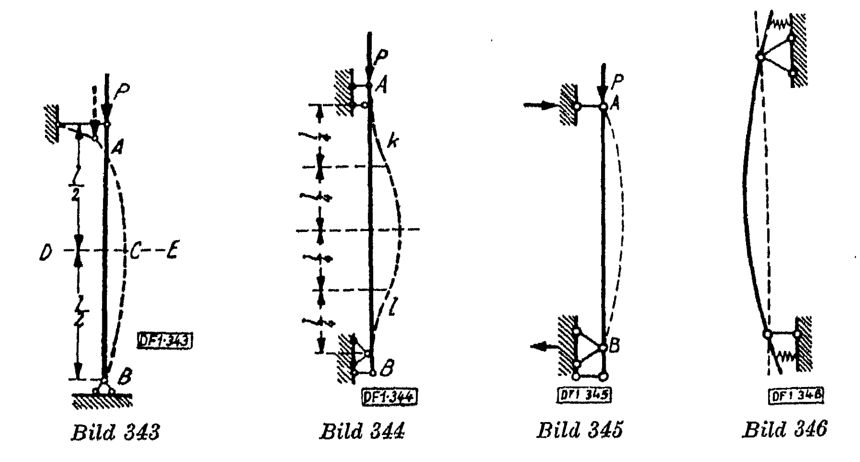


Bild 343 *Bild 344* *Bild 345* *Bild 346*

Enden haben wie der ganze Stab in Bild 340. Daher kann man die kritische Last wiederum unmittelbar aus der Gleichung (11.10) erhalten, indem man in dieser l durch $\frac{l}{4}$ ersetzt. Wir erhalten dann

$$P_k = \frac{EJ\pi^2}{4\left(\frac{l^2}{16}\right)} = \frac{4\,EJ\pi^2}{l^2}. \tag{11.23}$$

Die kritische Last hat sich also *16mal* größer ergeben als im Fall gemäß Bild 340.

B. In den beiden letzten Fällen haben wir den Wert der kritischen Last auf eine recht künstliche Methode erhalten. Es ist aber unmöglich, diese Methode bei anderen komplizierteren Fällen anzuwenden. Dies bezieht sich z. B. auf den in Bild 345 dargestellten Fall (das Ende B ist eingespannt und das Ende A gelenkig gelagert) und auf den Fall gemäß Bild 346, bei dem beide Enden elastisch ein-

gespannt sind. Im letzteren Fall nehmen wir an, daß die Drehung der Stabenden elastische Reaktionsmomente hervorruft, die proportional den Drehwinkeln sind. Im Hinblick auf die geringe Größe dieser Winkel ersetzen wir sie durch ihren Tangens, so daß wir an den Enden folgende Auflagermomente haben werden:

$$\left.\begin{aligned} M_A &= k\alpha = k v'_A, \\ M_B &= k\beta = k v'_B. \end{aligned}\right\} \tag{11.24}$$

Zur Erfüllung der Bedingungen an den Enden genügen uns in den beiden letzten Fällen die zum allgemeinen Integral (11.5) der Differentialgleichung (11.4) gehörigen zwei beliebigen Konstanten nicht. Dies entsteht dadurch, daß die Gleichung (11.1) des Kapitels 11.2 selbst nur als Zwischenintegral der Differentialgleichung der allgemeineren Form anzusehen ist. Die letztere erhalten wir, wenn wir die Gleichung

$$EJv'' = M \tag{11.25}$$

zweimal differenzieren und zwei andere Gleichungen

$$\frac{dM}{dx} = Q \tag{11.26}$$

und

$$\frac{dQ}{dx} = -q \tag{11.27}$$

beachten. Aus (11.25) finden wir

$$EJv^{\mathrm{IV}} = \frac{dQ}{dx}. \tag{11.28}$$

Ferner müssen wir den Ausdruck M aufstellen. Wenn sich an den Auflagern keine zur Achse des Stabes senkrechten Reaktionen ergeben (Bild 337, 343 und 344), so wird gemäß (11.2) $M = -Pv$ sein. Wenn solche Reaktionen jedoch vorhanden sind (Bild 345), so ist:

$$M = -Pv + Ax.$$

Wir erhalten in beiden Fällen jedoch:

$$\frac{dQ}{dx} = \frac{d^2M}{dx^2} = -Pv''.$$

Setzt man dies in (11.28) ein, so erhalten wir:

$$EJv^{\mathrm{IV}} = -Pv''$$

oder

$$v^{\mathrm{IV}} + \alpha^2 v'' = 0. \tag{11.29}$$

Diese Gleichung erhält man offenbar direkt aus (11.4) unter Punkt B des Kapitels 11.2 durch zweifache Differentiation. Um diese Gleichung zu integrieren, führen wir eine neue Funktion ein:

$$z = v''.$$

Dann erhält die Gleichung die Form:

$$z'' + a^2 z = 0.$$

Hieraus ist, wie uns bekannt,

$$z = v'' = C_1 \sin ax + C_2 \cos ax.$$

Integriert man diese Gleichung zweimal, so erhalten wir das allgemeine Integral der Gleichung (11.29)

$$v = D_1 \sin a x + D_2 \cos a x + D_3 x + D_4, \tag{11.30}$$

worin D_1, D_2, D_3 und D_4 beliebige Konstanten sind.

Zur Ermittlung dieser Konstanten bei beliebiger Befestigung der Stabenden erhalten wir vier Bedingungen, folglich kann die Aufgabe auf diesem Wege ungehindert sowohl in den in Bild 345 und 346 dargestellten Fällen als auch in den früher untersuchten Fällen (Bild 340, 343 und 344) gelöst werden.

C. Untersuchen wir als Beispiel den Fall gemäß Bild 345. Hier haben wir folgende Randbedingungen:

$$\begin{aligned}
&\text{bei } x = 0 \text{ ist } v = 0,\\
&\text{bei } x = 0 \text{ ist } EJv'' = M = 0, \text{ d. h. } v'' = 0,\\
&\text{bei } x = l \text{ ist } v = 0,\\
&\text{bei } x = l \text{ ist } v' = 0.
\end{aligned}$$

Setzt man in diese die Werte für v aus (11.30) ein, so erhalten wir vier Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned}
D_2 + D_4 &= 0,\\
D_2 &= 0,\\
D_1 \sin al + D_3 l &= 0,\\
D_1 a \cos al + D_3 &= 0.
\end{aligned}\right\} \tag{11.31}$$

Die beiden ersten Gleichungen ergeben

$$D_2 = D_4 = 0.$$

Die Gleichung der elastischen Linie (11.30) erhält dann die Form:

$$v = D_1 \sin a x + D_3 x. \tag{11.32}$$

[Hier ist festzustellen, daß diese Gleichung wegen des in ihr vorhandenen Gliedes $D_3 x$ nicht aus der Gleichung (11.5) des Kapitels 11.2 erhalten werden kann.]

Es verbleibt nun noch, die beiden letzten der Gleichungen (11.31) zu lösen. Sie sind homogen in bezug auf die Konstanten D_1 und D_3, und daher haben sie immer eine trivale Lösung:

$$D_1 = D_3 = 0.$$

Dann aber liefert (11.32) identisch $v = 0$,

d. h. der Stab kann gerade bleiben. Eine nicht trivale Lösung (D_1 und D_2 unterscheiden sich von Null) ist in dem Falle vorhanden, wenn die Determinante unserer Gleichungen gleich Null ist. Demnach

$$\begin{vmatrix} \sin al & l \\ a \cos al & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

oder

$$\sin al - al \cos al = 0,$$

d. h.

$$\operatorname{tg} al = al. \tag{11.33}$$

Aus dieser transzendenten Gleichung muß man al finden und darauf gemäß (11.3) des Kapitels 11.2 die kritische Last. Diese Gleichung kann man auf graphische Art lösen. Ihre kleinste Wurzel ist

$$al = 4{,}49.$$

Daraus ergibt sich $a^2 l^2 = 20{,}16$ und $a^2 = \frac{P}{EJ} = \frac{20{,}16}{l^2}$.

Hieraus ergibt sich die kritische Last zu:

$$P_k = \frac{20{,}16\, EJ}{l^2}.\,[1] \tag{11.34}$$

Analog wird die Aufgabe in dem in dem in Bild 346 dargestellten Fall gelöst. Um die Randbedingungen an den Enden bei elastischer Einspannung in endgültiger Form aufzuschreiben (11.24), muß man noch beachten, daß

$$M = EJv$$

ist. Dann erhalten wir aus (11.24)

$$\text{bei } x = 0 \text{ ist } v = 0 \text{ und } EJ = v = kv,$$

$$\text{bei } x = l \text{ ist } v = 0 \text{ und } EJ = v = kv;$$

weiter wird die Aufgabe dann ebenso wie im vorherigen Fall zu Ende gelöst.

D. In der Praxis begegnen wir fast nie Fällen der Befestigung, wie sie den Bildern 343 und 344 entsprechen. Die Enden des Stabes sind wohl etwas elastisch eingespannt, es gelingt jedoch nicht eine vollständige starre Einspannung wie in Bild 344 zu erreichen.

Daher wird in den am häufigsten in der Praxis vorkommenden Fällen die kritische Last einen gewissen Zwischenwert haben, nämlich zwischen

$$P_k = \frac{EJ\pi^2}{l^2},$$

der dem Bild 343 entspricht,

und

$$P_k = \frac{4\, EJ\pi^2}{l^2},$$

der dem Bild 344 entspricht.

Die tatsächlichen Arbeitsschemata des Stabes, die von einer gewissen Drehung der Stabenden begleitet sind, entsprechen daher besser dem Schema in Bild 346. Indem man sich nicht auf eine solche elastische Einspannung verläßt, nimmt man gewöhnlich bei Berechnungen das Schema in Bild 343 mit gelenkig gelagerten Enden an. Dieser Fall gilt als *Hauptfall der Knickung.*

Es wäre zu bemerken, daß für verschiedene Fälle der Lagerung der Stabenden die Eulersche Formel ebenso aufgeschrieben werden kann wie für den Hauptfall. nämlich

$$P_k = \frac{EJ\pi^2}{l^2},$$

jedoch muß man hierbei unter dem Wert l die *reduzierte Länge* (Berechnungslänge) verstehen, die für einen Stab mit einem eingespannten und einem freien Ende gleich der *doppelten* wirklichen Länge desselben ist [Formel (11.10)], mit zwei eingespannten Enden [Formel (11.23)] gleich der *halben* Länge und mit einem eingespannten und dem anderen gelenkig befestigten Ende [Formel (11.34)] gleich der *0,7fachen* Länge.

---

[1] *Anm. d. deutschen Redaktion:* Für diesen Knickfall kann man analog zu den vorherbetrachteten schreiben: $P_k = 2{,}05 \cdot \frac{\pi^2 \cdot E \cdot J}{l^2}$. Die kritische Last ist also rd. 8mal größer als im Fall gemäß Bild 340.

11.4 Anwendungsbereiche der Euler-Formel. Unelastische Knickung

A. Wie wir schon gesehen haben, bleibt der Stab bis zum kritischen Wert der Last noch gerade, d. h. er erleidet eine einfache Druckbeanspruchung.

Wir beschränken uns auf den Hauptfall und benutzen die Formel

$$P_k = \frac{EJ\pi^2}{l^2}, \tag{11.35}$$

indem wir daran denken, daß hier J der kleinste der Hauptträgheitsmomente des Stabquerschnittes ist. Führt man in diese den Trägheitsradius gemäß der Formel

$$J = F i^2$$

ein, und dividiert man die Gleichung (11.35) durch F, so erhalten wir die sogenannte *kritische Druckspannung*

$$\sigma_k = \frac{P_k}{F} = \frac{E i^2 \pi^2}{l^2} = \frac{E\pi^2}{\left(\frac{l}{i}\right)^2}. \tag{11.36}$$

Der Wert $\frac{l}{i}$, der im Nenner steht, heißt *Schlankheitsgrad* des Stabes und wird mit λ bezeichnet. Folglich hängt die kritische Spannung des Stabes mit gelenkig gelagerten Enden nur von den elastischen Eigenschaften des Materials (Modul E) und dem Schlankheitsgrade des Stabes ab.

Der Übergang zur kritischen Spannung σ_k stellt auch gerade die Gefahr der Verwechslung der Begriffe der Festigkeit und Stabilität dar, über die wir unter Absatz A des Kapitels 11.1 sprachen. Es handelt sich darum, daß wir bisher den Begriff der Spannung eng mit den Berechnungen auf Festigkeit verbunden haben, und daher z. B. die Druckspannung σ mit der zulässigen Spannung des gegebenen Materials verglichen.

Indessen müssen wir die kritische Spannung σ_k von einem vollständig anderen Gesichtspunkt betrachten. Wie klein man diese Spannung auch gemäß der Formel (11.36) erhalten mag, so wird sie für einen in der Längsrichtung gedrückten Stab die gleiche Gefahr darstellen wie die Festigkeitsgrenze (Bruchgrenze) beim einfachen Zug bzw. Druck, denn sie ergibt sich beim kritischen Wert der Last, und wir haben darauf hingewiesen, daß sogar bei einer geringfügigen Überbelastung des Stabes über die kritische Last hinaus die Durchbiegungen schnell katastrophale Werte erreichen und eine Zerstörung des Stabes nach sich ziehen können. In Abhängigkeit von der Länge des Stabes und seines Querschnitts (beide Faktoren gehören zu dem Ausdruck des Schlankheitsgrades) kann die kritische Spannung verschiedene Größen haben, sie ist aber immer ebenso gefährlich wie die Bruchgrenze.

B. Jetzt befassen wir uns mit der Frage, in welcher Beziehung die kritische Spannung zu der Elastizitätsgrenze steht, die wir als Grenze des haltbaren Materialwiderstandes anzusehen pflegten. Zu diesem Zweck zeichnen wir ein Diagramm (Bild 347), das die Abhängigkeit der kritischen Spannung (11.36) vom Schlankheitsgrad ausdrückt. Indem wir

$$\frac{l}{i} = x \quad \text{und} \quad \sigma_k = y$$

bezeichnen, erhalten wir die Gleichung $y = \frac{E\pi^2}{x^2}$,

die eine Hyperbel A_1B dritter Ordnung ausdrückt, aus der hervorgeht, daß die kritische Spannung mit der Zunahme des Schlankheitsgrades sehr schnell abnimmt (Bild 347). Diese Kurve heißt die *Euler-Kurve* oder *Euler-Hyperbel.*

Die Gerade A_2A_1, d. h., $y = \sigma_y$ entspricht der Proportionalitätsgrenze des Materials, die man, wie wir wissen, praktisch als mit der Elastizitätsgrenze zusammenfallend annehmen kann. Die *Euler-Kurve* schneidet diese Gerade in einem gewissen Punkte A_0. Aus der Zeichnung ersehen wir, daß die kritische Spannung kleiner als die Elastizitätsgrenze ist, wenn der Schlankheitsgrad größer als der Abszissenwert OA des Punktes A_0 ist. Dies bedeutet, daß beim Entstehen der Knickung der Stab noch elastisch bleibt und alle unsere Ableitungen ihre Gültigkeit behalten.

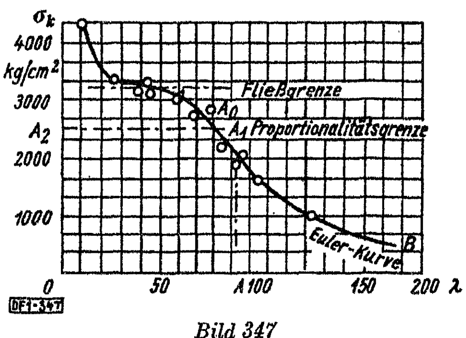


Bild 347

Wenn sich jedoch der Schlankheitsgrad kleiner als der Wert OA erweist, so wird die kritische Spannung größer als die Elastizitätsgrenze sein, d. h. $\sigma_k > \sigma_y$. Folglich wird die Fließgrenze des Materials erreicht, bevor die Knickung des Stabes auftritt. Die Knickung wird also außerhalb der Elastizitätsgrenze vor sich gehen, und die vorhergehenden Ableitungen verlieren ihre Gültigkeit, da diesen das Hookesche Gesetz zugrunde gelegt wurde, das aber nur bis zur Elastizitätsgrenze zu Recht besteht.

Folglich kann die *Euler-Kurve* A_0B nur rechts vom Punkt A_0 zur Anwendung kommen. Der Schlankheitsgrad $\lambda = OA$, der diesem Punkt entspricht, kann für jeden Werkstoff leicht gefunden werden, wenn man den Modul E und die Proportionalitätsgrenze σ_p kennt. Setzt man in (11.36) $\sigma_k = \sigma_p$, so erhalten wir

$$\frac{l}{i} = \pi \sqrt{\frac{E}{\sigma_p}}. \tag{11.37}$$

So haben wir z. B. bei dem im Bauwesen gewöhnlich zur Anwendung kommenden Stahl ein

$$E = 2{,}1 \cdot 10^6 \text{ kg/cm}^2$$

und eine Proportionalitätsgrenze $\sigma_p = 2100 \text{ kg/cm}^2$,

und aus (11.37) finden wir $\frac{l}{i} \approx 100$[1]).

[1]) *Anm. d. deutschen Redaktion:* Dieser Wert hat in Deutschland für die Stahlsorten St 37 und St 52 ebenfalls Gültigkeit.

Auf diese Weise kann man im Falle von Stäben aus Stahl die Euler-Formel (11.22) bei Schlankheitsgraden $\lambda \geqq 100$ anwenden. Wenn der Schlankheitsgrad des Stabes jedoch kleiner als der Grenzwert (11.37) ist, so kann man auf Grund des Gesagten scheinbar folgern, daß man in diesem Fall die Berechnung des Stabes auf einfachen Druck durchführen muß, da die Elastizitätsgrenze früher erreicht wird als die kritische Spannung nach der Euler-Formel. Wenn dies so wäre, so wäre der Punkt A_0 in Bild 347 ein Trennpunkt, wobei links von diesem der Berechnungsbereich auf Festigkeit (die Gerade A_2A_1) und rechts davon der Berechnungsbereich auf Stabilität (die Euler-Kurve A_0B) liegen würde. In Wirklichkeit ergibt sich jedoch eine ganz so scharfe Trennung dieser Bereiche nicht. Wie der Versuch nämlich gezeigt hat, dauert die Erscheinung der Knickung auch außerhalb der Elastizitätsgrenze noch fort.

C. Hier beleuchten wir nur kurz den äußerst interessanten Versuch Prof. *Engessers*, eine Knicktheorie außerhalb der Elastizitätsgrenze aufzubauen. Das Wesentliche seiner Überlegungen besteht im folgenden[1]).

Nehmen wir an, daß sich die kritische Spannung höher als die Elastizitätsgrenze σ_y ergeben hat. Dann tritt wegen des labilen Zustandes der geraden Form des Stabes seine Krümmung auf. Hierbei ergibt sich, wie wir dies schon aus der Biegetheorie kennen, in dem einen Teil der Fasern eine zusätzliche Druckspannung und in den anderen Fasern eine Zugspannung. In dem ersteren Falle wird sich die Grunddruckspannung wegen der auftretenden Biegeerscheinung vergrößern, und diese Fasern werden schon bei veränderlichem Elastizitätsmodul arbeiten, wie dies aus dem Zugdiagramm (Bild 26, Kapitel 2.04) zu ersehen ist. In den Fasern jedoch, in denen infolge der Biegung eine zusätzliche Zugspannung entsteht, ergibt sich eine gewisse Verminderung der Grunddruckspannung, d. h. sie werden ein wenig entlastet. Wie wir schon wissen, folgt das Material bei der Be- und Entlastung dem Hookeschen Gesetz mit dem gleichen Elastizitätsmodul E innerhalb des Bereiches unter der Proportionalitätsgrenze. Im Endergebnis wird also ein Teil der Fasern des Stabes bei konstantem Elastizitätsmodul arbeiten, ein Teil dagegen bei veränderlichem Modul. *Engesser* hat, indem er von diesen Überlegungen ausging, nachgewiesen, daß man auch oberhalb der Elastizitätsgrenze der Formel der kritischen Spannung die gleiche Euler-Form (11.22) geben kann, wenn man in dieser den Modul E durch einen anderen sowohl von dem Grundmodul E als auch von der Spannung σ_k abhängigen Wert E_1 ersetzt.

Prof. *Karmann* konstruierte eine solche Kurve für Stahl, wobei es sich herausstellte, daß diese *Engesser-Kurve* mit den Versuchsergebnissen nahe übereinstimmte. Die Form der *Engesser-Kurve* ist in Bild 347 dargestellt. Wir bemerken, daß links vom Punkt A_0, der der Proportionalitätsgrenze entspricht, diese Kurve im Vergleich zur *Euler-Kurve* eine verlangsamte Zunahme der kritischen Spannung aufweist. Diese Verlangsamung erstreckt sich bis zur Fließgrenze, worauf die kritische Spannung wiederum schnell anzuwachsen beginnt. Der sich infolgedessen auf der *Engesser-Kurve* ergebende Wendepunkt erklärt sich dadurch, daß sich bei geringen Werten des Schlankheitsgrades der Widerstand des Stabes aufs neue erhöht (siehe Bild 27 den Abschnitt des Diagramms rechts vom Punkt 4).

Durch die beschriebenen Eigenschaften der Knickung verliert sich, wie wir eben gesagt haben, die scharfe Grenze zwischen den Berechnungsbereichen auf

[1]) Die Theorie *Engessers* ist im II. Teil des Lehrbuchs dargestellt.

Festigkeit und Stabilität. Dieser Umstand regte zu einer Reihe von Versuchen an, eine Formel so aufzubauen, daß sie diese beiden Bereiche erfaßt und es ermöglicht, sowohl die kurzen gedrungenen Stäbe (mit *geringem* Schlankheitsgrad) als auch die langen schlanken (mit *großem* Schlankheitsgrad) auf Druck zu berechnen. Zur Zeit gibt es eine Reihe ähnlicher Formeln (siehe *Timoschenko*, Festigkeitslehre, Band II, § 47). Diese Formeln sind in einer Reihe von Ländern in die Normen aufgenommen worden, die im Bauwesen zur Anwendung kommen. Gegenüber allen ähnlichen Formeln muß man jedoch den richtigen Standpunkt wie gegenüber empirischen Formeln einnehmen, die nur streng in den Grenzen zutreffen, für die sie abgeleitet wurden. Übrigens ist die Existenz dieser Formeln sehr oft die Ursache zur prinzipiellen Verwechslung der Begriffe der Festigkeit und der Stabilität, wovor wir den Leser schon mehrfach gewarnt haben. Kompliziertere Fälle des Stabilitätsverlustes sind im zweiten Teil des Lehrbuchs behandelt.

11.5 Praktische Methoden der Knickberechnung

A. Es ist klar, daß man bei der praktischen Lösung der Querschnittswahl eines gedrückten Stabes, der der Knickung unterworfen ist, das Auftreten einer Knickspannung (der kritischen Spannung) im Stab nicht zulassen darf und einen gewissen Sicherheitsgrad einführen muß.

Der Sicherheitsgrad bei der Knickung wird für den größten Teil der Werkstoffe (in bezug auf die kritische Spannung) wie auch im Fall des einfachen Drucks angenommen, d. h. gleich dem Verhältnis der Bruchgrenze zu der zulässigen Spannung:

$$\nu_B = \frac{\sigma_B}{\sigma_{d_{zul}}}.$$

Auf diese Weise ist die zulässige Spannung bei der Knickung gleich der kritischen Spannung dividiert durch den Sicherheitsgrad:

$$\sigma_{zul} = \frac{\sigma_k}{\nu_B}.$$

Für den Fall, daß die Knickung im *elastischen Bereich* vor sich geht, d. h. bei einem Schlankheitsgrad $\frac{l}{i} \geqq \pi \sqrt{\frac{E}{\sigma_p}}$, wird die kritische Spannung auf Grund der *Euler-Formel*

$$\sigma_k = \frac{E\pi^2}{\left(\frac{l}{i}\right)^2}$$

ermittelt.

Bei Schlankheitsgraden $\frac{l}{i} < \pi \sqrt{\frac{E}{\sigma_p}}$, d. h. im Falle unelastischer Knickung, kann die kritische Spannung σ_k entweder bei Benutzung der Untersuchungsergebnisse von *Engesser* und *Karmann* oder auf Grund empirischer Formeln gefunden werden, die als Ergebnis der Bearbeitung der Unterlagen einer großen Zahl von Versuchen aufgestellt wurden.

Eine recht weite Verbreitung hat die Formel von *V. Tetmajer-Jassinski*[1]) gefunden, die auf Grund einer großen Zahl von Versuchen abgeleitet worden ist. Für Baustahl hat diese Formel die Form:

$$\left.\begin{aligned} \sigma_k &= \left(3100 - 11{,}4\,\frac{l}{i}\right)\,\mathrm{kg/cm^2} \\ \text{und für Holz:}\qquad \sigma_k &= \left(293 - 1{,}94\,\frac{l}{i}\right)\,\mathrm{kg/cm^2}. \end{aligned}\right\} \tag{11.38}$$

Die zulässige Spannung bei der Knickung $\sigma_{\text{zul}} = \dfrac{\sigma_k}{\nu_B}$ ist kleiner als die zulässige Grundspannung auf Druck $\sigma_{d_{\text{zul}}} = \dfrac{\sigma_B}{\nu_B}$, da die kritische Spannung σ_k immer kleiner als die Bruchgrenze σ_B ist.

Es ist offensichtlich, daß die zulässige Spannung bei der Knickung nur einen bestimmten Teil der zulässigen Grundspannung auf Druck ausmachen darf

$$\sigma_{\text{zul}} = \sigma_{d_{\text{zul}}} \cdot \varphi, \tag{11.39}$$

worin der Koeffizient φ immer kleiner als 1 ist und Verkleinerungskoeffizient der zulässigen Spannung bei der Knickung heißt. Kennt man die kritische Spannung des gegebenen Stabes und seine Bruchgrenze, so kann man den Koeffizienten φ berechnen:

$$\varphi = \frac{\sigma_{\text{zul}}}{\sigma_{d_{\text{zul}}}} = \frac{\sigma_k}{\nu_B\,\sigma_{d_{\text{zul}}}} = \frac{\sigma_k}{\sigma_B}.$$

Für Knickstäbe aus Stahl wird der Sicherheitsgrad gewöhnlich im Verhältnis zur Fließgrenze festgelegt; z. B. ist für Stahl Ст. 2

$$\nu_F = \frac{\sigma_F}{\sigma_{d_{\text{zul}}}} = \frac{2100}{1400} = 1{,}5.$$

Dieser Koeffizient berücksichtigt allerdings nicht den Einfluß einer ganzen Reihe zusätzlicher Umstände, die die Knickung begleiten und eine wesentliche Bedeutung bei dünnen Stahlstäben haben.

Als einer der zusätzlichen Hauptumstände ist die Exzentrizität des Angriffs der Druckkräfte anzusehen, die in der Praxis stets vorhanden sein wird, da es schwer ist, eine solche Idealkonstruktion herzustellen, bei der die Druckkräfte genau längs der Stabachsen gerichtet sind. Große Exzentrizitäten müssen bei der Berechnung berücksichtigt werden (Kapitel 10.4). Kleine Exzentrizitäten jedoch, die von den Ungenauigkeiten der Ausführung und der Montage abhängen, können in der Berechnung nicht erfaßt werden. Diese Dinge werden durch zusätzliche Sicherheitsgrade berücksichtigt[2]).

Der Koeffizient ν', der das Auftreten einer Exzentrizität berücksichtigt, schwankt bei Stahlkonstruktionen von 1 bis 1,4 (Bild 348). Sein Maximum entspricht den mittleren Schlankheitsgraden $\lambda \approx 90$.

Der volle Sicherheitsgrad ν für Stahlstäbe, der gleich dem Produkt der Koeffizienten ν_F und ν' ist, ändert sich von $\nu = 1{,}5 \cdot 1 = 1{,}5$ bis $\nu = 1{,}5 \cdot 1{,}4 = 2{,}1$

---

[1]) Ф. С. Ясинский. „Собрание сочинений“, Петербург, 1902 г. (*F. S. Jassinski*, „Sammlung von Aufsätzen“, Petersburg 1902).

[2]) Eine umfassende Untersuchung zur Bestimmung des Sicherheitsgrades bei der Knickung ist von Prof. Н. А. Стрелецки „Основы металлических конструкций“. I. 1940, Госстройиздат. (*N. A. Strelezki*, „Grundlagen der Metallkonstruktionen“, Band I, 1940, Gostroiisdat.) durchgeführt.

in Abhängigkeit vom Schlankheitsgrad des Stabes. Der Verkleinerungskoeffizient der zulässigen Spannung für Stahl ist bei ermitteltem Sicherheitsgrad gleich

$$\varphi = \frac{\sigma_{zul}}{\sigma_{d_{zul}}} = \frac{\sigma_k}{\nu_F\,\nu'\,\sigma_{d_{zul}}} = \frac{\sigma_k}{\nu'\,\sigma_F}.$$

Für Zwecke der Praxis werden Diagramme oder Tafeln des Koeffizienten φ für verschiedene Schlankheitsgrade der Stäbe zusammengestellt, und die Berechnung der auf Knicken beanspruchten Bauelemente[1]) wird auf Grund der üblichen Festigkeitsformel auf Druck bei herabgesetzter zulässiger Spannung durchgeführt:

$$\sigma = \frac{P}{F} \leqq \sigma_{d_{zul}} \cdot \varphi. \tag{11.40}$$

In Tafel 14 sind die Koeffizienten φ der Haupt-Baustoffe Stahl, Gußeisen und Holz aufgeführt. Falls in der Tafel der genaue Wert des Schlankheitsgrades des zu untersuchenden Stabes nicht vorhanden ist, wählt man einen Zwischenwert auf Grund linearer Interpolation.

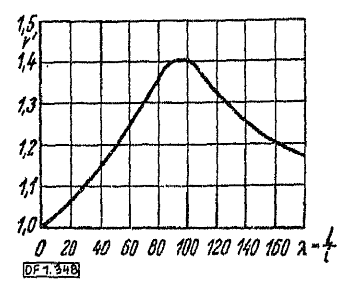


Bild 348

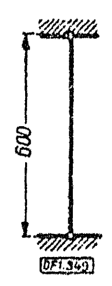


Bild 349

B. Beispiel 60[2])

Es ist die kritische und zulässige Belastung sowie der Verkleinerungskoeffizient der zulässigen Spannung φ für eine Stütze aus Holz von 6,0 m Höhe mit Rundquerschnitt zu ermitteln.

---

[1]) *Anm. d. deutschen Redaktion:* In Deutschland werden Druckberechnungen nach dem sog. ω-Verfahren durchgeführt gemäß der Beziehung $\sigma = \omega \cdot \frac{P}{F} \leqq \sigma_{d_{zul}}$, wobei ω eine Knickzahl (Knickbeiwert) bedeutet. Die ω-Zahlen sind für Holz, Stahl St 37 und Stahl St 52 verschieden und tabellarisch in den Normen DIN 1052 und DIN 4114 aufgeführt.

[2]) *Anm. d. deutschen Redaktion:* Das Beispiel 60 ist gemäß den sowj. Normen durchgeführt. Nach den deutschen Vorschriften würde sich nachfolgende Berechnung ergeben: Gegeben ist eine Rundholzstütze ∅ 20 von $h_s = 6{,}00$ m Höhe. Gesucht ist die kritische und die zulässige Belastung.

$$F = 314{,}2\ \text{cm}^2$$

$$i = \frac{d}{4} = 5{,}0\ \text{cm}$$

$$\lambda = 600/5 = 120 < 150$$

$$\omega = 4{,}55\ \text{(aus Taf. 4, DIN 1052, § 12)}$$

Aus $\sigma = \omega \cdot \frac{P}{F} \leqq \sigma_{d_{zul}} = 85\ \text{kg/cm}^2$ (Nadelholz, Gütekl. II) folgt

$$P_{zul} = \frac{F \cdot \sigma_{d_{zul}}}{\omega} = \frac{314{,}2 \cdot 85}{4{,}55} = 5870\ \text{kg (zul. Belastung)}.$$

Bei einer Knicksicherheit von etwa $\nu \approx 3{,}7$ (Ablesung aus Diagramm) erhält man als *kritische Belastung* $P_K \approx 5870 \cdot 3{,}7 =$ *21700* kg (oder genauer nach der Euler-Formel wie oben angegeben $P_K = 21800$ kg). Nachsatz: Die Knicksicherheit ist gemäß den deutschen amtlichen Bestimmungen $\nu = 3{,}5$ bei $\lambda = 0$ bis 100; von $\lambda = 100$ bis 200 steigt ν bis auf 4,5. Zur Vermeidung übergroßer Schlankheiten darf bei Holz λ den Wert von 150 (bei Dauerbauten) nicht überschreiten.

Die Stütze ist oben und unten gelenkig gelagert. Der Durchmesser des Rundquerschnitts ist 20 cm. Der Sicherheitsgrad ist $\nu = 3$. Die zulässige Spannung auf Druck ist $\sigma_{d_{zul}} = 100$ kg/cm² (Bild 349).

Vorher muß man den Schlankheitsgrad $\frac{l}{i}$ finden:

$$J = \frac{\pi r^4}{4}, \quad i = \sqrt{\frac{J}{F}} = \sqrt{\frac{\pi r^4}{4\pi r^2}} = \frac{r}{2},$$

$$\frac{l}{i} = \frac{2l}{r} = \frac{2 \cdot 600}{10} = 120.$$

Tafel 14

Koeffizienten φ

Schlankheitsgrad l/i	Stahl Ст. 2 und Ст. 3	Gußeisen	Holz	Schlankheitsgrad l/i	Stahl Ст. 2 und Ст. 3	Gußeisen	Holz
0	1,00	1,00	1,00	110	0,52	—	0,25
10	0,99	0,97	0,98	120	0,45	—	0,21
20	0,96	0,91	0,96	130	0,40	—	0,18
30	0,94	0,81	0,93	140	0,36	—	0,15
40	0,92	0,69	0,87	150	0,32	—	0,13
50	0,89	0,57	0,80	160	0,29	—	—
60	0,86	0,44	0,72	170	0,26	—	—
70	0,81	0,34	0,60	180	0,23	—	—
80	0,75	0,26	0,49	190	0,21	—	—
90	0,69	0,20	0,38	200	0,19	—	—
100	0,60	0,16	0,32				

Bemerkung: Die Tafel ist für Stahl und Gußeisen auf Grund der technischen Bedingungen *H T* VI—46 und für Holz gemäß dem Diagramm der Normen *H* 2—46 aufgestellt[1]).

Die kritische Belastung finden wir nach der Euler-Formel:

$$P_k = \frac{EJ\pi^2}{l^2} = \frac{100000 \cdot 7850 \cdot 10}{600^2} = 21\,800 \text{ kg},$$

$$\sigma_k = \frac{P_k}{F} = \frac{21\,800}{314} = 69{,}6 \text{ kg/cm}^2,$$

$$\sigma_{zul} = \frac{\sigma_k}{\nu} = \frac{69{,}6}{3} = 23{,}2 \text{ kg/cm}^2.$$

Der Verkleinerungskoeffizient der zulässigen Spannung ist

$$\varphi = \frac{\sigma_{zul}}{\sigma_{d_{zul}}} = \frac{32{,}2}{100} = 0{,}232.$$

In Tafel 14 ist für einen Schlankheitsgrad 120 $\varphi = 0{,}21$, d. h. die Tafel ist offenbar mit einem hohen Sicherheitsgrad aufgestellt. Die *zulässige Belastung* ist

$$P = \frac{P_k}{\nu} = \frac{21\,800}{3} = 7167 \text{ kg}.$$

[1]) *Anm. d. deutschen Redaktion:* Es handelt sich hier um Normen der UdSSR.

Beispiel 61[1]

Zu wählen ist der Querschnitt einer mit $P = 23$ t belasteten I-Stütze aus Stahl (Ст. 2) von 4 m Höhe, die oben und unten eingespannt ist (Bild 350). Die Aufgabe der Querschnittswahl bei der Knickbeanspruchung wird durch aufeinanderfolgende Versuche gelöst. Als ersten Probeversuch prüfen wir die Stabilität des I-Trägers Nr. 14 nach. Bei einem I-Träger Nr. 14 haben wir gemäß Profiltafel $F = 21{,}5$ cm²:

$$J_{\min} = 64{,}4 \text{ cm}^4 \text{ und } i_{\min} = \sqrt{\frac{64{,}4}{21{,}5}} = 1{,}73 \text{ cm}.$$

Der Schlankheitsgrad ist $\lambda = \frac{l}{i} = \frac{400}{1{,}73 \cdot 2} = 116$ und der entsprechende Verkleinerungskoeffizient der zulässigen Spannung $\varphi = 0{,}48$ (Tafel 14). Es ist:

$$\sigma_{\text{zul}} = 1400 \cdot 0{,}48 = 672 \text{ kg/cm}^2,$$

$$\sigma_{\text{vorh}} = \frac{23000}{21{,}5} = 1070 > 672 \text{ kg/cm}^2.$$

Der I-Träger hat sich als nicht ausreichend erwiesen, und wir wählen daher den größeren Querschnitt Nr. 18 mit

$$F = 30{,}6 \text{ cm}^2, \quad J_{\min} = J_y = 122 \text{ cm}^4,$$

$$i_{\min} = \sqrt{\frac{122{,}0}{30{,}5}} = 2{,}0 \text{ cm}.$$

Der Schlankheitsgrad ist:

$$\lambda = \frac{l}{i_{\min}} = \frac{400}{2 \cdot 2} = 100, \quad \varphi = 0{,}60$$

$$\sigma_{\text{zul}} = 1400 \cdot 0{,}60 = 840 \text{ kg/cm}^2,$$

$$\sigma_{\text{vorh}} = \frac{23000}{30{,}5} = 750 < 840 \text{ kg/cm}^2.$$

400

Bild 350

Der I-Träger Nr. 18 genügt den Bedingungen der gestellten Aufgabe.

Beispiel 62[2]

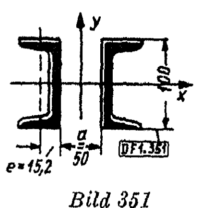


Bild 351

Es ist die zulässige Kraft für eine aus zwei [-Eisen Nr. 10 bestehende Stütze von 4,0 m Höhe zu ermitteln und das Ergebnis mit den Daten der vorherigen Aufgabe hinsichtlich der Größe der zulässigen Kraft und der Fläche des Querschnitts zu vergleichen. Die Anordnung der [-Eisen ist im Querschnitt in Bild 351 dargestellt. Die Stütze ist oben und unten eingespannt.

Berechnen wir die Trägheitsmomente des zusammengesetzten Querschnitts:

$$J_x = 198{,}0 \cdot 2 = 396{,}0 \text{ cm}^4,$$

$$J_y = 2 \cdot 25{,}60 + 12{,}74\,(2{,}5 + 1{,}52)^2 \cdot 2 = 462 \text{ cm}^4.$$

J_y ist größer als J_x, und $i_{\min} = \sqrt{\frac{396}{2 \cdot 12{,}74}} = 3{,}94$ cm.

---

[1] *Anm. d. deutschen Redaktion:* Diese Berechnung würde sich mit deutschen Profilen nach neuester DIN 4114 E und dem ω-Verfahren wesentlich anders gestalten.

[2] *Anm. d. deutschen Redaktion:* Auch diese Aufgabe 62 gestaltet sich nach den deutschen amtlichen Vorschriften DIN 4114 recht wesentlich anders, ohne daß im nachfolgenden darauf eingegangen wird.

Der reduzierte Schlankheitsgrad ist $\dfrac{l}{i_{\min}} = \dfrac{0{,}5 \cdot 400}{3{,}94} = 51.$

Gemäß Tafel 14 ist: $\varphi = 0{,}89;$

$$\sigma_{\text{zul}} = 1400 \cdot 0{,}89 = 1245 \text{ kg/cm}^2,$$

$$P_{\text{zul}} = F \cdot \sigma_{\text{zul}} = 12{,}74 \cdot 2 \cdot 1245 = 31\,723 \text{ kg}.$$

Der Querschnitt aus zwei [-Eisen mit dem Querschnitt $F = 12{,}74 \cdot 2 = 25{,}48 \text{ cm}^2$ nimmt bei einem geringeren Materialverbrauch im Vergleich mit dem I-Eisen Nr. 18, das in der vorherigen Aufgabe gewählt wurde und eine Querschnittsfläche von $F = 30{,}6 \text{ cm}^2$ hat, bei sonst gleichen Bedingungen eine wesentlich größere Last auf.

11.6 Querbiegung mit Längsbiegung

A. In den Abschnitten 5 bis 7 wurde die Querbiegung des Balkens behandelt, d. h. eine Biegung unter der Einwirkung von zur Balkenachse senkrechten Kräften. In den vorhergehenden Kapiteln, die sich auf die Knickung bezogen, wurde die Möglichkeit der Ausbiegung eines Balkens unter der Einwirkung von nur längsgerichteten Druckkräften allein untersucht.

Jetzt werden wir uns mit einem allgemeineren Fall befassen. Untersuchen wir die Biegung eines geraden Balkens oder Stabes bei gleichzeitiger Wirkung von zwei an seinen Enden angreifenden Druckkräften und dazu einer beliebigen Querbelastung. Nehmen wir folgendes Koordinatensystem an: Der Ox-Achse geben wir die Richtung längs der Balkenachse, und die Achsen Oy und Oz ordnen wir in der Ebene des Querschnitts an. Wenn die Steifigkeit des Balkens auf Biegung groß und die Formänderung durch Biegung gering ist, so können wir, indem wir diese vernachlässigen, die Untersuchung auf dem im Kapitel 10.1 und 10.4 des Abschnitts 10 aufgezeigten Wege durchführen und erhalten so z. B. für die Normalspannung im Querschnitt die Formel:

$$\sigma = \frac{M_z}{J_z} y - \frac{M_y}{J_y} z + \frac{N}{F}, \tag{11.41}$$

wobei in den Momenten M_z und M_y sowohl die Quer- als auch die Längskräfte berücksichtigt werden.

Wenn aber ein recht elastischer Stab vorliegt, so übt, wie wir schon wissen [Kapitel 11.2, Formel (11.2)], die Durchbiegung des Stabes einen bedeutenden Einfluß auf die Größe des Biegemoments aus. Dieser Umstand wurde bei der Ableitung der Formel (11.41) nicht berücksichtigt, und daher wird sie im Falle eines biegsamen Stabes ein sehr ungenaues Ergebnis liefern, wenn man die Formänderungen nicht berücksichtigt.

Wegen der Notwendigkeit, die Formänderung des Stabes berücksichtigen zu müssen, beginnen wir mit der Aufstellung und Integration der Differentialgleichung der elastischen Linie.

B. Untersuchen wir den einfachsten Fall eines Stabes, der an den Enden gelenkig gelagert und durch eine Längsdruckkraft S sowie eine Einzellast P in der Mitte belastet ist (Bild 352).

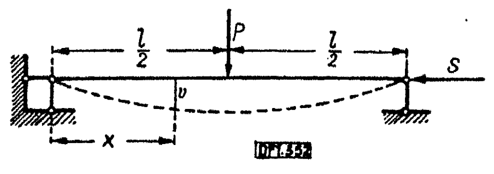


Bild 352

Im Hinblick auf die Symmetrie der elastischen Linie in bezug auf die Last P kann man sich auf die Untersuchung ihrer linken Hälfte allein beschränken. Das Biegemoment in einem beliebigen Querschnitt des Stabes im Abstand x vom linken Auflager ist:

$$M = \frac{P}{2}\,x - Sv. \tag{11.42}$$

Setzt man dasselbe in die Differentialgleichung der elastischen Linie

$$EJv'' = M \tag{11.43}$$

ein, so erhalten wir:
$$EJv'' + Sv = \frac{P}{2}\,x.$$

Dividiert man beide Teile der Gleichung durch EJ und führt man die Bezeichnung

$$\frac{S}{EJ} = a^2 \tag{11.44}$$

ein, so erhalten wir:
$$v'' + a^2 v = \frac{P}{2EJ}\,x. \tag{11.45}$$

Diese Differentialgleichung ist nicht homogen. Von der Gleichung (11.4) des Kapitels 11.2 des vorherigen Abschnitts unterscheidet sie sich nur durch den rechten Teil. Das allgemeine Integral derselben setzt sich aus dem uns schon bekannten allgemeinen Integral der homogenen Gleichung

$$v'' + a^2 v = 0$$

und irgendeinem speziellen Integral der Gleichung (11.45) zusammen, das wir leicht in der folgenden Form finden:

$$v = \frac{P}{2\,EJa^2}\,x = \frac{P}{2\,S}\,x.$$

Auf diese Weise wird das allgemeine Integral der Gleichung (11.45) die Form

$$v = C_1 \cos ax + C_2 \sin ax + \frac{P}{2\,S}\,x \tag{11.46}$$

haben.

Die Integrationskonstanten C_1 und C_2 finden wir aus den Randbedingungen der linken Hälfte:

$$\text{bei } x = 0 \quad \text{ist } v = 0,$$
$$\text{bei } x = l/2 \text{ ist } v' = 0.$$

Hieraus erhalten wir: $C_1 = 0$ und $C_2 a \cos\frac{al}{2} + \frac{P}{2S} = 0$,

woraus
$$C_2 = -\frac{P}{2Sa\cos\frac{al}{2}}.$$

Setzt man diese Werte C_1 und C_2 in (11.46) ein, so finden wir die endgültige Gleichung der elastischen Linie für die linke Hälfte des Stabes:

$$v = -\frac{P\sin ax}{2Sa\cos\frac{al}{2}} + \frac{Px}{2S},$$

oder
$$v = \frac{P}{2Sa\cos\frac{al}{2}}\left(ax\cos\frac{al}{2} - \sin ax\right). \tag{11.47}$$

Kennt man die Durchbiegung v, so finden wir leicht aus (11.43) das Biegemoment:

$$M = \frac{EJa^2P}{2Sa\cos\frac{al}{2}}\sin ax = \frac{EJPa^2}{2Sa}\,\frac{\sin ax}{\cos\frac{al}{2}} = \frac{P\sin ax}{2a\cos\frac{al}{2}}. \tag{11.48}$$

Setzt man für $x = \frac{l}{2}$, so erhalten wir aus (11.47) für den Querschnitt in der Mitte die größte Durchbiegung:

$$f = v_{\max} = \frac{P}{2Sa}\left(\frac{al}{2} - \operatorname{tg}\frac{al}{2}\right) \tag{11.49}$$

und aus (11.48) das größte Biegemoment:

$$M_{\max} = \frac{P}{2a}\operatorname{tg}\frac{al}{2}. \tag{11.50}$$

C. Wir stellen hier also fest, daß die Durchbiegung und das Biegemoment in den Formeln (11.47) und (11.48) von der Querlast P linear abhängen. Folglich behält in unserer Aufgabe das Gesetz der Unabhängigkeit der Wirkungen in bezug auf die Querbelastung seine Gültigkeit. Bei Vergrößerung der Last P um das n-fache wachsen die Durchbiegungen und Biegemomente ebenfalls um das n-fache an (selbstverständlich unter der Bedingung, daß die Formänderung während der ganzen Zeit im elastischen Bereich bleibt). Was jedoch die Längskraft S anbetrifft, so ist die Abhängigkeit hier komplizierter, da S nicht nur unmittelbar zur Formel gehört, sondern auch im Wert

$$a = \sqrt{\frac{S}{EJ}}$$

enthalten ist.

Es ist leicht zu ersehen, daß die Zunahme von v und M bei der Zunahme der Kraft S bedeutend schneller vor sich geht, als dies bei der proportionalen Abhängigkeit der Fall wäre. Wenn die Kraft S den kritischen Euler-Wert erreicht, so nehmen v und M einen unendlichen Wert an; hierbei ist

$$S = \frac{EJ\pi^2}{l^2},$$

$$\frac{S}{EJ} = a^2 = \frac{\pi^2}{l^2},$$

$$al = \pi.$$

Folglich ist: $$\frac{al}{2} = 0 \quad \text{und} \quad v = M = \infty.$$

Die unendlichen Werte für v und M ergeben sich infolge einer gewissen Ungenauigkeit unserer Randbedingungen (siehe Kapitel 11.2), aber in jedem Fall weist dies auf die äußerst schnelle Zunahme der Kräfte und Formänderungen beim Annähern von S an den kritischen *Euler*-Wert und auf die Unmöglichkeit der Anwendung des Gesetzes der Unabhängigkeit der Wirkungen in bezug auf die Längskraft S in unserer Aufgabe hin.

Die Formeln (11.47) bis (11.50) geben, allgemein gesagt, ein recht genaues Ergebnis, solange die Längskraft S bedeutend geringer als ihr kritischer Euler-Wert ist. Im anderen Fall muß man sich mit genaueren Randbedingungen und der genaueren Differentialgleichung

$$EJ = \frac{v''}{(1 + v'^2)^{3/2}} = M$$

befassen. In praktischen Berechnungen kommt allerdings ein derartiger Fall selten vor.

Wenn wir in den Formeln (11.47) bis (11.50) $S = 0$ annehmen, so erhalten wir den Fall der Querbiegung eines einfachen Balkens mit einer in Feldmitte angreifenden Last. Hierbei erhalten die rechten Teile der Formeln die unbestimmte Form $\frac{0}{0}$. In bezug auf die Formeln (11.49) und (11.50) können wir diese Unbestimmtheit leicht lösen, indem wir die bekannte Reihenentwicklung benutzen:

$$\operatorname{tg} \frac{al}{2} = \frac{al}{2} + \frac{1}{3}\left(\frac{al}{2}\right)^3 + \dots \tag{11.51}$$

Auf diesem Wege erhalten wir die uns gut bekannten Formeln für die Pfeilhöhe (maximale Durchbiegung) und das maximale Biegemoment.

So erhalten wir aus (11.51): $$\frac{al}{2} - \operatorname{tg} \frac{al}{2} = -\frac{a^3 l^3}{24}.$$

Setzt man diesen Wert in (11.49) ein, so erhalten wir weiter:

$$f = -\frac{P}{2\,Sa}\,\frac{a^3 l^3}{24} = -\frac{P l^3}{48\,S}\,a^2 = -\frac{P l^3}{48 EJ}. \tag{11.52}$$

Beschränkt man sich auf das erste Glied der Reihe (11.51) und setzt man es in (11.50) ein, so erhalten wir:

$$M_{\max} = \frac{P}{2a}\,\frac{al}{2} = \frac{Pl}{4}. \tag{11.53}$$

Mit Hilfe der in diesem Kapitel dargelegten Methode kann man auch leicht die Aufgabe für den Fall einer gleichmäßig verteilten Belastung des Balkens lösen. Die Fälle komplizierter Belastungen werden später im zweiten Teil des Lehrbuchs behandelt.

12 Dynamische Aufgaben in der Festigkeitslehre

12.1 Spannungen, die durch Bewegungen entstehen. Trägheitskräfte

A. Belastungen in direktem Sinne des Wortes nennen wir gewöhnlich physikalische Körper verschiedener Art, die mit ihrem Gewicht auf einen irgendwie gelagerten Balken oder Stab eine Wirkung ausüben, indem sie in diesem einen Zug, einen Druck, eine Biegung, eine Drillung oder eine zusammengesetzte Beanspruchung hervorrufen. Das Gewicht P eines Körpers wird bekanntlich durch die Formel

$$P = mg \tag{12.1}$$

ausgedrückt, worin mit m die Masse des Körpers und mit g die Beschleunigung der Schwerkraft bezeichnet ist. Die Belastungen des Balkens werden aber nicht nur unbedingt durch das Gewicht irgendwelcher Körper verwirklicht. Als Ursprung der Belastungen erweist sich oft die Bewegung des Balkens selbst und der mit diesem während dieser Bewegung verbundenen Körper oder die Bewegung irgendeines Körpers, auf dessen Bahn sich der unbewegliche Balken befindet.

Wenn die in Bewegung befindliche Masse m die Beschleunigung $\mathfrak{a}$ hat, so entsteht die sogenannte „Trägheitskraft"

$$\mathfrak{P} = m\mathfrak{a}, \tag{12.2}$$

die der Beschleunigung $\mathfrak{a}$ entgegengesetzt gerichtet ist. Unter einigen bestimmten Bedingungen, auf die wir später eingehen werden, erscheint auch diese Kraft als Belastung. Eine Belastung ähnlicher Art kann man als dynamische Belastung in weitem Sinne dieses Wortes bezeichnen. Es ist klar, daß die dynamische Belastung (12.2) sich ihrem Wesen nach von der statischen Belastung (12.1) nicht unterscheidet[1]), der Unterschied besteht lediglich in der Natur der Beschleunigungen g und $\mathfrak{a}$, die zu den oben angeführten Formeln gehören. Von dem Charakter der Beschleunigung $\mathfrak{a}$ hängen allerdings wesentlich die Eigenschaften der Belastung (12.2) und deren Wirkung auf den Balken selbst ab.

Als die einfachsten sind solche Aufgaben anzusehen, in denen die Beschleunigungen der Balkenpunkte sowohl der Größe als auch der Richtung nach in bezug auf den Balken selbst konstant bleiben[2]). Derartige Aufgaben werden nun auf die uns aus dem Vorhergehenden gut bekannten Fälle zurückgeführt, in denen die Wirkung der Belastungen als statisch anzusehen ist. Zunächst untersuchen wir einige Aufgaben ähnlicher Art.

Die Fälle, in denen die als Belastungen wirkenden Kräfte sich zeitlich ändern, erweisen sich für die Untersuchung als sehr kompliziert. Im weiteren untersuchen wir einige der einfachsten Aufgaben dieser Art.

---

[1]) *Anm. d. deutschen Redaktion:* Die statische Behandlung dynamischer Probleme nennt man *„d'Alembertsches Prinzip"*.

[2]) Genauer gesagt, konstant in bezug auf das mit dem Balken während seiner Bewegung unveränderlich verbundene Koordinatensystem bleiben.

Aufgaben, in denen die Beschleunigungen von der Zeit abhängen, nennt man Aufgaben *mit dynamischer Wirkung der Belastungen im engen Sinne des Wortes.*

B. Stellen wir uns einen derartigen Fall vor. Ein Balken mit rechteckigem Querschnitt ist auf Rollen gesetzt (Bild 353, a), auf denen er sich ohne Reibung bewegen kann. An dem rechten Ende ist eine Zugkraft P angebracht. Die Länge des Balkens ist l, die Fläche des Querschnitts F und das spezifische Gewicht des Materials γ. Es sind die Spannungen in einem beliebigen Querschnitt des Balkens zu ermitteln. Unter der Einwirkung der konstanten Kraft P wird sich der Balken auf die rechte Seite hin bewegen und hierbei eine Zugbeanspruchung

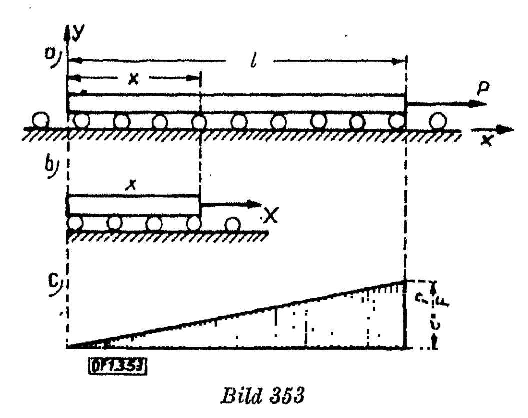


Bild 353

erleiden[1]). Zuerst lösen wir diese Aufgabe mit Hilfe der allgemeinen Methode der Dynamik. Wenn wir mit u die Verschiebung des Balkens bezeichnen, dann wird die Differentialgleichung seiner Bewegung wie folgt aufgeschrieben:

$$m\,\frac{d^2u}{dt^2} = P. \tag{12.3a}$$

Hierin ist $m = \dfrac{Fl\gamma}{g}$ die Masse des Balkens. Berücksichtigt man dies, so erhalten wir:

$$\frac{Fl\gamma}{g}\cdot\frac{d^2u}{dt^2} = P. \tag{12.3b}$$

Integriert man diese, so finden wir die endgültige Gleichung der Bewegung des Balkens. Gemäß der Bedingung der Aufgabe wird dies jedoch nicht verlangt. Zur Ermittlung der Spannungen wenden wir die Methode des Schnittes an. Trennen wir links einen Balkenteil von der Länge x ab (Bild 353, b), und ersetzen wir die Wirkung des rechten Teils durch die unbekannte Kraft X.

Die Differentialgleichung der Bewegung des linken Teils ist dann:

$$\frac{Fx\gamma}{g}\,\frac{d^2u}{dt^2} = X. \tag{12.4}$$

[1]) Zunächst beachten wir nicht die komplizierten Erscheinungen, die im Balken sofort nach dem Angriff der Kraft P entstehen.

Indem wir die Glieder von (12.3b) durch die Glieder von (12.4) dividieren, schließen wir die Beschleunigung aus:

$$\frac{l}{x} = \frac{P}{X}.$$

Hieraus finden wir die Kraft: $$X = P\,\frac{x}{l}. \qquad (12.5)$$

Die Zugspannung ist: $$\sigma = \frac{X}{F} = \frac{P}{F}\,\frac{x}{l}. \qquad (12.6)$$

Die Linie der Verteilung der Spannungen σ über die Länge des Balkens ist in Bild 353, c dargestellt. Von ähnlichem Charakter ist die Kräfteverteilung in den Kupplungsvorrichtungen eines Zuges, der von einer Lokomotive mit einer konstanten Zugkraft gezogen wird.

Da aus (12.3a) zu ersehen ist, daß die Beschleunigung

$$\frac{d^2u}{dt^2} = a = \frac{P}{m}$$

konstant ist, so kann unsere Aufgabe in statischer Form unter der Annahme gelöst werden, daß am rechten Ende des Balkens eine konstante Kraft P angreift und auf die Längeneinheit des Balkens eine Kraft von konstanter Intensität [vgl. den linken Teil der Gleichung (12.4)]

$$F\gamma\,\frac{a}{g}$$

wirkt. Die Resultierende dieser Kräfte

$$Fl\gamma\,\frac{a}{g}$$

wird gemäß (12.3b) durch die Kraft P am Balkenende im Gleichgewicht gehalten. Bei einer aufmerksamen Betrachtung dieses Ergebnisses erkennt man, daß die Bedingung unserer Aufgabe selbst in folgender rein statischer Form ausgedrückt werden kann (Bild 354). Der Balken ist mit seinem oberen Ende aufgehängt und wird durch die Wirkung seines Eigengewichts auf Zug beansprucht, das spezifische Gewicht des Materials γ ist jedoch durch Multiplikation desselben mit dem Wert $\frac{a}{g}$ geändert, der das Verhältnis der von der Kraft P bewirkten Beschleunigung zur Beschleunigung der Schwerkraft darstellt. Es sind die Spannungen in einem beliebigen Querschnitt des Balkens zu ermitteln.

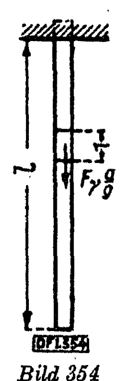


Bild 354

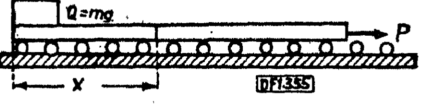


Bild 355

Wenn $a = g$ ist, so stimmt unsere Aufgabe mit der im Kapitel 2.03 des Abschnitts 2 überein. In dem allgemeinen Fall, wenn $a \neq g$ ist, nennen wir diese Aufgabe die statische Analogie der vorherigen dynamischen Aufgabe. Ändern wir die unter Absatz B gelöste Aufgabe, indem wir annehmen, daß ein sehr leichter Balken vorliegt (Bild 355), dessen Masse und Trägheitskräfte man vernachlässigen kann. Am linken Ende des Balkens ist eine Auflast $Q = m_1 g$ befestigt, wobei m_1 die Masse der Auflast darstellt; am rechten Ende greift dagegen die Kraft P an. Vernachlässigt man die Masse des Balkens, so können wir die Differentialgleichung der Bewegung des Balkens nebst der Auflast in der Form

$$m_1 a = P$$

aufschreiben, worin $a = \frac{d^2u}{dt^2}$ die Beschleunigung ist. Die Gleichung der Bewegung des linken abgetrennten Teiles ist

$$m_1 a = X,$$

worin X die Kraft ist, die die Wirkung des rechten Teiles ersetzt.

Daher ist:

$$X = P,$$

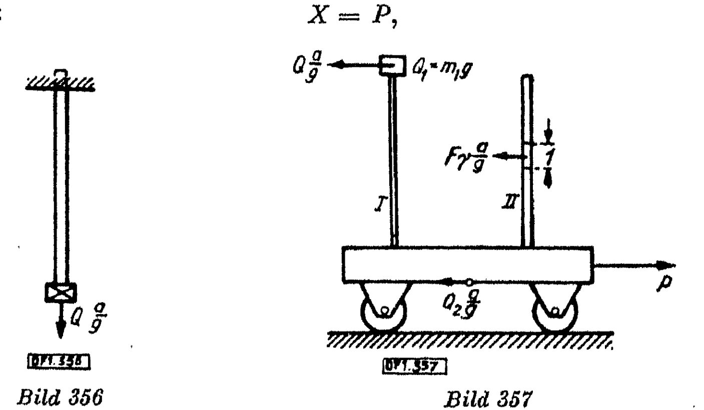


Bild 356 *Bild 357*

d. h. die Zugkraft ist über die ganze Länge des Balkens konstant. Die statische Analogie ist in Bild 356 dargestellt. Der gewichtslose Balken wird unter der Einwirkung einer an das untere Ende angehängten Last

$$m_1 a = Q \frac{a}{g}$$

gezogen.

C. Die oben untersuchten Aufgaben bezogen sich auf eine Zugbeanspruchung des Balkens. In Bild 357 sind schematisch Aufgaben über Balkenbiegungen infolge der Wirkung von Massenbewegungen dargestellt.

Ein Wagen, auf dem zwei senkrechte stehende Stäbe befestigt sind, soll sich ganz ohne Widerstände in horizontaler Richtung bewegen. Der Stab I ist sehr leicht, so daß man seine Masse und seine Trägheitskraft vernachlässigen kann, trägt aber an seinem oberen Ende eine Auflast Q_1; der Stab II dagegen ist massiv, die Fläche seines Querschnitts ist F und das spezifische Gewicht des Materials ist

γ. Es sind die M- und Q-Linien beider Stäbe für den Fall zu zeichnen, daß sich der Wagen unter der Einwirkung einer konstanten Kraft P mit gleicher Beschleunigung bewegt.

Stellt man wie in den vorhergehenden Aufgaben gleiche Überlegungen an, so finden wir, daß im Stab I die horizontale Trägheitskraft

$$m_1 a = Q_1 \frac{a}{g}$$

am oberen Ende konzentriert ist; der Stab II ist gleichmäßig über die ganze Länge mit durchgehenden Trägheitskräften von der Intensität

$$F\gamma \frac{a}{g}$$

belastet. Hierin ist a die Beschleunigung des Systems, die sich aus der Gleichung der Bewegung desselben ergibt. Es ist:

$$a \frac{Q_1 + Fl\gamma + Q_2}{g} = P,$$

worin Q_2 das Gewicht des Wagens ist.

Die statische Analogie ist für den Stab I ein Kragträger, der an einem Ende befestigt und an dem anderen mit der Last $Q_1 \frac{a}{g}$ belastet ist, und für den Stab II ein Kragträger, der sich unter der Einwirkung einer gleichmäßigen Belastung von der Intensität $F\gamma \frac{a}{g}$ befindet.

D. Gehen wir zu dem Fall der Drehung eines Balkens um eine gegebene Achse $O—O$ über (Bild 358). Beschränken wir uns auf den Fall einer gleichförmigen Drehung. Bezeichnet man dann mit v die lineare Geschwindigkeit des Punktes und mit a_t und a_r die tangentiale und radiale Komponente der Beschleunigung, so erhalten wir

$$a_t = \frac{dv}{dt} = 0 \text{ und } a_r = \frac{v^2}{r} = \omega^2 r,$$

worin r der Radius des Kreises, der als Trajektorie des gewählten Punktes anzusehen ist, und ω die Winkelgeschwindigkeit der Drehung sind.

Wenn die Querschnittsfläche des Balkens gleich F und das spezifische Gewicht des Materials γ ist, so wird auf ein aus dem Balken herausgeschnittenes Element von der Länge ds eine Trägheitskraft

$$\frac{F\gamma ds}{g} \frac{v^2}{r} = F \frac{\gamma}{g} \omega^2 r ds$$

in Richtung des Radius CD wirken. Auf die Längeneinheit des Balkens entfällt dann eine Kraft gleich

$$F \frac{\gamma}{g} \omega^2 r, \qquad (12.7)$$

die proportional dem Abstande des Punktes D von der Drehachse ist. Führen wir einige Beispiele an, in denen die Belastung durch derartige Trägheitskräfte (Zentrifugalkräfte) verwirklicht wird.

Wenn ein dünner Ring mit dem Radius R vorliegt (Bild 359), der sich um eine zu seiner Ebene senkrechten Achse $O—O$ dreht, so finden wir nach der Formel (12.7) die auf den Umfang des Ringes gleichmäßig verteilte Belastung mit der Intensität

$$p = F \frac{\gamma}{g} \omega^2 R.$$

Als statische Analogie ist die Aufgabe der Berechnung eines Ringes, der unter der Einwirkung eines gleichmäßigen Druckes auf die innere Seite steht, anzusehen.

Wir zerschneiden den Ring mittels eines diametral geführten Schnittes und ersetzen die Wirkung der unteren Hälfte durch zwei Zugkräfte P. Die auf das Bogenelement $ds = R d\varphi$ entfallende Belastung ist $p\,ds = pR d\varphi$. Setzt man die Summe der Projektionen aller an der Ringhälfte angreifenden Kräfte auf die zu den Kräften P parallele Achse gleich Null, so erhalten wir:

$$2\,P - \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} p\,R d\varphi \cos\varphi = 0.$$

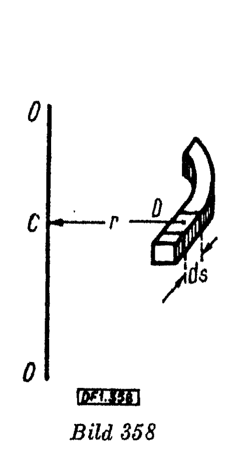
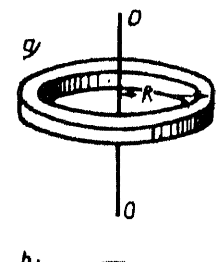


Bild 358



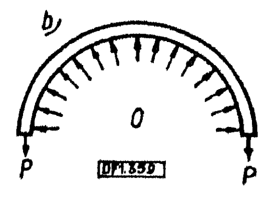


Bild 359

Hieraus ist: $$2\,P = p\,R \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \cos\varphi\, d\varphi = 2\,p\,R = p\,d.$$

Die Zugkraft ist: $$P = p\,R = F \frac{\gamma}{g} \omega^2 R^2$$

und die Zugspannung: $$\sigma = \frac{P}{F} = \frac{\gamma}{g} \omega^2 R^2.$$

Wenn der Ring n Umdrehungen in der Minute macht, so ist:

$$\omega = \frac{2\,\pi n}{60} \sec^{-1},$$

und $\sigma = \frac{\gamma \cdot 2^2 \cdot 3{,}14^2 \cdot n^2}{981 \cdot 60^2} R^2 = 0{,}0000112\, \gamma n^2 R^2 = \frac{1{,}12}{10^5} \gamma n^2 R^2$, worin z. B. für Stahl $\gamma = 0{,}00785$ kg/cm³ ist.

Wenn sich ein Stahlring mit dem Radius von 50 cm mit der Geschwindigkeit von 2000 Umdr./min dreht, so wird die Zugspannung in diesem

$$\sigma = 0{,}0000112 \cdot 0{,}00785 \cdot 2000^2 \cdot 50^2 = 880 \text{ kg/cm}^2$$

sein.

E. Betrachten wir jetzt einen an der Achse O—O befestigten Stab (Bild 360, a) mit der Belastung $P_1 = mg$ am Ende, wobei sich der Stab mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit ω dreht. Die Fläche des Stabquerschnitts ist F und das

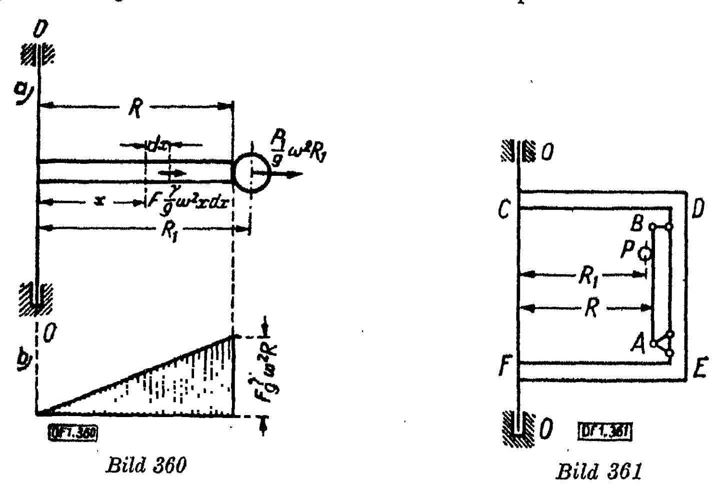


Bild 360 Bild 361

spezifische Gewicht des Materials ist γ. Ermitteln wir die Zugspannung im Stab. Der Stab ist mit einer Einzelträgheitslast $m\omega^2 R_1$ am Ende und mit einer über die Länge gleichmäßig verteilten Längsträgheitskraft belastet, deren Intensität in einem Punkte in einem Abstande x von der Drehachse gleich

$$F \frac{\gamma}{g} \omega^2 x\, dx$$

ist. Die größte Zugkraft S_{max} wird an der Befestigungsstelle mit der Achse sein:

$$S_{max} = \frac{P}{g} \omega^2 R_1 + \int_0^R F \frac{\gamma}{g} \omega^2 x\, dx = \left(P_1 R_1 + \frac{1}{2} P R\right) \frac{\omega^2}{g}.$$

Hierin ist $P = F R \gamma$ das Gewicht des Stabes. Als statische Analogie dieser Aufgabe ist ein Balken von der Länge R anzusehen, der mit dem oberen Ende aufgehängt und am unteren Ende mit der Belastung

$$P_1 R_1 \frac{\omega^2}{g}$$

sowie mit einer über die ganze Länge verteilten Längsbelastung, deren Verteilungslinie in Bild 360, b dargestellt ist, belastet ist.

In den Aufgaben unter Absatz D wurden Fälle der Zugbeanspruchung untersucht. Als Beispiel der Biegung eines Balkens durch Zentrifugalkräfte empfehlen wir dem Leser folgende einfache Aufgabe zu lösen (Bild 361). Der Balken AB ist an einem Rahmen $CDEF$ befestigt, der sich gleichförmig mit der Winkelgeschwindigkeit ω um die Achse O—O dreht. Am Balken ist das Gewicht $P = mg$ befestigt, der Balkenquerschnitt ist F und das spezifische Gewicht des Materials ist γ. Es sind die M- und Q-Linien zu zeichnen.

F. Kehren wir zu den Überlegungen unter Absatz A über die Belastungen durch Trägheitskräfte zurück, und merken wir uns folgendes:

Die Trägheitskräfte sind als fiktive Kräfte anzusehen, wenn wir die Bewegung in bezug auf ein unbewegliches Koordinatensystem (das nicht mit dem bewegten Körper verbunden ist) betrachten. Hier können die Trägheitskräfte nur formal eingeführt werden, um die Bewegungsaufgabe auf irgendeine analoge Gleichgewichtsaufgabe zurückzuführen, man kann aber auch ohne Einführung dieser Kräfte auskommen. So betrachteten wir unter Absatz B (Bild 353) zuerst die Bewegung des Balkens in bezug auf ein Koordinatensystem Oxy, das mit der Erde verbunden war und an der Bewegung des Balkens nicht teilnahm. Entsprechend hiermit ist in der Gleichung der Bewegung (12.3a) nur die wirklich angebrachte Kraft P allein, die den Balken bewegt, berücksichtigt.

Versuchen wir jetzt eine Bewegung in bezug auf ein Koordinatensystem zu betrachten, das unveränderlich mit dem bewegten Körper selbst verbunden ist. Bei einem solchen Koordinatensystem wird der Körper weder Geschwindigkeiten noch Beschleunigungen haben. Daher müssen wir, um den wahren Zustand des Körpers nicht zu verzerren, den Einfluß der Beschleunigungen durch Einführung der Trägheitskräfte berücksichtigen, die in bezug auf ein unveränderlich mit dem bewegten Körper verbundenes Koordinatensystem als Kräfte mit den gleichen Rechten wie die an dem Körper tatsächlich angebrachten erscheinen müssen, d. h. sie werden hier „reale" Kräfte.

Für jede der oben gelösten Aufgaben haben wir eine statische Analogie gegeben, die einfach als übersichtliche Form des Übergangs zu einem unveränderlich mit dem bewegten Balken verbundenen Koordinatensystem anzusehen ist; daher müssen in der statischen Analogie die Trägheitskräfte als reale Kräfte angesehen werden.

Die vorhergehenden Aufgaben zeichneten sich dadurch aus, daß in den ihnen entsprechenden statischen Analogien (d. h. bei einem beweglichen Koordinatensystem) die Trägheitskräfte konstant waren; hierbei hingen die in dem Balken vor sich gehenden Erscheinungen nicht von der Zeit ab; in der Aufgabe unter Absatz D z. B. erleidet der Ring die ganze Zeit eine Zugbeanspruchung infolge der konstanten Belastung. Bei der Berechnung von Maschinenelementen hat man es jedoch fast immer mit Trägheitskräften zu tun, die mehr oder weniger schnell ihre Größe und ebenfalls auch ihre Richtung in bezug auf ein mit dem bewegten Teil unveränderlich verbundenes Koordinatensystem ändern. In diesem Fall kann man ebenfalls eine statische Analogie zu der gegebenen Aufgabe aufstellen, sie wird aber nur für den gegebenen Moment und die diesem entsprechende Lage

des bewegten Teils brauchbar sein. Für verschiedene Lagen können die statischen Analogien sehr verschieden sein.

Als einfaches Beispiel untersuchen wir die Kuppelstange AB (Bild 362), die zwei Triebräder einer mit konstanter Geschwindigkeit fahrenden Lokomotive verbindet. Da die gleichförmige Bewegung der Lokomotive nicht mit Beschleunigungen verbunden ist, so können wir die Bewegung der Kuppelstange auf ein mit dem Rahmen der Lokomotive verbundenes Achsensystem Oxy beziehen. In bezug auf dieses System führt die Kuppelstange eine ebene parallele Bewegung aus, wobei jeder Punkt C derselben sich auf einem Kreis mit dem Radius r bewegt, der gleich dem Radius der Kurbel ist. Auf Grund der Formel (12.7) wird die Kuppelstange mit gleichmäßig verteilten Trägheitskräften von der Intensität

$$F \frac{\gamma}{g} \omega^2 r$$

belastet sein, die im gegebenen Moment parallel zur Stellung der Kurbel gerichtet sein werden. Bei Stellung der Kurbeln *in Achshöhe* (Stellung der Kuppelstange $A_1 B_1$) sind die Trägheitskräfte längs der Achse der Kuppelstange gerichtet, und

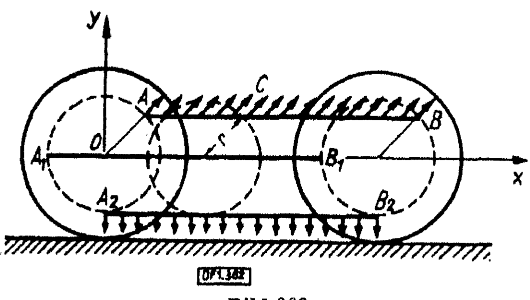


Bild 362

sie erhält Druck oder Zug. Bei der *niedrigsten* Stellung A_2B_2 der Kuppelstange sind die Trägheitskräfte nach unten gerichtet und rufen, indem sie sich mit dem Eigengewicht der Kuppelstange addieren, eine Biegung derselben hervor. Die *obere* Stellung der Kuppelstange ist weniger gefährdet, da die Trägheitskräfte dann nach oben gerichtet sind und die Belastung der Kuppelstange um ihr Eigengewicht vermindert wird. Gleichzeitig mit den Trägheitskräften werden auch die Druckkräfte in der Kuppelstange berücksichtigt, die bei der Übertragung der Kraft von einem Rad zum anderen entstehen.

12.2 Spannungen infolge einer Stoßwirkung auf den elastischen Balken

A. Bei der Lösung von statischen Aufgaben in den vorhergehenden Kapiteln wurde angenommen, daß die Belastungen so langsam auf den Balken aufgebracht werden, daß die sich im Balken und in der Auflast ergebenden Beschleunigungen gering sind und man sie vernachlässigen kann, indem man keine Trägheitskräfte einführt.

Wenn man jedoch die Belastung schnell auf den Balken aufbringt, so wird er wegen der ihm hierbei erteilten Beschleunigung in Bewegung kommen. Bei elastischen Körpern hat diese Bewegung einen periodisch schwingenden Charakter. Diese Schwingungen klingen nur nach einer gewissen Zeit infolge der unvermeidlichen äußeren und inneren Widerstände ab, und es beginnt darauf die statische Wirkung der Belastung. Die größten Spannungen jedoch, die während des ersten Zeitabschnittes entstehen, d. h. sofort nach dem Aufbringen der Belastung, erweisen sich bedeutend größer als diejenigen, die im weiteren bei der statischen Wirkung derselben auftreten. Daher muß man, wenn man die Frage über die Festigkeit des Balkens entscheidet, ebenfalls auch diese dynamischen Spannungen berücksichtigen. Besonders gefährlich für Maschinen- und Bauwerksteile sind Belastungen, die sich bei Stoßwirkungen ergeben, da in diesen Fällen die Spannungen außerordentlich groß werden können.

Untersuchen wir folgende Aufgabe (Bild 363). Eine Last $P = mg$ fällt aus einer Höhe h auf die Felder AB. Der Koeffizient der Nachgiebigkeit der Feder ist gleich k, so daß

$$X = k\delta \tag{12.8}$$

ist, worin X die die Feder zusammendrückende Kraft und δ die Zusammendrückung der Feder ist.

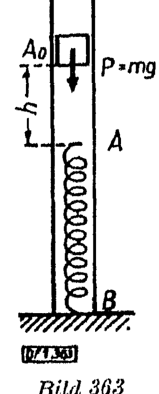


Bild 363

Ermitteln wir den größten Druck auf die Feder und die entsprechende größte Zusammendrückung derselben.

Diese Aufgabe ist in der allgemeinen Form sehr kompliziert. Um sie zu vereinfachen, machen wir zwei Annahmen. Erstens wollen wir damit rechnen, daß die auf die Feder fallende Last einen absolut starren Körper darstellt, und daß dieser vom Beginn der Berührung mit der Feder ab mit dieser während der ganzen darauffolgenden Bewegung verbunden bleibt.

Bevor wir zu der zweiten Annahme übergehen bemerken wir folgendes: Die fallende Last bewirkt in der Feder eine Druckkraft und eine ihr entsprechende Formänderung. Während des Anfangsmoments erweist sich jedoch nur ein geringer Teil der Feder am oberen Ende derselben als verformt. Infolge der Trägheit der Federmasse bleibt der übrige Teil unverformt. Wie wir im weiteren nachweisen werden, ist eine gewisse Zeit dazu erforderlich, bis die am oberen Ende der Feder entstandene „Druckwelle" zum Federfuß gelangt. Dann wird diese Welle zurückgeworfen, indem sie in eine sich nach oben bewegende Welle übergeht usw. Der wellenartige Prozeß der Formänderungsfortpflanzung klingt mit der Zeit ab, jedoch erschwert sein Vorhandensein stark die Lösung der gestellten Aufgabe über die Schlagwirkung (den Stoß).

Wenn die Masse der Feder im Vergleich zur Masse der Last sehr gering ist, so kann man die Trägheitskräfte der Feder vernachlässigen, indem man annimmt, daß sie keine Masse besitzt. In diesem Fall wird sich die Formänderung momentan fortpflanzen, und in jedem Moment wird die Feder über die ganze Länge eine gleichmäßige Zusammendrückung aufweisen, die dem Druck der Last gemäß der Formel (12.8) entsprechen wird. Daher machen wir die zweite Annahme, daß die Feder keine Masse besitzt und folglich auch keine Trägheit.

Unter den erwähnten Annahmen kann die Aufgabe ohne Schwierigkeiten gelöst werden. Die Last $P = mg$ erlangt, indem sie von der Höhe h auf die Feder fällt, im Moment der Berührung mit dieser die Geschwindigkeit

$$v_0 = \sqrt{2gh};$$

dies ist als eine der Anfangsbedingungen der Aufgabe anzusehen. Im weiteren wird sich die Auflast zusammen mit der Feder bewegen und an der Auflast werden das Gewicht P und die Reaktion der Feder ku wirken, worin mit u die Zusammendrückungen im gegebenen Moment bezeichnet sind. Die Differentialgleichung der Bewegung der Last ist

$$\frac{P}{g}\frac{d^2u}{dt^2} = P - ku \tag{12.9}$$

oder

$$\frac{d^2u}{dt^2} + a^2u = g, \tag{12.9a}$$

worin

$$a^2 = \frac{kg}{P} \text{ ist.} \tag{12.10}$$

Die allgemeine Lösung der Gleichung (12.9a) ist:

$$u = C_1 \cos at + C_2 \sin at + \frac{g}{a^2},$$

mit

$$\frac{g}{a^2} = \frac{P}{k} = u_0, \tag{12.11}$$

worin u_0 die statische Zusammendrückung der Feder infolge der Last P bedeutet. Folglich ist:

$$u = u_0 + C_1 \cos at + C_2 \sin at. \tag{12.12}$$

Hieraus sieht man, daß die Last P nach dem Fallen auf die Feder harmonische Schwingungen in bezug auf die Gleichgewichtslage, bei der $u = u_0$ ist, ausführen wird. Die Konstanten C_1 und C_2 werden aus den Anfangsbedingungen ermittelt; bei $t = 0$ ist $u = 0$ und

$$\frac{du}{dt} = v_0 = \sqrt{2gh}.$$

Die Aufgabe kann bis zum Schluß gelöst werden, da man nach der Ermittlung der größten Zusammendrückung u_{max} der Feder den größten Druck der Last gemäß (12.8) finden kann:

$$X_{max} = k u_{max}.$$

B. In unserer Aufgabe wird jedoch nicht verlangt, die Schwingungen der Last zu untersuchen. Man kann sie einfacher lösen, wenn man die Energiegleichung benutzt, die man als Integral aus der Gleichung der Bewegung (12.9) mit Hilfe der aus der Mechanik bekannten Methode erhält. Beide Teile von (12.9) multiplizieren wir mit den Gliedern der Identität

$$\frac{du}{dt}\,dt = du$$

und erhalten:

$$\frac{P}{g}\frac{d^2u}{dt^2}\frac{du}{dt}\,dt = P\,du - ku\,du. \tag{12.13}$$

Der linke Teil $$\frac{P}{g}\frac{d^2u}{dt^2}\frac{du}{dt}\cdot dt = d\left[\frac{1}{2}\frac{P}{g}\left(\frac{du}{dt}\right)^2\right] = dT$$

stellt das Differential der kinetischen Energie der Last dar; der rechte Teil von (12.13) ist ebenfalls ein Differential:

$$P\,du - ku\,du = d\left(Pu - \frac{ku^2}{2}\right) = dA; \qquad (12.14)$$

es drückt die von der Last und den elastischen Kräften der Feder auf der Verschiebungsstrecke du geleistete Elementararbeit aus.

Demnach schreiben wir die Gleichung (12.13) wie folgt auf:

$$dT = dA; \qquad (12.15)$$

integriert man diese in den Grenzen von $t = t_0$ bis $t = t_1$, so erhalten wir:

$$T_1 - T_0 = A\Big|_{t_0}^{t_1}, \qquad (12.16)$$

worin $T_1 - T_0$ die Änderung der kinetischen Energie und $A\Big|_{t_0}^{t_1}$ die von der Last und den elastischen Kräften der Feder in der Zeit $t_1 - t_0$ geleistete Arbeit darstellt.

Nehmen wir an, daß t_0 der Anfangsmoment des Fallens der Last aus dem Punkte A_0 (Bild 363) ist, wenn die Geschwindigkeit derselben gleich Null ist; t_1 ist der Moment, bei dem die Feder die maximale Zusammendrückung u_1 aufweist und die Geschwindigkeit der Last aufs neue gleich Null wird; dann ist $T_0 = T_1 = 0$ und aus (12.16) erhalten wir:

$$A\Big|_{t_0}^{t_1} = 0, \qquad (12.17)$$

d. h. die Gesamtarbeit, die von der Last und der Feder geleistet wird, ist gleich Null. Mit anderen Worten, die von der Feder aufgespeicherte elastische Energie (die gleich der Arbeit der elastischen Kräfte derselben mit dem umgekehrten Vorzeichen ist) ist gleich der von der Last geleisteten Arbeit. Die Arbeit der Last ist:

$$P(h + u_1).$$

Die von der Feder aufgespeicherte Energie ist:

$$k\int_0^{u_1} u\,du = \frac{ku_1^2}{2}.$$

Demnach ergibt (12.17): $$P(h + u_1) = \frac{ku_1^2}{2},$$

oder berücksichtigt man, daß gemäß (12.11)

$$\frac{P}{k} = u_0$$

ist, so erhalten wir: $$u_1^2 - 2\,u_0u_1 - 2\,u_0h = 0, \qquad (12.18)$$

und hieraus finden wir: $$u_1 = u_0 \pm \sqrt{u_0^2 + 2u_0h}.$$

Die größte Federzusammendrückung ist:

$$u_1 = u_0 + \sqrt{u_0^2 + 2\,u_0 h}\,. \tag{12.19}$$

Wählt man vor der Wurzel das Minuszeichen, so erhalten wir die größte Abweichung der Last von der Gleichgewichtslage nach oben. Der Wert

$$\sqrt{u_0^2 + 2\,u_0 h} \tag{12.20}$$

stellt den dynamischen Teil der Zusammendrückung der Feder dar.

Der größte Druck auf die Feder ist:

$$X_{max} = k u_1 = k\left(u_0 + \sqrt{u_0^2 + 2\,u_0 h}\right) = P\left(1 + \sqrt{1 + 2\frac{h}{u_0}}\right). \tag{12.21}$$

Bei großer Fallhöhe h kann man die 1 unter der Wurzel im Vergleich zu $2\frac{h}{u_0}$ fortlassen. Dann wird:

$$X_{max} = P\left(1 + \sqrt{2\frac{h}{u_0}}\right). \tag{12.21 a}$$

Wenn $h = 0$ ist, d. h. ein einfaches plötzliches Aufbringen der Last ohne Stoßwirkung vorliegt, so erhalten wir aus (12.21) $X_{max} = 2\,P$, was von uns schon im Kapitel 2.06 des Abschnitts 2 bewiesen bzw. ermittelt wurde. Aus (12.21) und (12.21 a) ersehen wir, daß der dynamische Druck der Last bei einer Stoßwirkung den Wert der Last selbst um viele Male übersteigen kann.

Es ist durchaus klar, daß die in der vorherigen Aufgabe behandelte Feder durch einen elastischen Balken oder ein System solcher Balken ersetzt werden kann. Der angeführte Lösungsgang wird sich nicht ändern, man muß nur für jeden gegebenen Fall die Abhängigkeit (12.8) mit dem Ziele aufstellen, im Ergebnis die elastische Verschiebung u_0 bei statischer Wirkung der am Balken oder System angreifenden Last P zu finden (vgl. die Formel 12.11).

Wenn wir z. B. die Feder durch einen vertikalen elastischen Balken ersetzen, so ist, wie wir wissen, bei statischem Druck infolge der Last X

$$\Delta l = u = \frac{X l}{EF},$$

oder, indem wir diese in die Form der Formel (12.8) bringen,

$$X = \frac{EF}{l}\,u = k u,$$

so daß im gegebenen Fall

$$u_0 = \frac{P l}{EF}$$

ist. Diesen Wert muß man in (12.19) und (12.21) einsetzen.

In der untersuchten Aufgabe hatten wir den Fall einer Druck ausübenden Stoßwirkung. Im Falle eines schlanken Stabes kann die Druckerscheinung durch die Knickung kompliziert werden. Diese Schwierigkeit ergibt sich jedoch nicht bei der Zug ausübenden Stoßwirkung (Bild 364), wenn die Last auf eine am unteren Ende des aufgehängten Balkens befestigte Unterlage fällt und hierbei einen Zug des Balkens hervorruft. Die Lösung der Aufgabe ändert sich hierbei nicht.

Nehmen wir jetzt an, daß die Last P auf die Mitte eines Balkens AB fällt (Bild 365). Dann wird, wie wir wissen, die Durchbiegung bei statischer Belastung durch die Formel

$$f = u_0 = \frac{P l^3}{48 \, EJ}$$

ausgedrückt. Diesen Wert muß man auch in (12.19) und (12.21) einsetzen. Kennt man die Belastung $X_{\max}$, so kann man auf dem üblichen Wege die Spannungen im Balken finden.

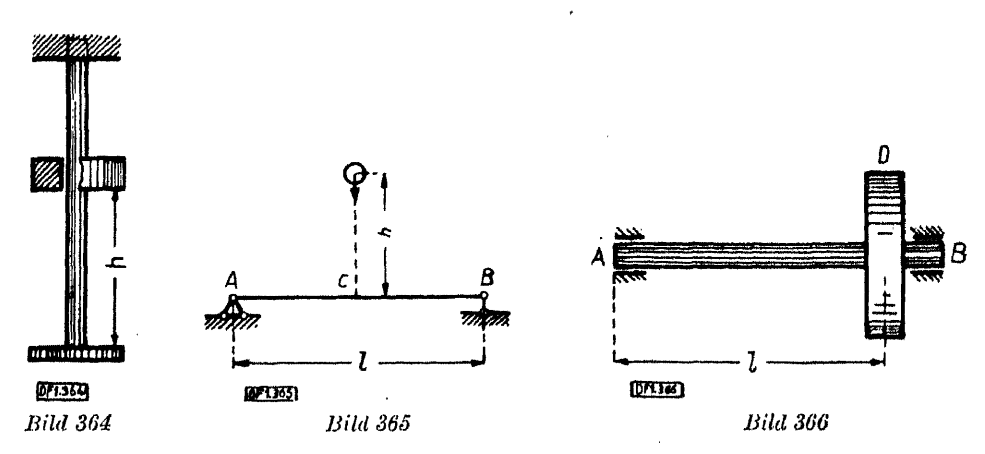


Bild 364 *Bild 365* *Bild 366*

C. Soeben sind die Fälle einer Druck (Zug) und Biegung ausübenden Stoßwirkung untersucht worden. Bei den Berechnungen von Maschinenteilen begegnen wir außerdem noch einer Stoßwirkung, die eine Drillung ausübt. Diese Erscheinung erläutern wir an folgender Aufgabe (Bild 366). Eine runde Welle AB mit einer auf ihr aufgesetzten Scheibe D dreht sich gleichförmig mit der Winkelgeschwindigkeit ω_1; das Trägheitsmoment der Scheibe in bezug auf die Drehachse ist gleich J; die Masse der Welle und das Trägheitsmoment derselben vernachlässigen wir. Es ist das größte Drillmoment der Welle zu ermitteln, wenn ihr linkes Ende A plötzlich abgebremst wird.

Beim plötzlichen Bremsen der Welle wird sich die Scheibe weiterdrehen wollen, wobei sie die Welle auf Drillung beansprucht. Das Drillmoment M_k wird die Drehung der Scheibe jedoch verlangsamen. Wenn φ der volle Drillwinkel der Scheibe im betrachteten Zeitpunkt ist, so ist

$$\varphi = \frac{M_k l}{C} \quad \text{oder} \quad M_k = \frac{C}{l} \varphi,$$

worin für eine runde Welle die Drillungssteifigkeit $C = GJ_p$ ist. Die Gleichung für die Drehung der Scheibe ist:

$$J \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = - \frac{C}{l} \varphi.$$

Sie bestimmt analog (12.9) die Schwingdrehung der Scheibe. Multipliziert man beide Teile mit $d\varphi$:

$$\frac{d\varphi}{dt}\,dt = d\varphi,$$

so ergibt sich:

$$J\,d\left[\frac{1}{2}\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2\right] = -\frac{C}{l}\,d\left(\frac{\varphi^2}{2}\right).$$

Integriert man diese Gleichung, so erhalten wir die Energiegleichung

$$J\,\frac{\omega^2 - \omega_0^2}{2} = -\frac{C}{2l}\,(\varphi^2 - \varphi_0^2), \tag{12.22}$$

worin $\omega = \frac{d\varphi}{dt}$ die Winkelgeschwindigkeit der Scheibendrehung in dem von uns gewählten Endprodukt der Zeit t und ω_0 im Anfangspunkt der Zeit t_0 ist. φ und φ_0 sind die entsprechenden Drillwinkel der Welle.

Angenommen, t_0 ist der Anfangsmoment des Bremsens, wenn

$$\omega_0 = \omega_1 \text{ und } \varphi_0 = 0$$

ist, und t der Endmoment, wenn die Drehung der Scheibe zum Stillstand gekommen und

$$\omega = 0 \text{ und } \varphi = \varphi_{max}$$

ist. Setzt man dies in (12.22) ein, so erhalten wir:

$$J\,\frac{\omega_1^2}{2} = \frac{C}{l}\,\frac{\varphi^2_{max}}{2},$$

woraus

$$\varphi_{max} = \omega_1\sqrt{\frac{Jl}{C}} = \omega_1\sqrt{\frac{Jl}{GJ_p}}$$

ist, und ferner

$$(M_k)_{max} = \frac{C}{l}\,\varphi_{max} = \omega_1\sqrt{\frac{JC}{l}}.$$

Kennt man das Drillmoment, so können wir die Spannungen in der Welle finden.

12.3 Einfluß der Masse eines Körpers bei Stoßbeanspruchungen

A. In allen Aufgaben des Kapitels 12.2 vernachlässigten wir die Trägheitskräfte des elastischen Körpers (der Feder, des Balkens, der Welle) auf den der Schlag (Stoß) geführt wurde. Hierdurch erhöht sich unzweifelhaft der Sicherheitsgrad, da die Massenträgheit des dem Stoß unterworfenen Körpers die Verschiebung vermindert, die wir in der Aufgabe unter B des Kapitels 12.2 mit u_1 bezeichnet haben, und daher werden auch die ihr entsprechenden Spannungen kleiner sein als die von uns in den durchgeführten Lösungen erhaltenen. Wenn die Masse des dem Schlag unterworfenen elastischen Körpers bedeutend kleiner als die Masse der den Schlag ausübenden Last ist, so werden die oben aufgeführten

Lösungen der Wirklichkeit nahe kommen. In den übrigen Fällen muß man auch den Einfluß der Trägheitskräfte des dem Stoß unterworfenen elastischen Körpers berücksichtigen. Bei diesen komplizierteren Bedingungen gibt es für die Aufgabe über die Stoßwirkung noch keine genauen Lösungen infolge der noch geringen Erforschung der durch die Stoßwirkung entstehenden Erscheinungen. Zur Beurteilung des Einflusses der Masse des dem Stoß unterworfenen Körpers gibt es jedoch eine angenäherte Methode. Wir wollen sie in der Aufgabe der Stoßwirkung einer Last P auf eine vertikale Stütze (Bild 367, a), die wir unter Absatz B des Kapitels 12.2 untersucht haben, anwenden.

Die über die ganze Länge l der Stütze verteilte Masse wird durch eine gewisse reduzierte, oben an der Stütze gelegene Masse m_1 ersetzt; der ganze übrige Teil derselben wird jedoch als elastisch angesehen, der aber keine Masse und Träg-

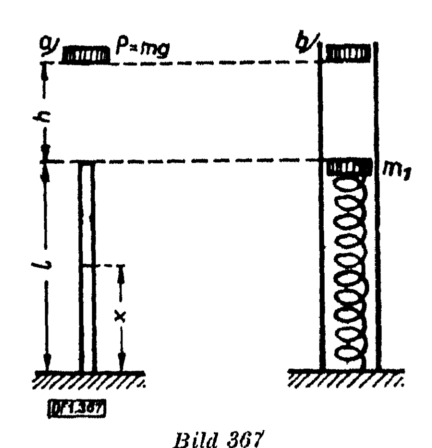


Bild 367

heitskräfte besitzt. Schematisch ist dies in Bild 367, b dargestellt. Die reduzierte Masse m_1 der Stütze wird aus der Bedingung ermittelt, daß ihre lebendige Kraft gleich der lebendigen Kraft der die Stütze bildenden Massen ist. Wegen des Vorhandenseins der wellenartigen Fortpflanzung der Formänderungen in der Stütze ist jedoch die Berechnung der lebendigen Kraft derselben sehr schwierig. Diese Operation führt man näherungsweise durch, indem man ein Gesetz der Geschwindigkeitsverteilung über die Länge der Stütze annimmt; wenn z. B. die Verschiebung des oberen Querschnitts der Stütze gleich u und die Verschiebung des Querschnitts im Abstande x von der Einspannungsstelle gleich u_x ist, so nehmen wir an, daß

$$u_x = u\,\frac{x}{l}$$

ist, wie dies bei einem Druck der Stütze durch eine oben angreifende Kraft zutreffen würde. Differenziert man nach der Zeit t, so erhalten wir das Verteilungsgesetz der Geschwindigkeiten:

$$\frac{du_x}{dt} = \frac{du}{dt}\,\frac{x}{l}.$$

Bezeichnet man mit $m_0 = \frac{Q}{g}$ die Masse der Stütze, so können wir jetzt schon leicht die kinetische Energie derselben berechnen:

$$T = \int_0^l \frac{Q\,dx}{2\,gl}\left(\frac{d\,u_x}{dt}\right)^2 = \frac{Q}{2\,gl^3}\left(\frac{du}{dt}\right)^2 \int_0^l x^2\,dx = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\,\frac{Q}{g}\left(\frac{du}{dt}\right)^2.$$

Wenn wir mit Q' das gesuchte reduzierte Gewicht der Stütze bezeichnen, so wird ihre kinetische Energie

$$T' = \frac{Q'}{2\,g}\left(\frac{du}{dt}\right)^2$$

sein. Aus der Bedingung

$$T' = T$$

finden wir:

$$Q' = \frac{1}{3}\,Q,$$

d. h. die reduzierte Masse macht ein Drittel der wirklichen Masse der Stütze aus.

Im Moment der Berührung der Last P mit der „reduzierten Masse" m_1 der Stütze ändert sich fast momentan die Geschwindigkeit $v_0 = \sqrt{2\,gh}$ bis zum Wert v_0', die man auf Grund des Gesetzes über die Erhaltung der Bewegungsgröße ermittelt:

$$\frac{P}{g}\,v_0 = \left(\frac{P}{g} + \frac{Q}{3\,g}\right) v_0'.$$

Hieraus ergibt sich:

$$v_0' = \frac{v_0}{1 + \frac{Q}{3\,P}} = \frac{\sqrt{2\,gh}}{1 + \frac{1}{3}\,\frac{Q}{P}}. \qquad (12.23)$$

Von diesem Moment an kann man schon eine gemeinsame Bewegung der Last und der reduzierten Masse annehmen, wobei man berücksichtigt, daß auf diese die elastische Reaktion der Stütze wirkt. Die Energiegleichung (12.16) stellen wir für den Zeitabschnitt vom Moment der Berührung der Massen (hierbei ist die Geschwindigkeit der Massen gleich v_0') bis zum Moment des Stillstandes der Massen auf:

$$-\left(\frac{P}{g} + \frac{Q}{3\,g}\right)\frac{v_0'^2}{2} = P\,u_{\max} - \frac{1}{2}\,\frac{EF}{l}\,u^2_{\max}. \qquad (12.24)$$

Aus dieser Gleichung finden wir $u_{\max}$. Ziehen wir im linken Teil $\frac{P}{g}$ vor die Klammer, und ersetzen wir $v_0'^2$ durch seinen Ausdruck (12.23), so bringen wir die Gleichung auf die Form:

$$-\frac{P}{g}\left(1 + \frac{Q}{3\,P}\right)\frac{2\,gh}{2\left(1 + \frac{Q}{3\,P}\right)^2} = -\frac{Ph}{1 + \frac{Q}{3\,P}};$$

bezeichnen wir wie auch früher die statische Zusammendrückung mit u_0:

$$u_0 = \frac{P\,l}{EF}.$$

Setzt man alles in die Gleichung (12.24) ein, so bringen wir sie auf die Form:

$$u^2_{max} - 2\,u_0 u_{max} - \frac{2\,h u_0}{1 + \frac{Q}{3\,P}} = 0. \tag{12.24a}$$

Ohne Berücksichtigung der Masse des Balkens hatten wir gemäß (12.18):

$$u^2_{max} - 2\,u_0 u_{max} - 2\,u_0 h = 0.$$

Auf diese Weise wirkt sich der Einfluß der Masse des Balkens so aus, als ob er die Fallhöhe h der Last um den Wert

$$\frac{h}{1 + \frac{Q}{3\,P}}$$

verringern würde. Im Endergebnis erhalten wir schließlich:

$$u_{max} = u_0 + \sqrt{u_0^2 + 2\,u_0 h \frac{1}{1 + \frac{1}{3}\frac{Q}{P}}}. \tag{12.25}$$

B. Die Methode der Reduzierung der Massen wird mit Erfolg auch in anderen Fällen der Stoßwirkung auf elastische Konstruktionen angewandt. Im Falle einer Stoßwirkung der Last auf die Mitte C eines Balkens (Bild 365) wird z. B. die Masse desselben in diesen Punkt gesetzt. Bei der Berechnung der Geschwindigkeiten der Punkte des Balkens kann man annehmen, daß er sich nach einer Kurve

$$u = \frac{X l^3}{48\,EJ}\left(3\frac{x}{l} - 4\frac{x^3}{l^3}\right) = u_0\left(3\frac{x}{l} - 4\frac{x^3}{l^3}\right) \tag{12.26}$$

von der gleichen Form durchbiegt, die auch die statische elastische Linie bei der Biegung infolge einer Last X in der Mitte aufweist. Die kinetische Energie des Balkens wird dann

$$2\frac{Q}{2\,gl}\int_0^{l/2}\left(\frac{du}{dt}\right)^2 dx = 2\frac{Q}{2\,gl}\left(\frac{du_0}{dt}\right)^2\int_0^{l/2}\left(3\frac{x}{l} - 4\frac{x^3}{l^3}\right)^2 dx = \frac{17}{35}\frac{Q}{2\,g}\left(\frac{du_0}{dt}\right)^2$$

sein. Hieraus ersieht man, daß die reduzierte Masse des Balkens $\frac{17}{35}$ seiner wirklichen Masse ausmacht. Die reduzierte Masse ordnet man in der Mitte des Balkens an, und darauf bestimmt man die gemeinsame Geschwindigkeit v_0' des Balkenmittelpunktes und der Last P unmittelbar nach dem Schlag (Stoß), wobei man das Gesetz über die Erhaltung der Bewegungsgröße anwendet:

$$\frac{1}{g}\left(P + \frac{17}{35}\,Q\right)v_0' = \frac{P}{g}\,v_0.$$

Im weiteren lösen wir diese Aufgabe wie auch die vorhergehende [vgl. die Formeln (12.24) und (12.25)] und erhalten die größte dynamische Durchbiegung:

$$u_{\max} = u_0 + \sqrt{u_0^2 + 2\, u_0 h \frac{1}{1 + \frac{17}{35}\frac{Q}{P}}}. \tag{12.27}$$

Die Berechnungen zeigen, daß die Werte der reduzierten Masse sich kaum ändern, wenn wir an Stelle der statischen elastischen Linie (12.26) eine andere der Form nach geeignete Kurve, z. B. eine Sinuslinie benutzen.

12.4 Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Formänderung in einem elastischen Stabe

A. Stellen wir uns einen außerordentlich langen Stab vor (Bild 368), an dessen linkem Ende plötzlich eine Zug- oder Druckkraft angreift oder auf dessen gleiches Ende ein Schlag (Stoß) ausgeübt wird. Untersuchen wir den Fortpflanzungsprozeß der Spannungen und Formänderungen längs des Stabes, die anfänglich zunächst nur an seinem linken Ende auftreten. Während dieses Prozesses wird

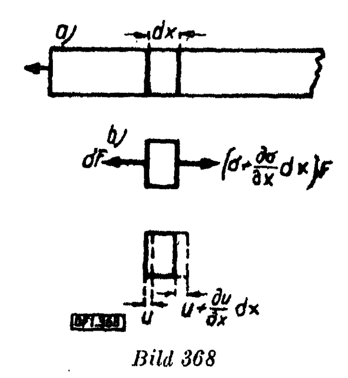


Bild 368

sich die Spannung σ in einem beliebigen Querschnitt in einem Abstande x vom linken Ende mit der Zeit ändern, und umgekehrt wird sie sich in einem gegebenen Zeitmoment von einem Querschnitt zum anderen ändern. Das gleiche muß man über die Formänderungen des Stabes und über die Verschiebungen u seiner Punkte sagen, die man als Funktionen von zwei Veränderlichen betrachten muß:

$$\sigma(x, t), \quad \varepsilon(x, t) \quad \text{und} \quad u\,(x, t). \tag{12.28}$$

Schneiden wir aus dem Stab ein Element von der Länge dx heraus (Bild 368, b). Die Wirkung der abgetrennten Teile im gegebenen Moment auf dieses Element ersetzen wir durch Kräfte

$$\sigma F \quad \text{und} \quad \left(\sigma + \frac{\partial \sigma}{\partial x}\, dx\right) F,$$

worin F die Fläche des Stabquerschnitts ist. Die partielle Ableitung nach x haben wir genommen, da das Element in einem gegebenen Moment betrachtet wird und t daher als konstant anzusehen ist. Die Gleichung der Bewegung des Elementes ist:

$$\varrho F\, dx\, \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \left(\sigma + \frac{\partial \sigma}{\partial x}\, dx\right) F - \sigma F$$

oder

$$\varrho\, \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma}{\partial x}, \tag{12.29}$$

worin ϱ die Dichte des Stabmaterials ist. Die Spannung σ kann man aber durch die Verlängerung ausdrücken, nämlich

$$\sigma = E\,\varepsilon,$$

und ε durch die Verschiebung der Enden des Elements. Wenn im gegebenen Moment das linke Ende des Elements die Verschiebung u aufweist, so hat sich das rechte Ende um den Wert

$$u + \frac{\partial u}{\partial x}\, dx$$

verschoben, worin wiederum die partielle Ableitung nach x genommen ist. Es ist klar, daß sie absolute Verlängerung des Elements

$$\Delta(dx) = \left(u + \frac{\partial u}{\partial x}\, dx\right) - u = \frac{\partial u}{\partial x}\, dx$$

und die relative

$$\varepsilon = \frac{\Delta(dx)}{dx} = \frac{\partial u}{\partial x}$$

ist. Daher ist:

$$\sigma = E\, \frac{\partial u}{\partial x}. \tag{12.30}$$

Setzt man diesen Wert in (12.29) ein, so erhalten wir:

$$\varrho\, \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = E\, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

oder

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \tag{12.31}$$

worin

$$a = \sqrt{\frac{E}{\varrho}} \text{ ist.} \tag{12.32}$$

Die Gleichung (12.31) stellt eine partielle Differentialgleichung dar, die in der Physik eine große Rolle spielt[1]).

B. Die allgemeine Lösung dieser Gleichung (von *d'Alembert* angegeben) ist leicht zu finden, wenn man an Stelle von t und x die neuen Veränderlichen ξ und η einführt:

$$\xi = x - at \quad \text{und} \quad \eta = x + at. \tag{12.33}$$

---

[1]) Die gleiche Form hat die Schwingungsgleichung einer angespannten Saite.

Durch Differentiation erhalten wir:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{dx} = \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta},$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial t} = \left(-\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\right) a.$$

Wiederholt man die Differentiation, so erhalten wir:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2\,\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\,\partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - 2\,\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\,\partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\right) a^2.$$

Setzt man diese Werte in (12.31) ein, so bringen wir sie auf die einfache Form:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\,\partial \eta} = 0.$$

iese Gleichung ist leicht zu integrieren. Die allgemeinste Form der Funktion (ξ, η), die ihr genügt, ist:

$$u = \varphi(\xi) + \varphi(\eta),$$

orin φ und ψ beliebige Funktionen sind. Gemäß (12.33) schreiben wir endgültig:

$$u = \varphi(x - at) + \psi(x + at). \qquad (12.34)$$

ie Form der Funktionen φ und ψ kann man aus den Anfangs- und Rand- edingungen ermitteln, die den Zustand des Stabes in irgendeinem Anfangs- oment und die Konstruktion seiner Auflager bestimmen.

Ohne uns hierbei aufzuhalten, untersuchen wir die partielle Lösung:

$$u = \varphi\,(x - at) \qquad (12.35)$$

d stellen den physikalischen Sinn derselben fest. Lassen wir das Argument der unktion φ der Bedingung

$$x - at = c = \text{const}$$

er

$$x = at + c$$

tsprechen, dann verlangt diese Bedingung offenbar, daß wir einen Querschnitt s Stabes betrachten, der sich gleichförmig mit der Geschwindigkeit a in Rich- ng der positiven Ox-Achse bewegt. Es ist dann aber:

$$u = \varphi(c) = \text{const} \quad \text{und} \quad \varepsilon = \frac{\partial u}{\partial x} = \varphi'(c) = \text{const}$$

Folgt man demnach diesem sich bewegenden Querschnitt, so sehen wir, daß in diesem immer die gleiche Verlängerung ε und gemäß (12.30) auch ein und dieselbe Spannung σ herrscht. Demzufolge ist

$$a = \sqrt{\frac{E}{\varrho}} \tag{12.36}$$

die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Längsformänderungen und der Normalspannungen längs des Stabes. Gleichzeitig ist dies die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Schalls im Stab. Wie man aus (12.36) ersieht, hängt diese Geschwindigkeit nur vom Stabmaterial ab, nämlich vom Elastizitätsmodul E und von der Dichte ϱ, und mit diesen ist sie als eine der stabilen physikalischen Charakteristiken jedes elastischen Materials anzusehen.

C. Wenn E und ϱ für das gegebene Material bekannt sind, so kann man die Formel (12.36) zur Berechnung der Schallgeschwindigkeit in diesem benutzen. Ersetzt man die Dichte durch das spezifische Gewicht γ, wobei

$$\varrho = \frac{\gamma}{g}$$

ist, so erhalten wir:

$$a = \sqrt{\frac{Eg}{\gamma}}. \tag{12.36a}$$

Für einen Stahlstab ist z. B.

$$E = 2{,}1 \cdot 10^6 \text{ kg/cm}^2 \quad \text{und} \quad \gamma = \frac{7{,}85}{10^3} \text{ kg/cm}^3,$$

und wir erhalten:

$$a = \sqrt{\frac{2{,}1 \cdot 10^6 \cdot 981 \cdot 10^3}{7{,}85}} = 523\,000 \text{ cm/sec} = 5230 \text{ m/sec}.$$

Wenn die Schallgeschwindigkeit im Stab aus einem gegebenen Material auf dem Versuchswege gefunden worden ist, so kann man die Formel (12.36a) zur Ermittlung des Elastizitätsmoduls des Materials benutzen:

$$E = \frac{\gamma}{g} a^2.$$

Die von uns untersuchte partielle Lösung (12.35) gibt die Schallwelle an, die sich in Richtung der x-Achse bewegt. Die andere partielle Lösung

$$u = \psi\,(x + at),$$

die man aus (12.34) erhält, gibt die sich in entgegengesetzter Richtung bewegende Welle an, deren Geschwindigkeit gleich $-a$ ist. In einem Stab von endlicher Länge bewirken diese beiden Wellen, indem sie von den Enden zurückgeworfen werden und sich in umgekehrten Richtungen bewegen, das komplizierte Bild der Fortpflanzung der Formänderungen, das unter Absatz A des Kapitels 12.2 erwähnt wurde.

Elastische Schwingungen, die in Maschinen- und Bauwerksteilen auftreten, können als Ursache von bedeutenden Überbeanspruchungen selbst in solchen Fällen erscheinen, wenn sie nicht durch Stoßwirkungen hervorgerufen werden, sondern einfach durch irgendwelche Bewegungen der Belastungen (Ansammlung von Fahrzeugen oder von arbeitenden Maschinen). Die Theorie der elastischen Schwingungen ist daher für den Ingenieur von großem Interesse und daher werden dieser besondere Forschungen gewidmet. Siehe z. B.[1])[2]) *S. P. Timoschenko*, „Die Theorie der Schwingungen im Ingenieurfach", Moskau 1932. Prof. *S. A. Bernstein*, „Die Grundlagen der Dynamik der Bauwerke", Moskau 1938[2]). In diesen Büchern findet man auch Hinweise auf die umfangreiche Literatur über die Theorie der Schwingungen. Siehe auch[3]) Prof. *N. J. Beszuchow*, „Vorlesungen über Festigkeitslehre", Auflage I, Moskau 1940[3]).

---

[1]) *Anm. d. deutschen Redaktion:* Deutsche Arbeiten z. B. Prof. Dr.-Ing. *O. Föppl*, Braunschweig: Mechanische Schwingungen in der Technik.

[2]) С. П. Тимошенко, „Теория калебаний в пиженерном деле". Москва, 1932. Проф. С. А. Бернштейн, „Основы Динамики сооружений" Москва 1938.

[3]) Проф. Н. И. Безухов, „Лекции по сопротивлению Материалоь" вып. I. Москва, 1940.

Sachverzeichnis

A

B

C

D

G

H

I

J

K

L

M

N

O

P

SCH

ST

W

Z

Verzeichnis der Berechnungsbeispiele